$$\frac{\frac{n!}{e^{-\nu}\nu^{n}}}{} \mp \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\sqrt{2n\pi}}{e^{-\nu}\nu^{n}} = \left(\frac{n}{\nu}\right)^{n} e^{\nu-n}\sqrt{2n\pi}$$

$n = 70$

$\nu = 1·55$

1·84510
0·19033
1·65477 . 70
11·58339
1·3216
11·71555
− 29·727
87·43

0·4343 . 68·45
27380
2053
274
20
29·727

·30103
·49715
1·84510
2·64328

2·7 . 10^{87} . ~~$\frac{3}{2}$. 86400~~

86400 : $\frac{3}{2}$ =

$n = 17$

1·23045
0·19033
1·04012 . 17
72808
17·6820
6·710
10·972
1·014
11·986

$\underbrace{0·97 . 10^{12}}$

$\frac{10^{12}}{2.10^{7}}$ = 5 . 10^{4} Jahre!

= 50.000 Jahre

~~15·45 . 17~~
~~10815~~
~~26265~~

15·45 . 0·4343
6180
4634
62
5
6·710

·79818
1·23045
2·02863

86400 . 365

4·93651
2·56229
7·4988 = 3·2 . 10^{7} : $\frac{3}{2}$

= 2 . 10^{7}

Mittlere Erwartungszeit

Falls die Zahlen in gleichen Intervallen auftreten würden, wäre die Länge eines solchen Intervalles (zwischen je zwei Auftretten):

$N\,W = \frac{n!}{\nu^n e^{-\nu}}$ und die mittlere Erwartungszeit wäre halb so gross:

$W_m = \frac{1}{2}\frac{n!}{\nu^n e^{-\nu}}$

Falls aber die Zahlen unregelmässig gehäuft auftreten, wird die mittlere Erwartungszeit länger; falls ganz zufällig, muss sie gleich $= \frac{n!}{\nu^n e^{-\nu}}$ werden:

Sind die einzelnen ~~Würfe~~ Versuchsresultate von einander ganz unabhängig, so müssen die Zwischenintervalle für das Auftreten einer gewissen Zahl so verteilt sein wie die Anzahl von [illegible] Gasmolekülen oder wie radioaktive Zerfallsereignisse, also wenn

~~im Mittel~~ normalerweise ~~die Zahl n in Intervallen N sich wiederholt, also $\frac{M}{N}$ mal auftritt so ist die Wahrscheinl. dass sie $\frac{M}{N}(1+\delta)$ mal auftritt $= e^{-\frac{n\delta^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$~~

Nämlich Wahrsch. dass eine Zahl n (beim ersten Wurf) auftritt $= W_n$

Wahrsch. dass sie nicht $= 1 - W_n$

Wahrsch. dass sie erst beim zweiten Wurf auftritt $= (1-W_n)\,W_n$

dritten $(1-W_n)^2\,W_n$ u.s.w.

Natürlich ist: $W_n\left[1 + (1-W_n) + (1-W_n)^2 + \cdots\right] = W_n \frac{1}{1-(1-W_n)} = 1$

Mittlere Zahl der Würfe welche bis zum ersten Auftreten erforderlich sind:

$$\bar{Z} = W_n\left[1 + 2(1-W_n) + 3(1-W_n)^2 + 4(1-W_n)^3 + \cdots\right] = \frac{W_n}{[1-(1-W_n)]^2} = \frac{1}{W_n}$$

Nun betragen die empirischen Wahrscheinlichkeiten für

0	1	2	3	4	5	6
101 : 502	164	129	69	32	5	1

Also sollten die mittleren Intervalle betragen (im Falle vollständiger ~~Unabhängigkeit~~ Zufälligkeit):

502 : 101 = 4·9 ~~502 : 164~~ 256 : 82 = 3·12 502 : 129 = 3·89 502 : 69 = 7·27 251 : 16 = 15·7 ~~100·4~~
98 10 18 115 12 19 5 91 11

4·91	3·12	3·89	7·27	~~15·7~~ 16·0	102·4

beobachtet wurden:

6·7	2·92	3·93	5·18	8·84	26·9

Letztere Zahlen sind aber insofern nicht ganz richtig, als bei zu kurzer Ausdehnung der Zahlenreihe gerade die längeren Intervalle benachteiligt sind. Es ist also richtiger die Zahlenreihe als Ganzes zu betrachten, nicht in 6 Stücke geteilt, obwohl auch dann noch die langen Intervalle zu wenig hervortreten.

6·56	2·93	4·00	~~[illegible]~~ 6·90	25·5	122·7

Im Ganzen stimmen diese aber annähernd mit obigen Zahlen, so dass dies für Unabhängigkeit der aufeinanderfolgenden Zahlen sprechen würde.

Die wirkliche Abhängigkeit gibt sich aber zu erkennen in den ~~Za~~ Zweier-Gruppen

Wären die Zahlen unabhängig so müsste die $\frac{\text{Wahrsch. } 02}{\text{Wahrsch. } 01} = \frac{\text{Wahrsch. } 12}{\text{Wahrsch. } 11} = \frac{\text{Wahr. } 22}{\text{Wa. } 21}$ u.s.w.

Verhältnisse müssten gleich sein.

Darstellbar in Curven, indem man die W(21) ~~ist~~ durch W(2) dividiert

Relative Häufigkeit

erste Zahl	zweite Zahl 0	1	2	3	4	5	6	7
0	208	162	88	32	23	—	—	—
1	125	172	125	53	31	3	—	3
2	75	167	139	95	24	8	4	—
3	44	171	163	97	37	—	—	—
4	32	128	160	64	96	32	—	—
5	—	102	205	205	—	—	—	—

also sieht man deutlich wie die erste Zahl dahin wirkt, die zweite in ihrem Sinne zu beeinflussen; wenn 0 als erste so ist 00 am wahrscheinlichsten, wenn 5 als erste so ist auch als zweite eine relativ grosse Zahl wahrscheinlich.

Bei Beobachtung in gleichen Intervallen τ wird also die bis zum ersten Auftreten der Zahl n im Mittel erforderliche Anzahl von Intervallen

$$(N)_m = \frac{n!}{\nu^n e^{-\nu}}$$

aber nur falls jene Intervalle so lang sind, dass die aufeinanderfolgenden Ereignisse unabhängig sind, also dass $P = 1$ gesetzt w.

das heisst es muss $\frac{h}{\sqrt{D\tau}}$ von der Grössenordnung 1 sein

also: $\tau \sim \frac{h^2}{D}$

Hängt aber das nicht auch von δ ab?

Im Falle grosser Zahlen n haben wir $n = \nu(1+\delta)$

$$\log(N_n) = \cancel{\nu(1+\delta)\lg\nu} + \nu(1+\delta)\lg(1+\delta) - \nu(1+\delta) + \lg\sqrt{2\nu\pi}$$

$$- \nu - \cancel{\nu(1+\delta)\lg\nu}$$

$$= \nu(1+\delta)\left(\delta - \frac{\delta^2}{2}\right) - \nu\delta + \lg\sqrt{2\nu\pi} = \nu\frac{\delta^2}{2} + \lg\sqrt{2\nu\pi}$$

also:

$$\overline{N}_n = \sqrt{2\nu\pi}\, e^{\frac{\nu\delta^2}{2}}$$

Dabei kann also N gar nicht kleiner werden als $\sqrt{2\nu\pi}$!

(allerdings nicht streng)

Man kann nun auch umgekehrt vorgehen und $\nu\delta$ als die ~~grösste~~ maximale ~~[illegible]~~ bei N Beobachtungen auftretende Zahl auffassen. Es wird dann

$$\frac{\nu\delta^2}{2} = \lg\left(\frac{N}{\sqrt{2\nu\pi}}\right)$$

$$\nu\delta = \sqrt{2\nu\left(\lg N - \cancel{1}\lg\sqrt{2\nu\pi}\right)}$$

Das ist aber nur für $N > \sqrt{2\nu\pi}$ anwendbar

also wird für grosse N

die maximale Abweichung proportional $\sqrt{\lg N}$

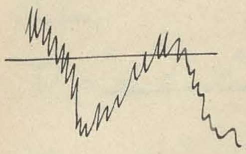
Mittlere maximale Abweichung bei Br. B.

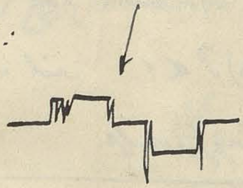
Wahrsch., dass die Entfernung h … h + dh zum ersten Male nach n Versuchen erreicht wird

$$= \prod_{n=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi D n\tau}}\, e^{-\frac{h^2}{4Dn\tau}}\right) \cdot e^{-\frac{h^2}{4Dn\tau}}\, \frac{1}{2\sqrt{\pi D n\tau}}$$

Vorzug der mittleren Erwartungszeit vor mittl. Wiederkehrzeit

Falls es sich um Br. B. oder um Anzahl von Emulsionsteilchen handelt, sind die Verläufe gegeben durch Curven der Gestalt:





Falls man aber die ~~Mittel~~ Zeit zur ~~[illegible]~~ nächsten Rückkehr nimmt und aus denen Zeit Mittel bildet, wird es sehr unbestimmt

Dagegen ist die Mittelbildung bei der Erwartungszeit ganz klar:

(= Mittel über alle zeitlich gleichberechtigten Ausgangspunkte)

Vielleicht lässt sich p. 3 in folgender Weise weiter ausführen:

Wann
Inwiefern können aufeinanderfolgende Zählungs Resultate als unabhängig ~~[illegible]~~ betrachtet werden?

[illegible] 1

α). Wenn der wahrscheinliche Rest der vorangehenden Zahl kleiner ist als 1

Also wenn $\nu P \leqq 1$ ‖ falls ~~die~~ es sich um solche Zahlen n handelt welche überhaupt wenig von ν verschieden sind, also für kleine δ

Wenn der durch die vorangegangene Zählung verursachte wahrscheinliche Fehler weniger als eine Einheit ausmacht

β). Falls es sich um stark abweichende δ handelt, kann man folgendermassen argumentiren:

der Bruchteil P des ursprünglichen Gebietes ist noch von der vorangehenden Substanz eingenommen, und zwar im Mittel mit der Dichte ν, so dass nur $(1-P)$ für die Dichte n übrig bleibt.

Also nur falls der Unterschied $(n-\nu)P < 1$ kann man diese Ereignisse als unabhängig ansehen

Woher der Unterschied der Fälle α, β?

Im Falle (α), d.h. falls es sich um $\underline{n}$ handelt, welche innerhalb der mittleren Schwankung liegen, oder ~~kann~~ die vorausgehende Zahl wahrscheinlich ~~irgend~~ nicht genau v sein, sondern irgend einen Wert $v \pm \varepsilon$ haben, also ist erforderlich dass $v P < 1$

Es würde nicht ausreichen, dass $(v - n) P < 1$ weil wenn z.B. $n = v$, so ist die Veränderlichkeit der vorausgehenden Zahl noch nicht weggeschafft.

Dagegen bei (β): die Wahrsch.

Erste Zahl Zweit

0	0	1	2	3	4	5	6		
0	35·3	39·7	22·3	8·3	2·4	0·5+	0·1		108·6
1	39·7	59·6	42·0	18·9	6·2	1·6	0·3	0·1	168·2
2	22·3	42·0	36·3	19·5+	7·5	2·2	0·5		130·4
3	8·3	18·9	19·5+	12·5−	5·6	2·9	0·5		66·7
4	2·4	6·2	7·5	5·6	2·9	1·1	0·3		25·7
5	0·5+	1·6	2·2	1·9	1·1	0·5	0·2		7·7

507·3

Ursprüngliche Differenzengleichung für beliebige n, m

$$W(n,m) = W(n-1, m-1) + P\left[W(n-1,m) - W(n-1,m-1)\right]$$

$$\lim \frac{e^{-\nu P}(\nu P)^m}{m!} = \frac{e^{-\nu P}(\nu P)^m e^m}{m^m \sqrt{2m\pi}}$$

$$\cancel{\frac{\partial \Psi}{\partial x} = c\,\frac{\partial \Psi}{\partial y}}$$

$$\cancel{\Psi = f(y+cx)} \qquad f$$

Dabei:

$$W(n,0) = e^{-\nu P} P^n$$

$$W(0,m) = e^{-\nu P}\frac{(\nu P)^m}{m!}$$

$$W(n,m) - W(n-1,m) = (1-P)\left[W(n-1,m-1) - W(n-1,m)\right]$$

$$W(n-1,m) - W(n-2,m) = (1-P)\left[W(n-2,m-1) - W(n-2,m)\right]$$

$$\vdots$$

$$W(1,m) - W(0,m) = (1-P)\left[W(0,m-1) - W(0,m)\right]$$

$$W(n,m) - W(0,m) = (1-P)\sum_{k=0}^{n-1}\left[W(k,m-1) - W(k,m)\right]$$

$$W(n,m-1) - W(0,n-1) =$$

$$\vdots$$

$$W(n,1) - W(0,1) = (1-P)\sum\left[W(k,0) - W(k,1)\right]$$

$$\sum_{m=1}^{m}\left[W(n,m) - W(0,m)\right] = (1-P)\sum_{k=0}^{n-1}\left[W(k,0) - W(k,m)\right]$$

Für $m=\infty$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} W(n,m) - 1 - e^{-\nu P} = (1-P)\left\{e^{-\nu P}\sum_{k=0}^{n-1} P^k - \cancel{\sum_{k=0}^{n-1} W(k,\infty)}\right\}$$

~~$\overline{W}(n, m)$~~

$$\overline{W}(n, N)_{+} = e^{-\nu P} \sum_{m=0}^{n} \binom{m}{m} (1-P)^{n-m} P^{m} \frac{(\nu P)^{N-n+m}}{N-n+m!}$$

$$\overline{W}(n, N)_{-} = e^{-\nu P} \sum_{m=N}^{m=n} \binom{n}{m} (1-P)^{n-m} P^{m} \frac{(\nu P)^{N-n+m}}{N-n+m!}$$

$$= e^{-\nu P} \sum$$

Gibt es ein Analogon zu meiner frühern Bemerkung (Bull Ac. Crac. 1913 p. 433)

dass $\overline{W}(x_0)\,\overline{W}(x\,x_0)_t = \overline{W}(x)\,\overline{W}(x_0\,x)_t$

dass also dieselben Ausdrücke W auch für umgekehrte ~~Ri~~ Zeitfolge gelten?

Es müsste sein:

~~$\overline{W}(n)\ \overline{W}_n(+k) = \overline{W}$~~ $= \sum \overline{W}(n)\,\overline{W}^{k}(m-n))$

Es muss jedenfalls gelten:

$$\sum_n \overline{W}(n)\,\overline{W}(n\,m)_t = \overline{W}(m) \qquad = \sum$$ ~~$\overline{W}(n)\,\overline{W}(n, m)$~~

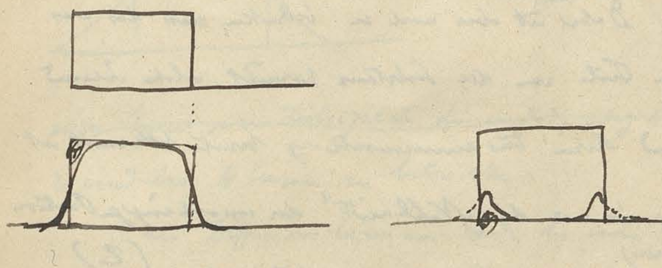
also Frage ob auch

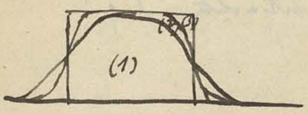
~~$\sum \overline{W}(n+k)\,\overline{W}$~~ $\sum_m \overline{W}(m)\,\overline{W}(m, n)_t \sum \overline{W}(m)\,\overline{W}^{k}_{m}(-(m-n))$

$$= \sum \overline{W}(n+k)\,\overline{W}^{k}_{n+k}(-k) = \overline{W}(m)\ ?$$

Wie gross ist die Wahrsch. einer Dreier-Gruppe wie etwa 000 ?

Diffusions-Verschmelzung





Der Teil (1) rührt noch von der ursprünglichen Verteilung her; er ist die Nachwirkung des ursprünglichen Zustandes

Der Teil (4) stellt die während des ersten Intervalls eingedrungene Flüssigkeit vor; dieselbe wird nun während des zweiten Intervalls teilweise nach innen teilweise nach aussen diffundieren, so dass am Schlusse des zweiten Intervalls nur mehr (5) davon übrig bleibt

Dafür dringt während des zweiten Intervalls eine neue analoge Portion (4) wieder ein.

0 00 kann nur bestehen, wenn in allen drei Teilen ~~(1), (5), (4)~~ der ursprünglichen und eingedrungenen Teile der Zustand 0 herrscht und da dieselben unabhängig sind (?) ist $W(000) = \boxed{\cancel{P(1)\,W(0)}} \cdot \boxed{\cancel{P(5)\,W(0)}} \boxed{P(4)\,W(0)}$

~~Es~~ Wegen Anwendbarkeit des Superpositions Prinzipes sollte nun sein:

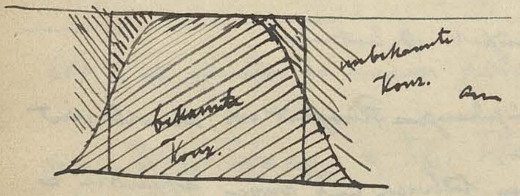
$P(5) = \cancel{P_1 - P_2}\ P_2 - P_1$

$(4) = P_1$

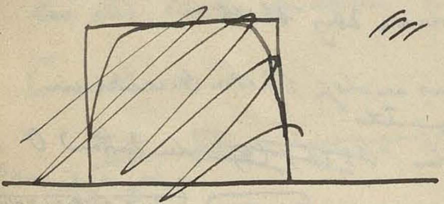
da ja ~~[illegible]~~ zum Schlusse sein muss: $1 = 1 - P_2 + (P_2 - P_1) + P_1$

Also ist $W(000) = \frac{e^{-\nu}\nu^0}{0!} \cdot \frac{e^{-\nu P}(\nu P)^0}{0!} \frac{e^{-\nu P}(\nu P)^0}{0!}$

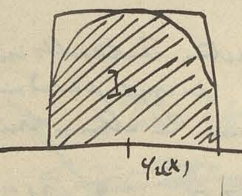
Die 0000 Gruppen sind zufällig erfasst, denn dieselben kommen nur dann zu Stande, falls in sämmtlichen <u>eingedrungenen</u> Teilportionen die Zahl 0 herrscht. ohne Rücksicht auf die austretenden. Dabei ist aber noch zu bedenken, dass das was im zweiten Intervall eindringt, zum Teile von der Substanz herrührt, welche während des ersten Intervalls ausgetreten ist und deren Zusammensetzung bereits bekannt ist. Es ist also als unabhängiges Ereignis nur die „Nullheit" der unabhängigen Portion jener während des zweiten Intervalls neu zufließenden Substanz zu betrachten. (?)



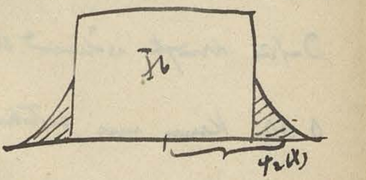
am Schlusse des 1 Intervalles



//// kann man sich zerlegen in

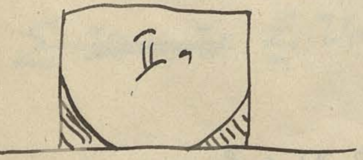


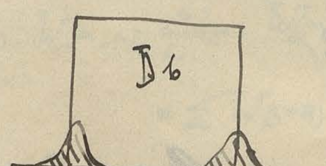
und



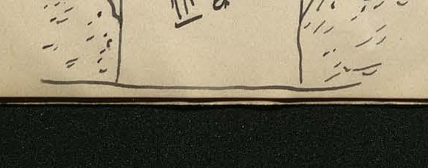
und deren Differenzen extra betrachten

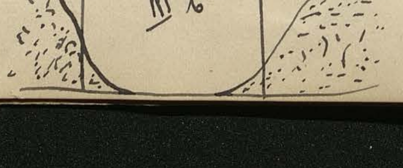
Außerdem andere Art Flüssigkeit, welche für das zweite Intervall als bekannt vorausgesetzt wird



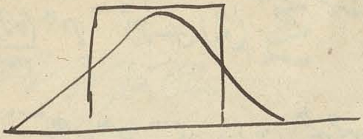


Endlich der unbekannte Rest, von welchem ein Teil während des II Intervalls neu eindringt





Nun sind aber $II_a + III_a = I_b + II_b =$



und ebenso I_a I_b

~~also kann man tatsächlich die wirklich übrig bleibende~~

Es sind also 4 Curven zu betrachten:

1). die Diffusions Curve am Ende des ersten Intervalles Φ_1

2). " " " von I_a } am Ende des zweiten Intervalls φ_2 } diese sind aber nicht identisch mit III !!!

3). " " " von I_b ψ_2

4). Die gesammte Diffusions Curve am Ende des zweiten Intervalles Φ_2

5). —

Dabei ist ~~$\varphi_2 + \psi_2 = \Phi_2$~~ $\varphi_2(x) + \psi_2(x) = \Phi_2(x)$

Andererseits aber muss aber sein

~~Φ_2~~ $\varphi_2(x) + \psi_2$

Umkehrbarkeit der Elementarvorgänge

$$P(+k) = e^{-\nu P} \sum_{m=0}^{n}{}' \binom{n}{m} (1-P)^{n-m} P^{m} \frac{(\nu P)^{k+m}}{(k+m)!} \quad \Bigg\| \quad P(-k) = e^{-\nu P} \sum_{m=k}^{n} \binom{n}{m} (1-P)^{n-m} P^{m} \frac{(\nu P)^{m-k}}{(m-k)!}$$

$$P(n,b) = e^{-\nu P} \sum_{m=0}^{n}{}' \binom{n}{m} (1-P)^{n-m} P^{m} \frac{(\nu P)^{m+b-n}}{(m+b-n)!} \quad \Bigg| \quad P(n,b) = e^{-\nu P} \sum_{m=n-b}^{n}{}' \binom{n}{m} (1-P)^{n-m} P^{m} \frac{(\nu P)^{m-n+b}}{(m-n+b)!}$$

$b > n$ | $b < n$

$$\cancel{P(b,n)} = e^{-\nu P} \sum_{m=b-n}^{b}{}' \binom{b}{m} (1-P)^{b-m} P^{m} \frac{(\nu P)^{m+n-b}}{(m+n-b)!}$$

$\downarrow$

$$= e^{-\nu P} \left\{ \binom{n}{0} (1-P)^{n} \frac{(\nu P)^{b-n}}{b-n!} + \binom{n}{1} (1-P)^{n-1} P \frac{(\nu P)^{b-n+1}}{b-n+1!} + \ldots \binom{n}{n} P^{n} \frac{(\nu P)^{b}}{b!} \right]$$

$$= e^{-\nu P} \left\{ \binom{b}{b-n} (1-P)^{n} P^{b-n} \frac{(\nu P)^{0}}{0!} + \binom{b}{b-n+1} (1-P)^{n-1} P^{b-n+1} \frac{(\nu P)^{1}}{1!} + \ldots\ldots \binom{b}{b} (1-P)^{0} P^{b} \frac{(\nu P)^{n}}{n!} \right\}$$

$$\binom{n}{i} \frac{1}{b-n+i!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i} \frac{1}{\cancel{(b-n)(b-n+1)}\,(b-n+i)!}$$

$$\binom{b}{b-n+i} \frac{1}{i!} = \frac{b(b-1)(b-2)\ldots \cancel{b}(n-i+1)}{(b-n+i)!} \frac{1}{i!}$$

$$\binom{b}{b-n+i} \frac{1}{i!} = \binom{n}{i} \frac{1}{b-n+i!} \cdot \left[b(b-1)(b-2)\ldots \cancel{b}(n+1) \right] \quad \| b > n$$

$$\cancel{(b,n)}P = \frac{b(b-1)(b-2)\ldots(n+1)}{\cancel{\nu}} \cdot \nu^{n-b} \cdot P(n,b) = \frac{b!}{n!} \nu^{n-b} P(n,b)$$

$$W(n,b) = P(n,b)\cdot\frac{e^{-\nu}\nu^{n}}{n!} \quad \cancel{A} = (b,n)P\cdot\frac{e^{-\nu}\nu^{n}}{n!}\,\frac{\nu^{b-n}}{b(b-1)\cdots(n+1)} = (b,n)P\cdot\frac{e^{-\nu}\nu^{b}}{b!}$$

$(b>n)$

~~(b,n)W~~ = ~~(b,n)P~~.

Wahrscheinlichkeit einer Kombination z.B. 24 kann man auffassen entweder als (Wahrsch. dass eine Zahl 2 vorkommt) ~~und~~ × (Wahrsch. dass auf 2 eine 4 folgt) oder: (Wahrsch. dass Zahl 4 vorkommt) × (Wahrsch. dass vor 4 eine 2 vorhergeht)

Tatsächlich ist also $(b,n)P$ = Wahrsch., dass vor n die Zahl b vorhergeht $b>n$

= Wahrsch., dass

$$W(24) = W(2)\,P(2,4) = (24)P\,W(4)$$

$$(24)\,P = \frac{W(2)}{W(4)}\cdot P(2,4)$$

$$(n,b)P = \frac{W(n)}{W(b)}\,P(n,b) = \nu^{n-b}\,\frac{b!}{n!}\,P(n,b) = P(b,n)$$

$n<b \qquad n<b$

Also ist $(n,m)P = P(m,n)$ Umkehrbarkeit der Zeitfolge!

Wahrsch. dass auf m eine Zahl n folge = Wahrsch. dass vor m eine Zahl n vorhergehe!

$$\frac{1}{k+n!} = \frac{n!}{n+k!}\;\cancel{\nu^{k}}$$

$$\frac{e^{-\nu}\nu^{n}}{n!}\,e^{-\nu P}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(1-P)^{n-m}P^{m}\frac{(\nu P)^{k+m}}{k+m!} = \frac{e^{-\nu}\nu^{n+k}}{n+k!}\overset{e^{-\nu P}}{\sum_{i=k}^{i=n+k}}\binom{n+k}{i}(1-P)^{n+k-i}P^{i}\frac{(\nu P)^{i-k}}{(i-k)!}$$

$$\cancel{\binom{n+k}{i}}\frac{(n+k)(n+k-1)\cdots(n+k-i+1)}{1.\,2.\,3.\cdots i}\;\frac{1}{n+k!} = \frac{1}{n!}\,\frac{n(n-1)\cdots n-m+1}{1.2.3\cdots m}\,\frac{1}{k+m!}\;\cancel{\frac{(n+k)}{k} = \frac{(n+k)(n+k-1)\cdots n}{1.2\cdots k}}\;\frac{1}{i!\;i-k!\;n+k-i!} = \cancel{\frac{1}{n}}\,\frac{1}{m!}\,\frac{1}{k+m!}\,\frac{1}{n-m!}$$

$1.2.\cdots\; i-k!$

$m=i-k$

Also sollte empirische Anzahl der Gruppen (m n) = Anzahl der Gruppen (n m) sein

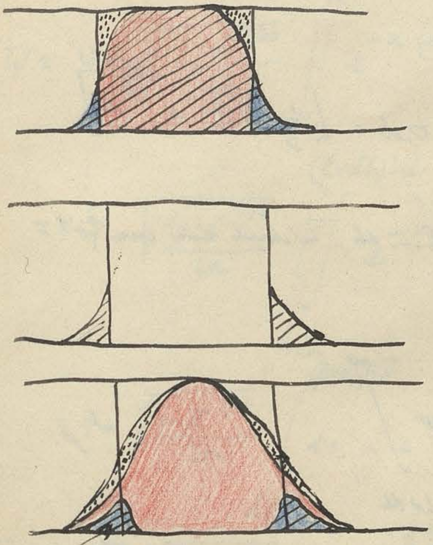
Tatsächlich ist die Anzahl der Gruppen bei Svedberg:

Erste Zahl	Zweite Zahl							
	0	1	2	3	4	5	6	7
0	45	35	$\boxed{19}$	7	5	9		
1	40	55	40	17	10	1	0	1
2	$\boxed{19}$	42	35	24	6	2	1	
3	6	23	22	13	5	0		
4	2	8	10	4	6	2		
5	0	1	2	2	0	0		
6								

Es sollten also die Zahlen, welche symmetrisch zur Diagonale liegen, einander gleich sein.

Im allgemeinen ist dies annähernd der Fall, soweit man es bei der geringen Anzahl von Beobachtungen erwarten kann.

Diffusion der einzelnen Bestandteile, welche über einander superponiert, die Gesamtcurve geben:



$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{Dt}}}^{\frac{h-x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-y^2}\,dy \qquad x<0$$

$$0 < x < h$$

$$\cancel{u_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} + \int_0^{\frac{h-x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-y^2}\,dy \right\}}$$

$$x > h$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-h}{2\sqrt{Dt}}}^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-y^2}\,dy$$

$$\cancel{u = \int_0^h u_3\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}\,d\xi \;\frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}}$$

$$\cancel{x>h}$$

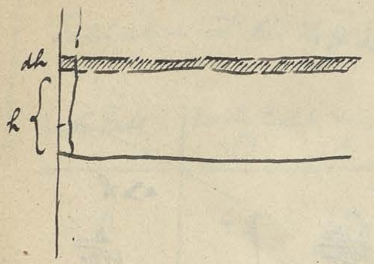
$$u = \int_{-\infty}^{0} u_1\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}\,d\xi + \int_h^x u_3\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}\,d\xi + \int_x^\infty u_3\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}\,d\xi$$

Verschiedene Möglichkeiten:

Ein Teilchen kann zur Zeit	0	1	2
sein: in	h	h	h
	h	h	0
	h	0	h
	0	h	h
	h	0	0
	0	h	0
	0	0	h
	0	0	0

und Wahrscheinlichkeit jeder derartigen Kombination lässt sich berechnen

Kann man bei modifizierter Brown'schen Bewegung die Erwartungszeit definieren?



Wahrsch., dass zur Zeit 0 die Entfernung h..dh existiert:

$$\sqrt{\frac{\beta}{2D}}\; e^{-\frac{\beta h^2}{2D}}\, dh$$

Wahrsch., dass sie nicht existiert: $\left[1-\sqrt{\frac{\beta}{2D}}\; e^{-\frac{\beta h^2}{2D}}\, dh\right]$

D. Falls zur Zeit 0 alle Entfernungen, mit Ausnahme von h...dh, Wahrsch. dass zur Zeit t Entfernung h... h+dh stattfindet:

$$\underbrace{\frac{\beta}{2D\sqrt{2\pi(1-e^{-2\beta t})}}\int_{-\infty}^{h} e^{-\frac{\beta x^2}{2D}}dx\; e^{-\frac{\beta(h-xe^{-\beta t})^2}{2D(1-e^{-2\beta t})}} + \int_{h+dh}^{\infty}}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} - \int_{h}^{h+dh} \quad = 1-\frac{\beta}{2D\sqrt{2\pi(1-e^{-2\beta t})}}\, e^{-\frac{\beta h^2}{2D}\left[1+\frac{(1-e^{-\beta t})^2}{1-e^{-2\beta t}}\right]} dh$$

$$= 1-\frac{\beta}{2D\sqrt{2\pi(1-e^{-2\beta t})}}\, e^{-\frac{\beta h^2}{2D}\frac{2(1-e^{-\beta t})}{1-e^{-2\beta t}}} dh$$

$$\sim$$

$$=\frac{\beta}{2D\sqrt{2\pi(\ldots)}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\int_{h}^{h+dh} e^{-\frac{\beta x^2}{2D}\cdots}\, d\xi -$$

$$-\frac{\beta}{2D\sqrt{2\pi(1-e^{-2\beta t})}}\int_{x=h}^{h+dh} dx\int_{\xi=h}^{h+dh} e^{-\frac{\beta x^2}{2D}-\frac{\beta(\xi-xe^{-\beta t})^2}{2D(1-e^{-2\beta t})}}\, d\xi$$

$$\iint e^{-\overbrace{\frac{\beta}{2D(1-e^{-2\beta t})}}^{\alpha}(x^2-2x\xi e^{-\beta t}+\xi^2)}\,dx\,d\xi$$

$$W = \cancel{1}-\alpha\sqrt{\frac{1-e^{-2\beta t}}{2\pi}}\iint_{h}^{h+dh} e^{-\alpha(x^2-2x\xi e^{-\beta t}+\xi^2)}\,dx\,d\xi$$

$$= \cancel{1}-\sqrt{\frac{1-e^{-2\beta t}}{2\pi}}\iint_{h\sqrt{\alpha}}^{(h+dh)\sqrt{\alpha}} e^{-x^2+2x\xi e^{-\beta t}\cancel{+}\xi^2}\,dx\,d\xi$$

$$= \cancel{1}\sqrt{\frac{1-e^{-2\beta t}}{2\pi}}\int_{h\sqrt{\alpha}}^{(h+dh)\sqrt{\alpha}} dx\,.\,e^{-x^2+2xhe^{-\beta t}\sqrt{\alpha}-h^2\alpha}\,dh\sqrt{\alpha}$$

$$= \cancel{1}-\sqrt{\frac{1-e^{-2\beta t}}{2\pi}}\,e^{-2h^2\alpha+2h^2\alpha e^{-\beta t}}(dh)^2\cdot\alpha = 1-\sqrt{\frac{1-e^{-2\beta t}}{2\pi}}\,e^{-2h^2\alpha(1-e^{-\beta t})}(dh)^2\alpha$$

$$= \cancel{1}-\sqrt{\frac{1-e^{-2\beta t}}{2\pi}}\,e^{-\frac{\beta}{D}h^2\cdot\frac{1-e^{-\beta t}}{1-e^{-2\beta t}}}(dh)^2\cdot\alpha \quad \cancel{= 1-\sqrt{\frac{1-e^{-2\beta t}}{2\pi}}\,e^{-\frac{\beta}{D}h^2}(dh)^2}$$

$$= \cancel{1}-\sqrt{\frac{1-e^{-2\beta t}}{2\pi}}\,e^{-\frac{\beta}{D}h^2\frac{1}{1+e^{-\beta t}}}(dh)^2\cdot\alpha$$

$$= \sqrt{\frac{1-e^{-2\beta t}}{2\pi}}\int_{h\sqrt{\alpha}}^{(h+dh)\sqrt{\alpha}} d\xi\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2x\xi\cancel{+}\xi^2}\,dx - \Big)$$

$$= \sqrt{1-e^{-2\beta t}}\,e^{-\alpha h^2}\,dh\sqrt{\alpha}\left[1-\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\,e^{-2\alpha h^2(1-e^{-\beta t})}\,dh\right]$$

Versuch:

Für kurze Zeiten t ist hier h = ∞ und also $W = 0$

Wahrsch., dass das Teilchen zur Zeit t nicht in der Entfernung h…h+dh ist, wird betragen:

$$\left[1-\sqrt{\frac{1-e^{-2\beta t}}{\cancel{\pi}}}\;e^{-\alpha h^2}\,dh\,\sqrt{\alpha}\right]$$

also Wahrsch., dass weder zur Zeit τ_0 noch τ_1 noch τ_2 ….. $= \boxed{W}$

$$\log W = \sum{}' \log\left[1-\sqrt{1-e^{-2\beta\tau_n}}\;e^{-\alpha_n h^2}\,dh\,\sqrt{\alpha_n}\right]$$

$$= -\sum_n \sqrt{1-e^{-2\beta\tau_n}}\;e^{-\alpha_n h^2}\,dh\,\sqrt{\alpha_n}$$

Der Wert (Dieser Summe hängt aber offenbar vollständig ab von der Anzahl und Grösse der Intervalle τ. In Wirklichkeit dürfen sie nicht unter eine gewisse Grenze gehen, da die Formeln für Br. B. ungültig werden für zu kurze τ und dies scheint hier wesentlich mitzuspielen.

Daher wird auch der Begriff der ~~[illegible]~~ „Erwartungszeit" für Br. B. nicht ohne weiteres definierbar sein.

Eigentlich sollte man die allgemeine Wiederkehrzeit definieren als

$$T = \tau\;\cancel{N_1 + (1+2)N_2 + (1+2+3)N_3 + \cdots}$$

$$1 - P_n(n) = \frac{\tau}{T}$$

$$T = \tau\,\frac{1}{1-P_n(n)}$$

Dabei ist: $N_1 + N_2 + N_3 + \cdots = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots$

also ist auch tatsächlich:

$$\Theta = \frac{T}{W(n)} \quad \text{oder genauer:} \quad \Theta = T\left[\frac{1}{W(n)} - 1\right]$$

↓ mittlere Dauer d. Zustandes n

$$1-\Phi = (1-P)\,\frac{W}{1-W} \qquad = \frac{1}{1-\Phi} = \frac{1}{1-P}\,\frac{1-W}{W}$$

$$\boxed{\Phi = 1 - \frac{1-P}{1-W}\,W} = \frac{1-2W+PW}{1-W}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\xi}{2\sqrt{Dt}}}^{\frac{h-\xi}{2\sqrt{Dt}}} e^{-y^2} dy \qquad -\infty<\xi<0 \qquad \dots$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\xi-h}{2\sqrt{Dt}}}^{\frac{\xi}{2\sqrt{Dt}}} e^{-y^2} dy \qquad 0<\xi<\infty$$

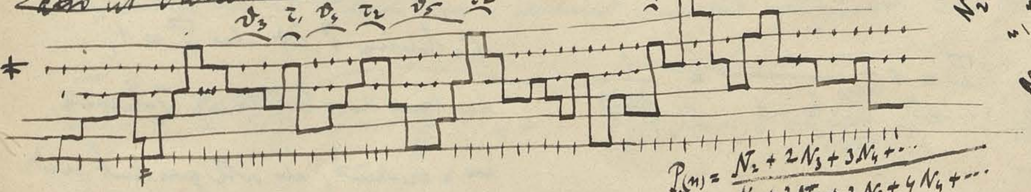
$$u = \int_{-\infty}^{0} u_1\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi + \int_h^x u_3 \dots + \int_x^\infty u_3 \dots \qquad x>h$$

Aus Teilchenzahl lässt sich die ~~Stat~~ Erwartungszeit für intermittierende Beobachtung ganz genau bestimmen.

Möglich sind alle Anfangszahlen n gemäß Formel $W(n) = \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}$

Wahrsch., dass Zahl m nach k Intervallen kommt, ist $W(n,m)_{k\tau}$

~~also ist Mittelwert der Zeit~~ k:



N_2 = Anzahl der Fälle, wo gerade 2 aufeinanderfolgende n, nicht mehr und nicht weniger!

N_3 = Anzahl d. F. wo gerade 3

$$P_n(n) = \frac{N_2 + 2N_3 + 3N_4 + \dots}{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + 4N_4 + \dots}$$

$$W(n) = \frac{N_1\tau_1 + N_2\tau_2 + N_3\tau_3 + \dots}{M_1\vartheta_1 + M_2\vartheta_2 + \dots + N_1\tau_1 + N_2\tau_2 + \dots} = \frac{N_1 + 2N_2 + 3N_3}{M_1 + 2M_2 + 3M_3 + \dots + N_1 + 2N_2 + \dots}$$

$$\text{Erwartungszeit} = \cancel{M_1\vartheta_1 + M_2} = \tau \frac{M_1 + (1+2)M_2 + (1+2+3)M_3 + (1+2+3+4)M_4 + \dots}{M_1 + 2M_2 + 3M_3 + \dots \left[\cancel{+N_1 + 2N_2 + \dots\ 2}\right]}$$

Wiederkehrzeit lässt sich ~~[illegible]~~ definieren als:

$$\Theta = \cancel{\vartheta}\,\tau \frac{M_1 + 2M_2 + 3M_3 + \dots}{M_1 + M_2 + M_3 + \dots}$$

Mittlere Dauer des Zustandes n:

$$T = \tau \frac{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \dots}{N_1 + N_2 + N_3 \dots}$$

oder wenn alle Ausgangspunkte:

$$T = \tau \frac{N_1 + (1+2)N_2 + (1+2+3)N_3 + \dots}{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \dots}$$

Also:

$$P_n(\pm 0) = \frac{N_2 + 2N_3 + 3N_4 + \cdots}{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + 4N_4 + \cdots} = \frac{N_2 + 2N_3 + 3N_4 + \cdots}{(N_2 + 2N_3 + 3N_4 + \cdots) + (N_1 + N_2 + N_3 + \cdots)}$$

Mittlere Dauer des Zustandes n:

$$T = \frac{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + 4N_4 + \cdots}{N_1 + N_2 + N_3 + \cdots} \qquad T - 1 = \frac{N_2 + 2N_3 + 3N_4 + \cdots}{N_1 + N_2 + N_3 + \cdots}$$

Also

$$\cancel{\frac{1}{P(n,n)} = 1 + \frac{1}{T}}$$

$$\cancel{T = \frac{1}{1 - \frac{1}{P(n,n)}} = \frac{P(n,n)}{P(n,n)}}$$

$$\frac{1}{P_n(\pm 0)} = 1 + \frac{1}{T-1} = \frac{T}{T-1}$$

$$\frac{1}{P} - 1 = \frac{1}{T-1}$$

$$T = 1 + \frac{1}{\frac{1}{P} - 1} = \frac{1}{1-P}$$

für kleine P ist also $T = 1$,
da dann das betreffende Intervall,
wo n erscheint, als voll gerechnet wird.

Falls man also in analoger Weise ~~$\varphi(0)$~~ $\varphi_n(0)$ definiert als Wahrsch., dass die Zahl n nicht erscheint, wenn die Zahl n nicht vorhergegangen ist, so erhält man die Wiederkehrzeit:

$$\Theta = \frac{1}{1-\varphi} \qquad \varphi_n(0) = \frac{M_2 + 2M_3 + 3M_4 + \cdots}{M_1 + 2M_2 + 3M_3 + 4M_4 + \cdots}$$

Berechnung von φ :

$1-\varphi$ = Wahrsch., dass die Zahl n erscheint, obwohl n nicht vorhergegangen ist

$$= \frac{\sum\left[\underbrace{P(0,n) + P(1,n) + P(2,n) + \cdots P(n-1,n) + P(n+1,n) + \cdots}_{S}\right]^{?}}{1-e^{-\nu}\frac{\nu^n}{n!}}$$

~~nicht zu multiplizieren mit relativen Wahrsch., dass es eine 0, 1, 2 ... ist~~ schon darin enthalten!

~~Falls n nicht vorhergegangen ist, wie gross ist die Wahrsch. dass die vorangehende Zahl eine 0, 1, 2 ... m gross ist ?~~

$$\frac{\frac{e^{-\nu}\nu^m}{m!}}{1-\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}$$

$$1-\varphi = \left[1-\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}\right]^{-1} e^{-\nu}\overbrace{\left\{\frac{\nu^0}{0!}P(0,n) + \frac{\nu^1}{1!}P(1,n) + \frac{\nu^2}{2!}P(2,n) + \cdots \frac{\nu^{n-1}}{(n-1)!}P(n-1,n) + \cdots\right\}}^{S}$$

Nun beträgt aber die Wahrsch., dass n erscheint, wenn die vorangehende Zahl beliebig war:

$$\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} = \cancel{e^{-\nu}}\left\{\overbrace{\cancel{\frac{\nu^0}{0!}}P(0,n) + P(1,n) + \cdots P(n-1,n) + P(n,n) + P(n+1,n)}\right.$$

also ist:

$$1-\varphi = \frac{S}{1-\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}} = \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} - \frac{P(n,n)}{1-\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}$$

$$1-\varphi = \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}\,\frac{\left[1-P(n,n)\right]}{1-\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}$$

$$\Theta = \frac{1}{\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} - P(n,n)}\cdot\tau$$

Somit: $\Theta = (\tau)\dfrac{1-\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}{\left[1-P(n,n)\right]\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}$

für stark schwankende Zustände und nicht zu kurze Intervalle τ:

$\Theta = \dfrac{\tau}{\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}$ (wie früher bereits abgeleitet)

~~Hingegen folgendes:~~

~~$P(n,n)=$~~

$\nu=1{\cdot}55$

		empirische Wied.(m)	$e^{-\nu}\frac{\nu^n}{n!}$	berechnet nach Formel Wiederkehrzeit X
0	$P(0,0)$ ber. = 0·321	4·48	0·212	5·54
1	$P(1,1)$ = 0·354	3·09	0·329	3·16
2	$P(2,2)$ = 0·278	3·98	0·255	4·05
3	$P(3,3)$ = 0·185	7·13	0·132	8·09
4	$P(4,4)$ = 0·111	16·0	0·051	20·9
5	$P(5,5)$ = 0·062	118	0·016	66·3

4

Angenäherte Überlegung für kontinuierliche Beobachtung (recapituliert)

Sobald lim $\tau=0$ gemacht wird, :

$$\lim_{\tau=0} \frac{}{} \quad \lim_{\tau=0} P = \frac{2\sqrt{D\tau}}{h\sqrt{\pi}}$$

$$\lim_{t=0} P(n,n) = \cancel{e^{-\nu P}\frac{P^n(\nu P)^n}{n!}} = \cancel{\frac{\nu P^n}{n!}}$$

$$= \lim e^{-\nu P}(1-P)^n = 1-(\nu+n)P = 1-\frac{2(\nu+n)\sqrt{D\tau}}{h\sqrt{\pi}}$$

$$\Theta = \frac{1-e^{-\nu}\frac{\nu^n}{n!}}{e^{-\nu}\frac{\nu^n}{n!}\cdot\frac{2(\nu+n)\sqrt{D\tau}}{h\sqrt{\pi}}}\cdot\tau = \sqrt{\tau}\cdots$$

das $\lim_{\tau=0}\Theta=0$ was selbstverständlich, da bei Wechsel von n auf $(n+1)$ unendlich ~~rasches~~ häufiges Schwanken erfolgt

Angenäherte Schätzung der Dauer des ~~[illegible]~~ Zustandes n:

Sobald $\Delta_n^2=1$

./.

Falls die vorangehende Zahl beliebig ist, beträgt die Wahrsch., dass die nachfolgende n ist:

$$\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} = e^{-\nu}\left\{\frac{\nu^0}{0!}P_0(+n) + \frac{\nu^1}{1!}P_1(+(n-1)) + \frac{\nu^2}{2!}P_2(+(n-2)) \cdots + \frac{\nu^{n-1}}{(n-1)!}P_{n-1}(+1) + \frac{\nu^n}{n!}P_n(0) + \frac{\nu^{n+1}}{(n+1)!}P_{n+1}(-1), \right.$$

~~Die~~ φ setzt sich zusammen aus Alternativfällen und zwar ist entweder:

= ~~Wahrsch.~~ dass die erste Zahl eine 0 war und dass darauf irgend eine andere Zahl als n folgt

oder ebenso " " 1 " " " "

oder " 2 " " u. s. w.

(der keine n!)

φ ist die Summe aller dieser Wahrsch., also:

$$\varphi\left(1-\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}\right) = e^{-\nu}\left\{\frac{\nu^0}{0!}\left[1-P_0(+n)\right] + \frac{\nu^1}{1!}\left[1-P_1(+(n-1))\right] + \cdots \frac{\nu^{n-1}}{(n-1)!}\left[1-P_{n-1}(+1)\right] + \frac{\nu^{n+1}}{(n+1)!}\left[1-P_{n+1}(-1)\right] \cdots \right\}$$

$$= 1 - \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} - \underbrace{e^{-\nu}\left\{\frac{\nu^0}{0!}P_0(+n) + \frac{\nu^1}{1!}P_1(+n-1) + \cdots \frac{\nu^{n-1}}{(n-1)!}P_{n-1}(+1) + \frac{\nu^{n+1}}{(n+1)!}P_{n+1}(-1) \cdots \right\}}_{\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}\left[1-P_n(0)\right]}$$

$$= 1 - 2\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} + \underbrace{\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}P_n(0)}_{\cancel{P(n,n)}} \qquad \varphi = \frac{1 - 2\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} + P_n(0)\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}{1-\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}$$

~~nicht möglich weil für jenen P(n,n) ...~~

Also: ~~$\Theta = \frac{1}{2\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} - P(n,n)}$ etc~~

$$1-\varphi = \frac{\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} - P_n(0)}{1-\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}$$

$$\Theta = \frac{1-\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}{\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}\left[1-P_n(0)\right]}$$

$\Theta = T\left[\frac{1}{W_{(n)}}-1\right]$

/.-/.≤

stimmt überein mit allgemeiner Formel)

$$P^2 + \frac{n+\nu}{(n-\nu)^2-n} P = \frac{1}{(n-\nu)^2-n}$$

$$P = \frac{-(n+\nu) \pm \sqrt{4[(n-\nu)^2-n] + (n+\nu)^2}}{2[(n-\nu)^2-n]} = 1 - \frac{2\sqrt{D\tau}}{h\sqrt{\pi}}$$

Da $n=\nu$: $$P = \frac{-2\nu + 2\sqrt{\nu^2-\nu}}{-2\nu} = 1-\sqrt{1-\frac{1}{\nu}} \neq \frac{1}{2\nu}$$

~~Da $n \gg \nu$: $P \approx$ [illegible]~~

~~$n = \nu(1+\delta)$~~

$$\frac{2\sqrt{D\tau}}{h\sqrt{\pi}} = 1 + \frac{(n+\nu) - \sqrt{(n+\nu)^2 + 4[(n-\nu)^2-n]}}{2[(n-\nu)^2-n]} = \frac{2(n-\nu)^2 - (n-\nu) - \sqrt{\cdots\cdots}}{2[\cdots\cdots]}$$

$$= \frac{2\nu^2\delta^2 - \nu\delta - \sqrt{\nu^2(2+\delta)^2 + 4[\nu^2\delta^2 - \nu(1+\delta)]}}{2[\nu^2\delta^2 - \nu(1+\delta)]}$$

$$= \frac{2\nu^2\delta^2 - \nu\delta - \sqrt{5\nu^2\delta^2 + 4\nu^2\delta + 4\nu^2 - 4\nu(1+\delta)}}{2[\nu^2\delta^2 - \nu - \nu\delta]}$$

$$=$$

$P^2[(n-1)^2-n] + (n+1)P$

$n=0$ $P^2(1'55)^2 + P\,1'55 = 1$ | $P=0'40$ $P^2(3'1)^2 + 2P.3'1 = 4$ $[3'1 . P+1]^2 = 5$

$P = \frac{\sqrt{5}-1}{3'1}$

$n=1$ $P^2[0'55^2-1] + P.2'55 = 1$ | $P=0'444$ ~~also 0'327~~ | $P^2[1'1^2-4] + 2P.5'1 = 4$ $P^2.2'79 - P.10'2 = -4$

$n=2$ $P^2[0'45^2-2] + P.3'55 = 1$ | $P=0'341$

$n=3$ $P^2[1'45^2-3] + P.4'55 = 1$

$n=4$ $P^2[2'45^2-4] + P.8'55 = 1$

$n=5$ $P^2[3'45^2-5] + P.6'55 = 1$ | $P=0'134$

Daraus P berechnen, hieraus β und daraus τ (durch Vergleich mit den bekannten P_0 und β_0 für $\tau = \frac{80}{39}$)

und damit wird dann $W = \frac{\tau}{e^{-\nu}\frac{\nu^n}{n!}}$

Mittlere Erwartungszeit der Dauer des Zustandes n:

$$T = \frac{N_1 + (1+2) N_2 + (1+2+3) N_3 + \dots}{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \dots} \tau$$

$$= \frac{~~[N_1+N_2+N_3+\dots]~~ \; [N_1 + 2N_2 + 3N_3 + 4N_4 + \dots] + [N_2 + 2N_3 + 3N_4 + \dots] + [N_3 + 2N_4 + 3N_5 + \dots]}{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \dots}$$

dabei bedeutet $P(n,n)$ = relative Häufigkeit von Dubletten (hintereinanderfallende n Fälle)
$P(n\,n\,n)$ = relative Häufigkeit von Triplets hintereinanderfallende n Fälle u.s.w.

$$\frac{T}{\tau} = 1 + \underbrace{\frac{N_2 + 2N_3 + 3N_4 + \dots}{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \dots}}_{P(n,n)} + \underbrace{\frac{N_3 + 2N_4 + 3N_5 + \dots}{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \dots}}_{P(n,n,n)} + \underbrace{\frac{N_4 + 2N_5 + 3N_6 + \dots}{N_1 + 2N_2 + 3N_3}}_{P(n,n,n,n)}$$

also grösser als 1, da die Mindestdauer <u>ein</u> Intervall beträgt

---

Analog wäre Erwartungszeit „der Dauer des Zustandes (nicht n)" oder Erwartungszeit „für das Eintreffen des Zustandes n":

$$T = 1 + \varphi(n,n) + \varphi(n,n,n) + \varphi(n\,n\,n\,n) + \dots$$

Bei kontinuierlicher Beobachtung

$$\lim \frac{T}{~~\tau~~} = ~~\tau~~ \lim_{t=0} \left\{ \left[P(n,n) + P(n\,n\,n) + P(n\,n\,n\,n) - - \right] t \right\}$$

Gibt es überhaupt bestimmte Grenzwerte: $\lim_{t=0} \left\{ \left[\varphi(n,n) + \varphi(n\,n\,n) + \dots \right] t \right\}$? ./.

Im Falle $P = 1$ (unabhängige Veränderungen):

$$\frac{T_z}{\tau} = 1 + \beta + \beta^2 + \dots = \frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{1 - \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}} = \frac{T_w}{\tau} \text{(Wiederkehrzeit)}$$

begreiflich, da $T_w = 1 + \frac{N_2 + N_3 + N_4 \dots}{N_1 + N_2 + N_3 \dots} + \frac{N_3 + N_4 + N_5 \dots}{N_1 + N_2 + N_3 \dots} + \dots = 1 + \beta + \beta^2 + \dots =$

Wenn mit m eine Zahl, die nicht n ist, bezeichnet wird, so ist

$P(n,n) + P(n,m) = 1$ $\qquad\qquad$ $1-\varphi(n,n) = ?$

$$e^{-\nu}\left\{\frac{\nu^n}{n!}P(n,n) + \sum\frac{\nu^m}{m!}P(m,n)\right\} = e^{-\nu}\frac{\nu^n}{n!}$$

$$1-\varphi(nn) = \frac{e^{-\nu}\sum\frac{\nu^m}{n!}P(m,n)}{1-e^{-\nu}\frac{\nu^n}{n!}} = \cancel{\frac{1-e^{-\nu}\frac{\nu^n}{n!}P(n,n)}{1-e^{-\nu}\frac{\nu^n}{n!}}} \quad \frac{e^{-\nu}\frac{\nu^n}{n!}\left[1-P(n,n)\right]}{1-e^{-\nu}\frac{\nu^n}{n!}}$$

Ebenso:

$1-\varphi(n\,n\,n)$ = Wahrsch., dass n ~~[illegible]~~ erscheint, wenn zwei (Nicht n) vorhergegangen sind

$$= \sum_k{}'\sum_m{}' e^{-\nu}\frac{\nu^m}{m!}\,\{P(m,k,n)$$

Andrerseits ist

$$e^{-\nu}\frac{\nu^n}{n!}\left[\sum_k{}'P(n,k,n) + P(n,n,n)\right] + e^{-\nu}\sum_m{}'\sum_k{}'\frac{\nu^m}{m!}P(m,k,n) + e^{-\nu}\sum_m{}'\frac{\nu^m}{m!}P(m,n,n) = e^{-\nu}\frac{\nu^n}{n!}$$

Dagegen würde W. $\frac{P(n\,n\,n\,n)}{P(n\,n\,n)}$ ~~die Wahrsch. angeben, dass auf 3 n nacheinander n folgt~~,

→ ~~[illegible]~~ den Bruchteil jener Triplets angeben, welche noch von einem vierten n gefolgt werden, also = Wahrsch. dass wenn schon 3 n nacheinander gefolgt sind, noch ein viertes n kommt.

$\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} = \frac{e^{-\nu}\cdot\nu^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi}}$ $\qquad$ $e^{-\nu}\left(\frac{\nu e}{n}\right)^n\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$ $\qquad$ $\frac{1{\cdot}55.\ 2{\cdot}781}{17} = 0{\cdot}25 = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4^{17}} = \frac{1}{2^{34}}$ $\quad$ $\left(\frac{1}{1024}\right)^{34}$ $\quad$ 86.650

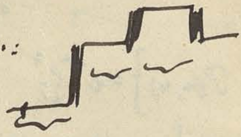
$\frac{1}{10^{10}}\,\frac{1}{10}$

$\frac{10^{11}}{2000} = 5.10^8\,\underline{d.}$

$= 2.10^6$

Betreffs Einwände für Wiederk. und Erw. Zeit bei wertkontinuierlicher Kurve.

Stellen wir uns die wirkliche Kurve so dar:



die Anzahl N_n ändert sich nicht bei Verkleinerung des τ und das n rückt hinauf so dass

und nehmen wir an die Stücke ~ wären ungefähr gleich lang

$$T_W = \frac{(N_1) + nN_n}{(N_1) + N_n}\,\tau$$

bei Abnahme von τ bleibt $n\tau$ constant $= c$ und N_n unverändert, aber dafür kommen von einem gewissen t an immer mehr N_1

werden schließlich
$$\lim T_W = \lim_{N_1=\infty} \frac{(N_1\tau) + cN_n}{N_1 + N_n} = 0$$

$$T_E = \frac{(N_1) + \frac{n^2}{2}N_n}{(N_1) + nN_n}\,\tau = \lim \frac{(N_1\tau^2) + \frac{c^2}{2}N_n}{(N_1\tau) + cN_n} \neq \frac{c}{2},$$ falls $N_1\tau$ klein bleibt gegen cN_n

es muss aber $N_1\tau$ immer viel kleiner sein als die ganze Zeit, also scheint alles wohl so zu sein

---

Erwartungszeit für den Fall, dass $P=1$ gesetzt werden kann

relat. Anzahl der Doubletten „(nicht n)“: $1-\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} = \varphi(n\,n)$

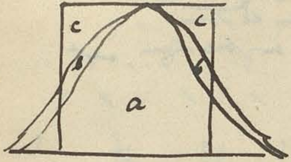
$$\varphi(n\,n\,n) = \left(1-\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}\right)^2 \text{ etc.}$$

$$T = 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3\ldots\ldots = \frac{\tau}{1-\alpha} = \frac{\tau}{1-\left(1-\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}\right)} = \frac{\tau}{\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}$$ also identisch mit „Wiederkehrzeit“!

Das stimmt dann auch mit der Rechnung $W(n) = \frac{\tau}{T}$

Drei Gruppen

Die rote und ~~g~~ blaue Fläche entspricht der ursprünglichen Zahl; ~~[illegible]~~ beim dritten Zeitpunkt ist etwas rot (von 2) nach aussen gegangen aber auch etwas blau nach innen und die resultierende Menge ist so gross als ob von allem Anfang die ~~D~~ (rot + blaue) Menge diffundiert wäre. Also sind im Zeitmomente (3) drei von einander unabhängige Ereignisse:



die Anzahlen in a, b, c

Es ist die Summe der Wahrsch. zu bilden für sämmtliche Kombinationen ~~d~~ jener drei Anzahlen, welche das geforderte zu ergeben

$a = 1 - P_2$

Berechnung von b:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi D t_2}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{x=0}^{\xi}\left\{\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt_1}}} e^{-y^2}dy + \int_0^{\frac{h-x}{2\sqrt{Dt_1}}} e^{-y^2}dy\right\} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt_2}}\, dx + \int_{x=\xi}^{h}$$

$$\frac{\xi - x}{2\sqrt{Dt_2}} = z \qquad \frac{x-\xi}{2\sqrt{Dt_1}} = z$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\xi}{2\sqrt{Dt_2}}} e^{-z^2}dz\left[\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt_1}}} e^{-y^2}dy + \int_0^{\frac{h-x}{2\sqrt{Dt_1}}} e^{-y^2}dy\right] + \int_0^{\frac{h-\xi}{2\sqrt{Dt_2}}} e^{-z^2}dz\left[\cdot \cdots\right]\right\}$$

~~[illegible]~~ Wenn man bildet $\frac{d}{dx}\left[\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-y^2}dy + \int_0^{\frac{h-x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-z^2}dz\right]^2 = \frac{2}{2\sqrt{Dt}}\left[\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} + \int_0^{\frac{h-x}{2\sqrt{Dt}}}\right]\left[e^{-\frac{x^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(h-x)^2}{4Dt}}\right]$

$c = 1 - [1 - P_2] - b = P_2 - b$

vgl. ~~[illegible]~~ $W(1,2,1) = W(1) \cdot W(0,2) \Big\{$ à $W(0)$

Man muss berechnen, wie wahrscheinlich es ist, dass m Teilchen innerhalb des zweiten Intervalles austreten.

Falls man weiss, dass innerhalb des ersten Intervalles (p rote Teilchen von den ursprünglich anwesenden n Teilchen) ausgetreten sind:

der weitere Austritt roter Teilchen ist unabhängig davon (weil jedes Teilchen unabhängig von den übrigen) und berechnet sich (für das zweite Intervall) aus derselben Formel für P_2. ~~(falsch!)~~ unter Annahme, dass am Anfang desselben (n−p) Teilchen da waren.

Dagegen ist der Austritt schwarzer Teilchen nach andern Formeln zu berechnen, mit Berücksichtigung der wahrscheinlichen Verteilung derselben

Bezüglich des Eintrittes: die Anzahl der ausgetretenen roten T. | beeinflusst die Wahrscheinlichkeit des Eintrittes neuer Teilchen! Es können ~~[illegible]~~ nämlich rote während des zweiten Intervalles wieder zurückkommen.

[Falls im ersten Intervall sämmtliche p roten Teilchen ausgetreten sind, können im zweiten nicht noch weitere rote austreten, weil keine mehr da sind!]

$$\cos\varphi - \lg\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} = \cancel{1-\cos\alpha}$$

$$= \cos\alpha - \lg\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= -\int_1^0 \frac{x^2}{1-x^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{1-x^2}-1\right)dx$$

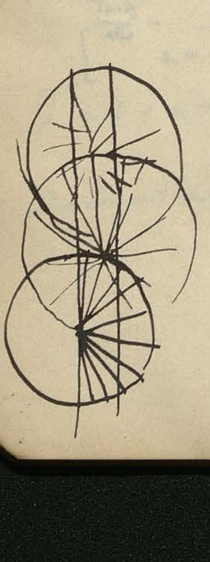
$$= \frac{1}{2}\lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x$$

$$= \lg\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) - \cos\varphi$$

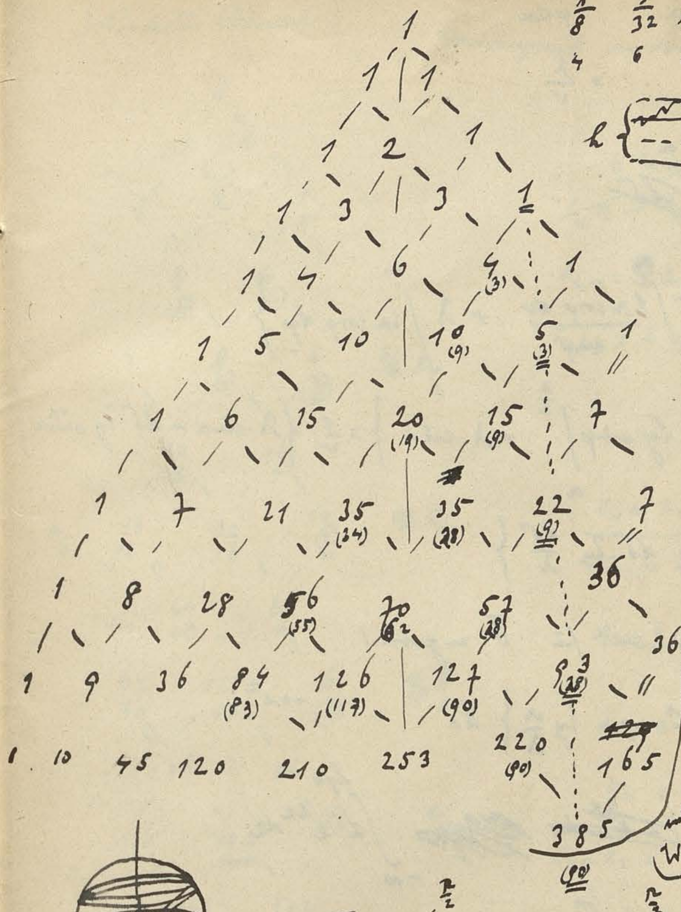
$$\tau = \frac{d\sigma}{v}\left[1 - \lg\left(\frac{\delta}{2\lambda}\right)\right]$$

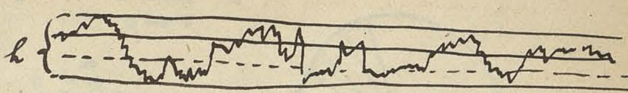
$$+ \cancel{[illegible]}(1-\cos\alpha)\cdot\frac{\lambda}{v}$$

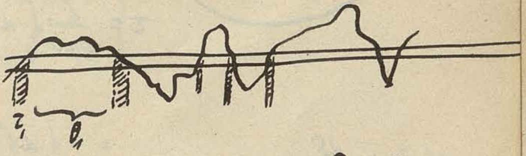
$$=$$



$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{128}$	$\frac{28}{512}$	$\frac{90}{2048}$
4	6	8	10	12







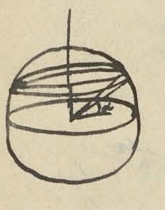
$\tau_1 = \frac{d\delta}{v\,\mathrm{tg}\,\alpha_1}$ $\qquad W(\delta)\,d\delta = \frac{d\delta}{h} = \frac{\Sigma\tau_k}{\Sigma\theta_k + \Sigma\tau_k}$

$$\Sigma\theta_k = \frac{d\delta}{h}\Sigma\tau_k = \frac{d\delta}{h}n.\bar{\tau}_k$$

$$\bar{\theta} = \frac{\Sigma\theta_k}{n} = \cancel{\frac{d\delta}{h}\bar{\tau}_k}\left[\frac{h}{d\delta}-1\right]\bar{\tau}_k$$

$$= \frac{h}{v}\overline{\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha_1}\right)}$$

entspricht der Wiederkehrzeit



$$\overline{\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\pi\cos\alpha\,d\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\,d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}\;d(\sin\alpha)}{\sin\alpha}$$

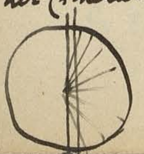
$$= \int\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}\,d(\cos\alpha)$$

$$= \int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}\,dx}{x} = \infty$$

das gibt eine unendlich lange Zeit

es zeigt sich also dass man die mittlere Verweilungszeit τ nicht richtig berechnen kann, wenn man nicht die Bahnkrümmung (resp. Zickzacklinien) berücksichtigt!

Man kann nun so vorgehen, dass man die Schichte h sehr dünn wählt im Vergleich mit der (scheinbaren) mittleren Weglänge; dann handelt es sich um eine Mittelbildung

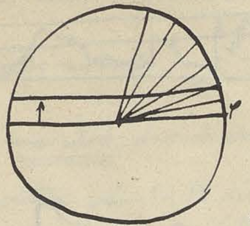


zwar sind dabei die rückläufigen Stücke vernachlässigt

aber dieselben werden verschwindend bei h = 0

$$\varphi > \alpha \qquad \varphi < \alpha$$

$$\tau = \frac{d\delta}{v \sin\varphi} \qquad = \frac{\lambda}{v}$$



$$\cancel{\bar{\tau} = \frac{1}{2\pi v}\int_0^\alpha d\delta}$$

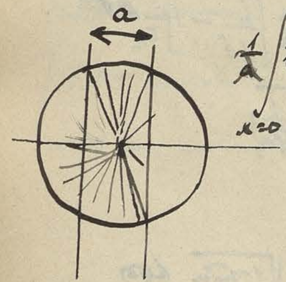
$$\tau = \frac{1}{2\pi v}\left\{ d\delta \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\pi \cos\varphi \, d\varphi}{\sin\varphi} + \lambda \int_0^\alpha 2\pi \cos\varphi \, d\varphi \right\}$$

$\sin\alpha \neq \frac{d\delta}{\lambda}$

$$= \frac{1}{v}\left\{ d\delta \; \lg \sin\varphi \Big|_\alpha^{\frac{\pi}{2}} + \lambda \sin\alpha \right\} = \frac{1}{v}\left\{ \lambda \sin\alpha - d\delta \lg \sin\alpha \right\}$$

$$= \frac{1}{v}\left\{ d\delta - d\delta \lg \frac{d\delta}{\lambda} \right\}$$

Es scheint also keinen endlichen Grenzwert für $\overline{\theta}$ zu geben!



$$\frac{1}{a}\int_{x=0}^{a} \frac{1}{v}\left\{ a - (a-x) \lg \frac{a-x}{\lambda} - x \lg \frac{x}{\lambda} \right\} dx \qquad x = e^{z}$$

$$\int_0^a x \lg x \, dx = \cancel{\int z e^{2z}} \; \cancel{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{\lg a} z \, e^{2z} dz$$

$$\int_0^a \underbrace{(a-x)}_{=z} \lg (a-x) \, dx = \int_{-\infty}^{\lg a} z \, e^{2z} dz$$

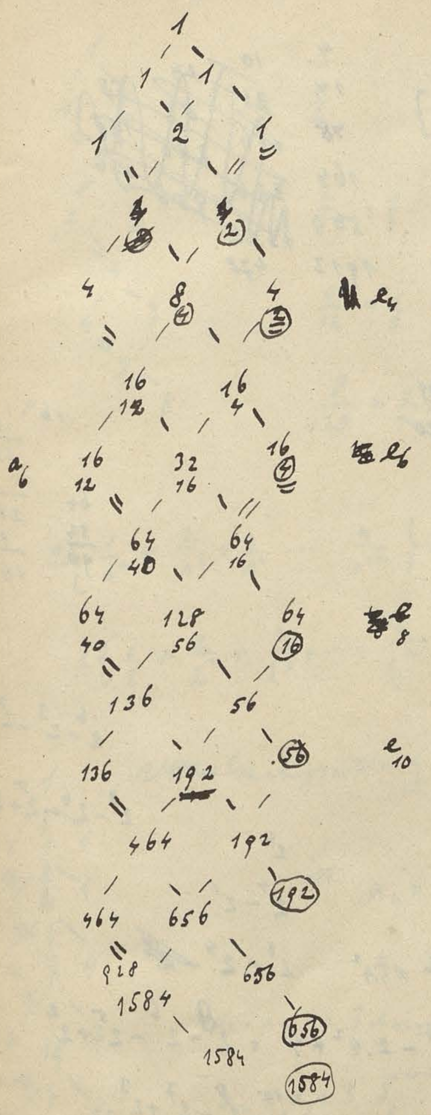
$$\cancel{\frac{e^{2z}}{2} + 2e^{2z} - \frac{z}{2} e^{2z}}$$

$$\int_{-\infty}^{\lg a} z \, e^{2z} dz = e^{2z} \frac{\cdot z}{2} - \int \frac{e^{2z}}{2} dz = e^{2z}\left(\frac{z}{2} - \frac{1}{4}\right) = a^2\left(\frac{\lg a}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\bar{\tau} = \frac{1}{v a}\left\{ a^2 - a^2\left(\lg \frac{a}{\lambda} - \frac{1}{2}\right) \right\} = \cancel{\;} \frac{a}{v}\left\{ \frac{1}{2} - \lg\left(\frac{a}{\lambda}\right) \right\} \left[\underbrace{1 + \frac{a}{2\lambda} + \left(\frac{a}{2\lambda}\right)^2 + \cdots}_{= \frac{1}{1 - \frac{a}{2\lambda}}} \right]$$

$$\cancel{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} x^2 \lg x\right)^{\frac{x^2}{4}} = x \lg x + \frac{x}{2} - \frac{x}{2}}$$

Einfachstes Beispiel



$$C_{n+2} = 2\left[2C_n - C_{n-2}\right]$$

$$C_n = 2\left[2\,C_{n-2} - C_{n-4}\right]$$

$$C_n = 4\,C_{n-2} - 2\,C_{n-4}$$

Erreichungszeit von der Mittellage an die Wand

$$\overset{= c_{n-2}}{\cancel{e_n = 2a_{n-2} + c_{n-2} = 6a_{n-4} + 4c_{n-4}}}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{n-2} &= 2\,a_{n-4} + c_{n-4} \\ c_{n-2} &= 2\,a_{n-4} + 2\,c_{n-4} \end{aligned}\right\}$$

$$\underline{e_n = c_{n-2}}$$

$$c_{n-2} = 2a_{n-4} + 2\,c_{n-4}$$

$$a_{n-4} = 2\,a_{n-6} + c_{n-6}$$

$$c_n = 2a_{n-2} + 2c_{n-2} = 2(a_{n-2} + c_{n-2})$$

$$\underline{a_n = 2\,a_{n-2} + c_{n-2}} = 2a_{n-2} + c_n - a_n$$

$$c_n + a_n = 4\,a_{n-2} + 3\,c_{n-2}$$

$$c_n - a_n = c_{n-2}$$

$$c_n = 2(a_n - a_{n-2})$$

$$a_n = a_{n-2} + \frac{c_n}{2} = 2a_{n-2} + c_{n-2}$$

$$a_{n-2} = \frac{c_n}{2} - C_{n-2}$$

$$a_n = \frac{C_{n+2}}{2} - C_n = C_n - C_{n-2}$$

~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ $\underline{c_{2m} = \alpha_m}$

$\alpha_m = 4\,\alpha_{m-1} - 2\,\alpha_{m-2}$

$= 4\left[~~[illegible]~~ 4\,\alpha_{m-2} - 2\,\alpha_{m-3}\right] - 2$ ~~[illegible]~~ $\overbrace{\left[4\,\alpha_{m-3} - 2\,\alpha_{m-4}\right]}^{\alpha_{m-2}}$

$= 14.\alpha_{m-2} - 8.\alpha_{m-3}$

$= 14\left[4\,\alpha_{m-3} - 2\,\alpha_{m-4}\right] - 8.\,\alpha_{m-3}$

$\begin{array}{r}56\\ 8\\ \hline\end{array}$

$= 48.\alpha_{m-3} - 28.\alpha_{m-4}$

$= 48\left[4\,\alpha_{m-4} - 2\,\alpha_{m-5}\right] - 28.\alpha_{m-4}$

$\begin{array}{r}192\\ 28\\ \hline\end{array}$

$= 164.\alpha_{m-4} - 96.\alpha_{m-5}$

$\begin{array}{r}656\\ 96\\ \hline\end{array}$

~~[illegible]~~ $= 560.\alpha_{m-5} - 328.\alpha_{m-6}$

$\begin{array}{r}2240\\ 328\\ \hline\end{array}$

$= 1912.\alpha_{m-6}$ ~~[illegible]~~ $1120.\alpha_{m-7}$

1.4 2.2
2.7 2.7
3.16 6.8
4.41 5.41
5.(?).164 7.80

4
14
48
164
560
1912

~~10 34 676 956~~
478

$16^2 = 1$
$\begin{array}{r}156\\ \hline 256\\ 4\\ \hline 260\\ 96\\ \hline 164\end{array}$

$\begin{array}{r}64\\ 32\\ \hline 96\end{array}$

$2^6 - 2^3 - 2^3$

$2^8 - 2^6 - 2^5 + 2^2$

$\begin{array}{ll}4 & 2\end{array}$

~~[illegible]~~ $4.4. - 2 \qquad \| \; 2.4$

$4\left[4.4. - 2\right] - 2.4 \qquad \| \; 2\left[4.4 - 2\right]$

$4\left\{4\left[4.4. - 2\right] - 2.4\right\} - 2\left[4.4 - 2\right]$

$4\left[4\left\{4\left[4.4 - 2\right] - 2.4\right\} - 2.4.4 + 4\right]$

4

$= 4^2 - 2$

$= 4^3 - 4.4 = 3.4^2$

$= 4^4 - 4^3 - 2.4^2 + 4$

$= 3.4^3 -$

2^2

$2^4 - 2^1$

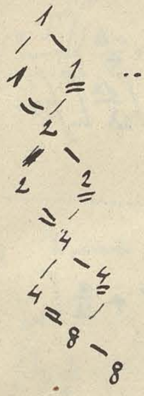
$2^6 - 2^4$ ~~[illegible]~~

$= 2^8 - 2^6 - 2^5 + 2^2$

$2^{10} - 2^8 - 2^7 + 2^3$
$\quad - 2^7 + 2^5$

$= 2^9 + 2^5 + 2^3$

Noch einfacheres Beispiel



$\frac{1}{2}$

$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

$\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$

$\frac{8}{128}=\frac{1}{16}$

Tatsächlich ist

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\quad=1$$

Mittlere Erreichungszeit :

$$2\left(\tfrac{1}{2}\right)+4\left(\tfrac{1}{4}\right)+6\left(\tfrac{1}{8}\right)+8\left(\tfrac{1}{16}\right)+\cdots\quad\frac{2n}{2^n}$$

~~$1+\frac{1}{x}$~~ $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots\frac{1}{x^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{x}{x-1}$

$$-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^4}\cdots-\frac{n}{x^{n+1}}=\frac{d}{dx}\left[\cancel{\frac{1}{1-x}}-1\right]$$

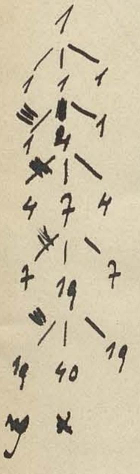
$$=\frac{d}{dx}\left[1+\frac{1}{x-1}\right]$$

$$=-\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$2\left\{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4}\cdots\frac{n}{x^{n+1}}\right\}=\frac{2}{(x-1)^2}$$

$$2\left\{\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots\frac{n}{2^n}\right\}=\frac{4}{(x-1)^2}\Big/_{x=2}\quad=4$$

Mittlere Erreichungszeit $\underline{\underline{=4}}$ <u>endlich !</u>



$$x_n==x_{n-1}+3y_{n-1}$$

$$x_n=x_{n-1}+3x_{n-2}$$

$$x_n-x_{n-1}=3x_{n-2}$$

$$x_n=x_1+3\int_0^{n-2}$$

$$\int_0^n-\int_0^{n-1}=\cancel{0}$$

~~12~~	3.3	11
~~27~~	3.9	26
~~60~~	3.20	59
~~138~~	3.46	137
~~319~~	3.10[illegible]	314

27| $x_2=x_1+3x_0$

$x_3=x_2+3x_1=4x_1+3x_0$

9| $x_4=x_3+3x_2=7x_1+12x_0$

$x_5=x_4+3x_3=19x_1+21x_0$

3| $x_6=x_5+3x_4=40x_1+57x_0$

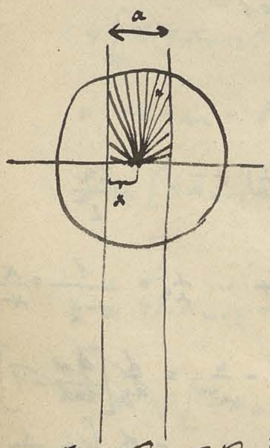
$x_7=x_6+3x_5=97x_1+120x_0$

$\underline{x_8=x_7+3x_6}$ ~~$=268x_1+291x_0$~~
$217x_1+291x_0$

$x_8=x_7$

Ununterbrochene Aufenthaltsdauer in der Schichte a

$$\bar\tau = \frac{1}{2\lambda v}\Big\{2a^2\left(\frac{\lg a}{2}-\frac14\right)+a^2+$$



$$v\bar\tau = \frac1a\int_0^a dx\Bigg[\underbrace{\int_0^\pi\frac{2\pi\lambda^2\sin\varphi\,d\varphi\cdot r}{4\pi\lambda^2}}_{\cancel{\frac{3\ldots}{4\pi\lambda^2}}=} + \int_0^a\frac{dx}{2\lambda}\Big[\int_0^\pi\cdots + \int_0^a\frac{dx}{2\lambda}\Big[\int+\cdots\Big]\Big]\Bigg]$$

$$= \frac1a\Big\{\underbrace{\frac{a^2}{2}\lg\frac{\lambda}{a}+\frac{a^2}{4}}_{b} + \frac{a}{2\lambda}\Big[\frac{a^2}{2}\lg\frac{\lambda}{a}+\frac{a^2}{4}+\frac{a}{2\lambda}\Big[\cdots\Big]\Big]\Big\}$$

$$= \frac ba + \frac{1}{2\lambda}b + \frac{a}{(2\lambda)^2}b + \frac{a^2}{(2\lambda)^3}b^{k}+\cdots$$

~~$(1-\cos\varphi)\cdot\frac{\lambda}{3} - \pi\lambda^3\frac{\sin^2\varphi\cos\varphi}{3}$~~

~~$= \frac{\pi\lambda^3}{3}\left(2-2\cos\varphi-\sin^2\varphi\cos\varphi\right)$~~

$$= \frac ba\Big\{1+\frac{a}{2\lambda}+\left(\frac{a}{2\lambda}\right)^2+\frac{a^3}{(2\lambda)^3}+\sim\Big\}$$

$$\frac x2\int_0^\alpha\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\cos\varphi} = \frac x2\lg(\cos\varphi)\Big|_\alpha^0 = -\frac x2\lg\cos\alpha$$

$$= -\frac x2\lg\frac x\lambda$$

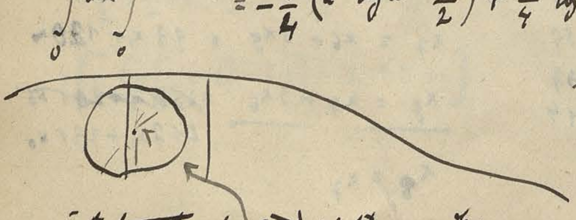
$$\int x\lg x\,.dx = \frac{x^2}{2}\lg x-\frac{x^2}{4}$$

$$\int_0^a dx\int_0^a\cdots = -\frac14\left(a^2\lg a-\frac{a^2}{2}\right)+\frac{a^2}{4}\lg\lambda$$

$$= \frac ba\,\frac{1}{1-\frac{a}{2\lambda}}$$

$$= \frac{\frac a2\lg\frac\lambda a+\frac a4}{1-\frac{a}{2\lambda}}$$

$$v\bar\tau = \frac a2\,\frac{\left[\lg\frac\lambda a+\frac12\right]}{1-\frac{a}{2\lambda}}$$



ist ~~dann~~ auf a>λ nicht anwendbar da dann der Fall eintritt

für $a=\lambda$: $v\bar\tau = \frac a2$

~~für $a=2\lambda$: $v\bar\tau=\infty$~~

~~$\psi = a \sin n(t - \frac{x}{c})$~~ =

$$\left(\frac{n T}{\lambda^2}\right)^2 \int_0^\pi \left\{ \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta 6}{6} \cos\varphi \right\}^2 2\pi \sin\varphi \, d\varphi = \frac{n^3 T^2}{\lambda^4} \left\{ 4 \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta 6}{6}\right)^2 \frac{4}{3} \right\}$$

$$h = 4 \frac{n^3 T^2 n}{\lambda^4} \left[\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta 6}{6}\right)^2 \right] = \frac{4 \pi^3}{\lambda^4} \quad \frac{3\alpha^2+1}{3} \kappa_0 k \theta$$

Wahrsch. eines λ: $\frac{e^{-\frac{\lambda}{l}}}{l} d\lambda$ $\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda}{l}} d\lambda = l$ ~~[illegible]~~

$$\int_0^\infty \lg \frac{\lambda}{a} \cdot e^{-\frac{\lambda}{l}} \frac{d\lambda}{l} = \int \lg \frac{\lambda}{l} \cdot e^{-\frac{\lambda}{l}} \underbrace{\frac{d\lambda}{l}}_{\xi} + \int \lg \frac{l}{a} \, e^{-\frac{\lambda}{l}} \ldots$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty e^{-\xi} \lg \xi \, d\xi}$$

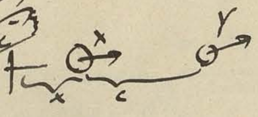
~~$\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$~~

~~$\int x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{(n)!}{\alpha^{n+1}}$~~

~~$\int x^n e^{-x} = n!$~~

$$\frac{d}{d\xi}\left[\xi e^{-\xi} \lg \xi\right] = e^{-\xi} \lg \xi - \xi e^{-\xi} \lg \xi + e^{-\xi}$$

$$\int_0^\infty e^{-\xi} \lg \xi \, d\xi = $$



$$X = \frac{d}{dt}(L\dot{x} - M\dot{y}) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial L}{\partial c}\dot{x}^2 - 2\frac{\partial M}{\partial c}\dot{x}\dot{y} + \frac{\partial N}{\partial c}\dot{y}^2\right]$$

$$Y = \frac{d}{dt}(N\dot{y} - M\dot{x}) + \frac{1}{2}[\ \cdots\ ]$$

$$L = m + \frac{2}{3}\pi\rho a^3\left(1 + 3\frac{a^3 b^3}{c^6}\right)$$

$$M = 2\pi\rho \frac{a^3 b^3}{c^3}$$

$$N = m' + \frac{2}{3}\pi\rho b^3\left(1 + 3\frac{a^3 b^3}{c^6}\right)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{t}\int X dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial L}{\partial c}\overline{\dot{x}^2} - 2\frac{\partial M}{\partial c}\overline{\dot{x}\dot{y}} + \frac{\partial N}{\partial c}\overline{\dot{y}^2}\right] = 0$$

$$\overline{X_x} =$$

Beim Zusammentreffen (Annähern) zweier Kugeln A, B, gleichmäßig abstossende Kraft

$$F = 6\pi\rho \frac{a^3 b^3}{c^4} \dot{y}^2$$

wirkt sowohl während des Näherkommens wie auch während des sich Entfernens

Innerhalb Volum: $W_i^{-1} = \frac{2\pi n^2 \sigma^3}{V \cdot 2h}$

Zahl der Molekülpaare r — $r + dr$

$$\frac{2\pi n^2 r^2 \, dr}{V}$$

$$f = 6\pi\rho \frac{a^3 b^3}{r^4} (\overline{q^2}) = \frac{\alpha}{r^4}$$

$$W_i^{-1} = \frac{2\pi n^2}{v} \int_\sigma^\infty r^3 f(r)\, dr \, e^{-2h\int_r^\infty f(r)\, dr}$$

$$\frac{2\pi n^2}{v} \int_\sigma^\infty 6\pi\rho \, a^3 b^3 (\overline{q^2}) \frac{dr}{r} \, e^{-2h \cdot 6\pi\rho \frac{a^3 b^3}{3 r^3} \overline{q^2}}$$

$$\frac{2\pi n^2}{v} \underbrace{\int_\sigma^\infty \alpha \frac{dr}{r} e^{-\frac{2h\alpha}{3 r^3}}}$$

$$\frac{1}{r^3} = z \qquad r^3 = \frac{1}{z}$$

$$-\frac{3\,dr}{r^4} = dz \qquad 3 \lg r = -\lg z$$

$$3\frac{dr}{r} = -\frac{dz}{z}$$

$$dr = -\frac{dz}{3} z^{4/3}$$

$$\frac{1}{r} = z^{1/3}$$

$$\frac{1}{3}\int_{\sqrt[3]{\frac{1}{\sigma}}}^{0} \alpha \frac{dz}{z} e^{-\frac{2h\alpha}{3} z}$$

$$\boxed{\frac{2h\alpha}{3\sigma^3}}$$

$$= -\frac{2\pi n^2}{v} \frac{\alpha}{3} \int_0 x^{-1} e^{-x} dx$$

$$\overline{q^2} = \frac{c^2}{3} = \frac{1}{2hm}$$

$$\frac{2\pi n^2}{V} \cdot \frac{6\pi\rho a^6}{2hm}$$

$$\sigma^3 : \underbrace{\frac{3\pi\rho a^6}{m}}$$

$$\frac{3\pi\rho a^6}{\frac{4}{3} a^3 \pi \rho'} = \frac{9}{4} \frac{\rho}{\rho'} a^3$$

Wärmeleitfähigkeit

$$k = \frac{1}{16\pi^3}\,\frac{3}{3\alpha^2+1}\,\frac{\rho g\lambda^4}{\left(\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}\right)}\,\frac{c_v}{k\theta}$$

$$k = \frac{H}{N} \qquad v = \frac{R\theta}{p}$$

$$= \frac{1}{16\pi^3}\,\frac{\lambda^4}{\alpha^2+\frac{1}{3}}\,\underbrace{\frac{\rho p\,N}{H\theta}\,\rho\,c_v}_{\frac{\rho^2}{\mu} N c_v \sqrt{\frac{p}{\rho_0}(k)}}$$

$$\rho^2 = \frac{p}{\rho_0}\cdot(k)$$

auf Gase angewandt, Unsinn!

falls $\dot y = 0$

$$0 = \left(m+\frac{2}{3}\pi\rho a^3\right)\frac{d\dot x}{dt} + \cancel{6\pi\rho\frac{a^3b^3}{c^4}(\dot y-\dot x)}$$

$$0 = -\frac{2\mu}{3r_0^3}+\beta$$

$$\beta = v_\infty^2$$

$$r^3 = \frac{2}{3}\,\frac{4\pi\rho a^6\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\frac{4\pi a^3}{3}\left(\rho'+\frac{\rho}{2}\right)v_\infty^2}$$

$\dot y = \text{konst}$ $\qquad \dot x = ?$

~~$X = L\frac{d\dot x}{dt} - p\frac{d\dot y}{dt} - \dot y\frac{dp}{dt}$~~

$$0 = L\frac{d\dot x}{dt} + \underbrace{\dot y\,6\pi\rho\frac{a^3b^3}{c^4}(\dot y-\dot x) + 6\pi\rho\frac{a^3b^3}{c^4}\dot x\dot y}_{+\,6\pi\rho\frac{a^3b^3}{(y-x)^4}\dot y^2}$$

$$\cancel{\left(m+\frac{2}{3}\pi\rho a^3\right)}\frac{d^2x}{dt^2} = -\underbrace{\boxed{\frac{6\pi\rho a^3b^3}{m+\frac{2}{3}\pi\rho a^3}}\;\boxed{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \text{konst}}}_{=\mu}\frac{1}{(y-x)^4}$$

$$y = \alpha - \beta t$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(y-x) = \frac{\mu}{(y-x)^4}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{\mu}{r^4}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -\frac{\mu}{3r^3}+\frac{\beta}{2}$$

$$\frac{dr}{\sqrt{\beta-\frac{2}{3}\frac{\mu}{r^3}}} = dt$$

Für große r $\qquad \frac{dr}{dt} = c$

$$\beta = c^2$$

Minimum von r wenn $\frac{dr}{dt} = 0$

also: $\beta = c^2 = \frac{2}{3}\frac{\mu}{r^3}$

$$r^3 = \frac{2}{3}\frac{\mu}{c^2} = \frac{2}{3}\,\frac{4\pi\rho a^6}{m+\frac{2}{3}\pi\rho a^3}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{4\pi\rho a^6}{\frac{4\pi}{3}a^3\left[\rho'+\frac{1}{2}\rho\right]} = \frac{2a^3}{\frac{\rho'}{\rho}+\frac{1}{2}}$$

Kann auch in folgender Weise geschrieben werden:

$$T_E = \cancel{N_1 + N_2 + \ldots} \frac{N_1 + (1+2)N_2 + (1+2+3)N_3 + \ldots}{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \ldots}$$

$$T_W = \frac{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + 4N_4 + \ldots}{N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + \ldots}$$

$$T_E \cdot T_W = \frac{N_1 + (1+2)N_2 + (1+2+3)N_3 + \ldots}{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots} = \frac{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \ldots}{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots} + \frac{N_2 + 2N_3 + N_4 + \ldots}{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots} + \frac{N_3 + 2N_4 \ldots}{\ldots}$$

$$= 1 + 2\,\frac{N_2 + N_3 + N_4 + \ldots}{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots} + 3\,\frac{N_3 + N_4 + N_5 + \ldots}{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots} + 4\,\frac{N_4 + N_5 + \ldots}{\ldots}$$

$$T_W = 1 + \frac{N_2 + N_3 + N_4 + \ldots}{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots} + \frac{N_3 + N_4 + N_5 + \ldots}{N_1 + N_2 + N_3 \ldots} + \frac{N_4 + N_5 + \ldots}{\ldots}$$

Oder auch direkt: (weil in obiger Weise definiert manchmal die $\frac{0}{0}$ kommen wird)

$$T_E = \underbrace{\frac{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots}{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \ldots}}_{\frac{1}{T_W}} + 2\,\frac{N_2 + N_3 + N_4 + \ldots}{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \ldots} + 3\,\frac{N_3 + N_4 + N_5 + \ldots}{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \ldots}$$

$$\cancel{\frac{1 + \beta + \beta^2 + \ldots}{1 + 2\beta + 3\beta^2 + \ldots} = \frac{\frac{1}{1-\beta}}{\frac{1}{(1-\beta)^2}} = 1 - \beta}$$

$$\cancel{\alpha + 2\alpha\beta + 3\alpha\beta^2 + \ldots = \alpha(1 + 2\beta + 3\beta^2 + \ldots) = \frac{1-\beta}{(1-\beta)^2} = \frac{1}{1-\beta}}$$

$$4\bar{W}(mnn) - 2\bar{W}(nnn) + 2\bar{W}(mn) - 2\bar{W}(nmm)$$
$$+ \bar{W}(n) - 2\bar{W}(nn) + \bar{W}(mm)$$

$$\cancel{nnn} + 2(\cancel{nn} - \cancel{nnn}) + \cancel{2}(mm - \cancel{mmm}) + \underbrace{(mn - nmm)}_{mn - \cancel{nm} + \cancel{mnm}} + \cancel{\ldots}\, n - 2\cancel{nn} + \cancel{nnn} + \cancel{m}mm = 1$$

Wenn wir folgende Bezeichnungen einführen:

$W(n)$ = Wahrsch. eines n, in Bezug auf alle möglichen Fälle = relat. Häufigkeit

$W(m)$ = " " (nicht n), " "

$W(n,n)$ = relat. Häufigkeit der Doubletten n n, in Bezug auf alle vorkommenden Doubletten

$W(n) + W(m) = 1$

$W(n\,n) + W(m\,m) + W(n\,m) + W(m\,n) = 1$

Wegen Stationarität muss dabei $W(n\,m) = W(m\,n)$ sein, also

$W(n,n) + 2\,W(n,m) + W(m,m) = 1$

$W(n\,n) + W(n\,m) = W(n)$

$W(n\,m) + W(m\,m) = 1 - W(n)$

$\therefore W(m\,m) = 1 - W(n) - (W(n) - W(n\,n))$

$W(m\,m) = 1 - 2\,W(n) + W(n,n)$

$$W(n,n,n) + \underset{= W(m\,n\,n)}{W(n\,n\,m)} + W(n\,m\,n) + \underset{= W(m\,m\,n)}{W(n\,m\,m)} + W(m\,n\,n) + W(m\,n\,m) + W(m\,m\,n) + W(m\,m\,m) = 1$$

$$\left\{\begin{aligned} &W(n\,n\,n) + W(n\,n\,m) = W_1(n\,n) \\ &W(n\,m\,n) + W(n\,m\,m) = W_1(n\,m) \\ &W(m\,n\,n) + W(m\,n\,m) = W_1(m\,n) \qquad = W(n\,n\,m) + W(m\,n\,m) \\ &W(m\,m\,n) + W(m\,m\,m) = W_1(m\,m) \qquad = W(n\,m\,m) + W(m\,m\,m) \\ \hline &W(n\,n\,n) + 2\,W(n\,n\,m) + 2\,W(n\,m\,m) + W(n\,m\,n) + W(m\,n\,m) + W(m\,m\,m) = 1 \end{aligned}\right.$$

$W(n\,n\,n) + W(m\,n\,n) = W_2(n\,n)$

$W(n\,n\,m) + W(n\,m\,m) = W_2(n\,m)$

$W(m\,n\,n) + W(m\,m\,n) = W_2(m\,n)$

$W(m\,n\,m) + W(m\,m\,m) = W_2(m\,m)$

$W(n\,n\,m) = W(n\,n) - W(n\,n\,n)$

$W(m\,n\,m) = W(m\,n) - W(n\,n\,m) = W(n) - 2W(n\,n) + W(n\,n\,n)$

$W(n\,m\,n) = W(m\,n) - W(n\,m\,m) = W(m) - 2\,W(m\,m) + W(m\,m\,m)$

$W(n\,m\,m) = W(m\,m) - W(m\,m\,m) = W(m\,m) - W(m\,m\,m)$

$$X = L\ddot{x} - \frac{d}{dt}(M\dot{y}) - \frac{dM}{dc}\dot{x}\dot{y} = L\ddot{x} + \mathfrak{F}_x$$

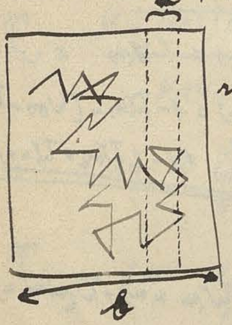
$$Y = N\ddot{y} - \frac{d}{dt}(M\dot{x}) + \frac{dM}{dc}\dot{x}\dot{y} = N\ddot{y} + \mathfrak{F}_y$$

~~$X\dot{x} + Y\dot{y} =$~~

$$x\mathfrak{F}_x + y\mathfrak{F}_y = \frac{dM}{dc}\dot{x}\dot{y}(\dot{y}-\dot{x}) - M(x\ddot{y} + y\ddot{x})$$

~~$L\, x\ddot{x} + N\, y\ddot{y}$~~

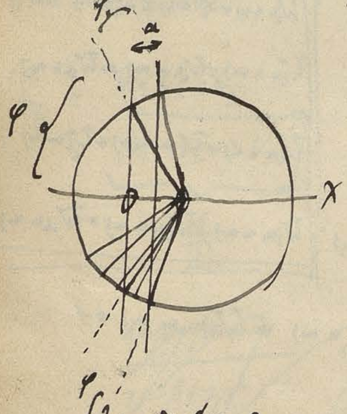
$$- (\dot{y}-\dot{x})(x\dot{y}+y\dot{x})\frac{dM}{dc}$$



$\underbrace{\text{(Gesammt-) relative Aufenthaltsdauer}}$ in der Schichte a $= \frac{a}{b}$

$= \sum$ der ununterbrochenen Aufenthaltszeiten = (mittlere ununterbrochene Aufenthaltsdauer) × (halbe Anzahl der Ein und Austritts Stellen)

mittlere ununterbrochene Aufenthaltsdauer $=$ $\dfrac{\text{Gesammt Aufenthaltsdauer in a}}{\text{halbe Anzahl der Ein und Austritts Punkte}}$



Zusammenstosspunkt 0 kann beliebig liegen in Bezug auf die Schichte a, mit gleichmässiger Wahrscheinl. längs Normale

Innerhalb des Kegels φ gibt es nur doppelte Durchstosspunkte und mittlere ... Dauerzeit hiefür

$$\frac{\int_0^{\varphi} 2\pi\sin\varphi\, d\varphi \,\frac{a}{\cos\varphi}}{\int_0^{\varphi} 2\pi\sin\varphi\, d\varphi} = \frac{a\log\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right)}{1-\cos\varphi} = \cancel{a\lg\frac{x}{\lambda}}\; \frac{a\lg\frac{\lambda}{x}}{1-\frac{x}{\lambda}}$$

$$W(n\,n\,n) + 1 - W(n) - 2\left[1 + W(n,n) - 2W(n)\right] + W(m\,m\,m) = W_2(n\,n)$$

$$W(m\,m\,m) = W_2(n,n) + 1 + 3W(n) - 2W(n,n) - W(n,n,n)$$
$$= W_2(n,n) - W(n\,n\,n) - W(m) + 2W(m,m)$$

~~$W(m\,n\,n\,n) + W(n\,n\,n\,m) = W(n\,n\,n)$~~

In analoger Weise kann man jedesmal einen beliebigen der Ausdrücke

$W(\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot)$ berechnen, sobald nur ein einziger Ausdruck jener Klasse, z.B.

$W(n\,n\,n\,n\,n\,n)$ bekannt ist, ~~[illegible] falls~~ und sobald alle Ausdrücke der niedrigeren Klassen

bekannt sind.

Es handelt sich somit vor Allem um die Ausdrücke $W(n\,n\,n\,n\,\ldots)$

Mittlere maximale Abweichung bei einem reinen Hazardspiel

~~Man muss die Wahrsch. kennen, dass~~

Falls eine Anzahl Teilchen vom 0 Punkt ausgeht und die Wand gleich klebrig vorgestellt wird, mit welcher Wahrsch. wird ein Teilchen in der Zeit t ... t+dt haften bleiben? $W_h(t)\,dt$

Daraus würde man die mittlere ~~Erwartungszeit~~ Erwartungszeit (analog Wiederkehrzeit) $\lim_{t=\infty}\int_0^{t} tW(t)\,dt$ berechnen (falls eine solche existiert). (bei gegebenem Ausgangspunkt)

Falsch! Das wäre nicht die mittlere Erwartungszeit, denn bei letzteren müsste man sich die Wand reflectirend denken und die Bewegung fortsetzen. Hier

Es muss sich das auf einen stationären Zustand beziehen

Bis zur Zeit t hätten also im Falle freien Raumes

die Teilchen $F(t,h) = \int_0^t W(t)_h\,dt$ (wenigstens einmal eine grössere Elongation als h erreicht,

der Rest $\int_t^\infty W(t)_h\,dt$ fortwährend eine geringere als h

Also ist $F(t, h+dh) - F(t, h)$ die Anzahl der Teilchen, welche innerhalb t (wenigstens einmal) eine grössere Elongation als h, aber fortwährend eine geringere als h+dh aufweisen, somit sind das jene welche eine Maximal Elongation h aufweisen

Die Wahrscheinl. einer Maximal Elongation h (... h+dh) in der Zeit t) beträgt somit

$$P(h)\,dh = -dh\,\frac{\partial}{\partial h}\int_0^t W_h(t)\,dt$$

und die mittlere maximale Elongation in der Zeit t wird betragen:

$$\overline{El}_{max} = -\int_0^\infty h\,dh\frac{\partial}{\partial h}\int_0^t W(t)\,dt$$

$$= \cancel{-h\int_0^t W(t)\,dt\Big|_0^\infty} + \int_0^\infty dh\int_0^t W_h(t)\,dt$$

Dagegen wird $dt\,dh\,\frac{\partial W_h(t)}{\partial h}$ die Wahrsch. vorstellen, dass ein Teilchen seine maximale Elongation $h \dots h+dh$ gerade in der Zeit $t \dots t+dt$ erreicht

→ Dagegen würde $\int_0^\infty \frac{t^2 W(t)\,dt}{\int_0^\infty t\,W(t)\,dt}$ die mittlere Erwartungszeit im früher definierten Sinne ? bedeuten

~~Dagegen wäre~~ ~~$\int W_h(t)\,dt$~~ ~~$dt\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(h)\,W_h(t)$~~ ~~dt~~ ~~$dh$ die Wahrsch. dass auf der ganzen Flüssigkeit Teilchen an der Wand~~

Eigentlich muss auch der Ausgangspunkt spezialisiert werden, also

Falls Teilchen von x_0 ausgehen, mit welcher Wahrsch. erreichen sie zum ersten Mal die Lage h, in dem Zeitraum $t \dots t+dt$:

$$W(x_0\,h)_t\,dt$$

Die mittlere Übergangszeit von x_0 nach h ist also $\int_0^\infty t\,W(x_0,h)_t\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^\infty t^2\frac{\partial W}{\partial t}\,dt$

~~Die Zahl~~

Die Anzahl Teilchen, welche überhaupt (im stationären Zustand) ~~im Zeitraum $t \dots t+dt$~~ zum ersten Mal nach Ablauf der Zeit $t \dots t+dt$ (nach Verlassen ihres Ausgangspunktes) die Lage h erreichen, ist: $dt\int_{-\infty}^{+\infty} W(x_0,h)_t\;\varphi(x_0)\,dx_0$

Also ist die allgemeine mittlere Übergangszeit in die Lage h: $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x_0)\,dx_0\int_0^\infty t\,W(x_0,h)_t\,dt = \int_0^\infty t^2\,dt\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \varphi(x_0)\,W(x_0,h)_t\,dt$?

~~Nun ist aber die Verteilung $\varphi(x_0)dx_0$ im stationären Zustand identisch mit der zeitlichen Verteilung, d. h. [illegible] verhältnismässigen Aufenthaltsdauer in $x_0 \ldots x_0+dx_0$~~

? ?? ~~[illegible]~~!

Dies ist aber identisch mit der früher als mittlere Wiederkehrdauer berechneten
mittlere Dauer des Zustands „Nicht h")

$$T = \frac{N_1 + (1+2)N_2 + (1+2+3)N_3 + \ldots}{N_1 + N_2 + \ldots} = \frac{1}{2}\frac{\int_0^\infty t^2 f(t)_h \, dt}{\int_0^\infty t f(t)_h \, dt}$$

dabei bedeutet $f(t)_h \, dt$ die Wahrscheinlichkeit (bezogen auf die Anzahl Male wo es wieder h [illegible])

dass ein Teilchen im stationären Zustand ~~[illegible]~~ ~~nicht~~ ~~[illegible]~~ die Zeit $t \ldots t+dt$ braucht um wieder in die Lage h zu geraten
~~fortwährend nicht in die Lage h gerät~~

Dagegen wäre die mittlere Wiederkehrzeit (bezogen auf alle Male, wo h war)

$$= \int_0^\infty t \, \overline{W}(h,h)_t \, dt = \frac{\int_0^\infty t f(t)_h \, dt}{\int_0^\infty f(t) \, dt}$$ 1

Der Bedeutung nach scheint aber die Identität zu bestehen: 1 9

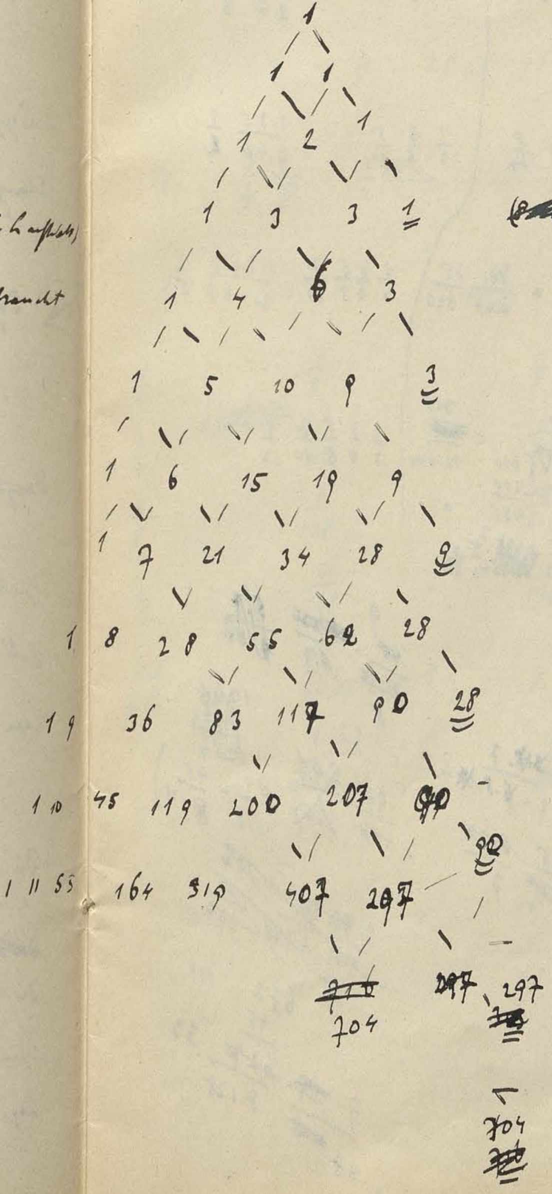
$$f_h(t) = \overline{W}(h,h)_t$$ 1 10

Es würde also die Gleichung gelten: ? 1 11 55

$$\frac{1}{2}\frac{\int_0^\infty t^2 \, \overline{W}(h,h)_t \, dt}{\int_0^\infty t \, \overline{W}(h,h)_t \, dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_0)\,dx_0 \int_0^\infty t \, \overline{W}(x_0,h)_t \, dt$$

~~Die Teilchen welche von x_0 ausgegangen sind und welche sich zur Zeit $t \ldots t+dt$ innerhalb~~

Besteht irgend ein Zusammenhang zwischen der jetzt behandelten Funktion $W(x_0,h)_t$ und meiner früheren Verteilungsfunktion $W(x_0\,x)_z\,dx$?



$\frac{9}{100}\left(1-\cancel{\frac{1}{8}}\cancel{\frac{3}{32}}\right)\frac{25}{32}=\frac{9}{128}$

$\frac{7}{84}\cdot 4\left(\frac{25}{32}\right)\cdot\frac{41}{100}$

$\frac{1}{8}$

$\frac{3}{28}\left(1-\frac{1}{8}\right)$

$=\frac{3\cdot 4}{4.8}$

$\frac{9}{100}\left(1-\frac{2}{28}\left(1-\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}\right)$

$=\frac{9}{4.32}$

$\frac{28}{364}\left(1-\frac{16+9+12}{4.32}\right)\frac{128}{37}$

$\frac{1}{13}$ $\quad =\frac{7}{4.32}$

$\frac{90}{4.336}\left(1-\frac{7+9+12+16}{4.32}\right)=\frac{\cdot 23}{16.32}$

1344

$\frac{23}{336}$ $\quad \frac{128}{44}$ $\quad 12.7$

$\frac{84}{4.32}$ 3

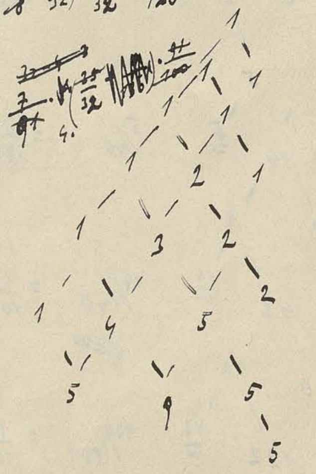
$23\,\frac{\cancel{84}}{4.48}$ $\quad \frac{\cancel{7}}{4.32}\;\frac{12}{13}\cdot\frac{23}{\cancel{336}}$ $\quad \frac{15}{4.\cancel{56}}\cdot\frac{\cancel{21}}{32}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\cancel{112}}{16}$ $\qquad\qquad 8$

$1-\frac{16+12+9+7}{128}$

$\frac{128}{\frac{44}{84}}\cdot\;\frac{23}{\cancel{336}}\cdot\frac{\overset{21}{\cancel{84}}}{\cancel{128}}$

$\qquad\qquad \frac{\cancel{112}}{16}\qquad 32$



1

3

9

$4.7=28$

$4.23=92$

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$

$\frac{1}{6}\;\frac{3}{8}=\frac{3}{24.6}$

$\frac{1}{8}$

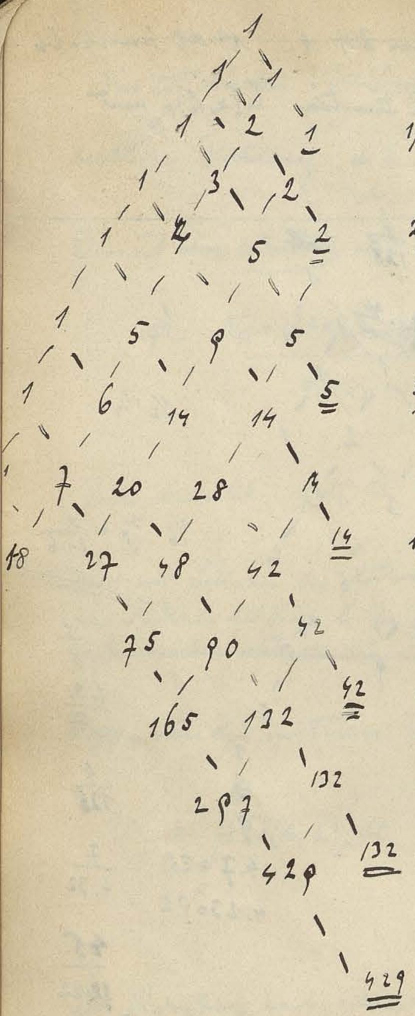
$\frac{1.3.}{32}$

$\frac{9}{128}$

$\frac{7}{4.32}$

$\frac{45}{32.32}$

$\frac{9}{\cancel{100}\,4.}\left[1-\cancel{\frac{9}{32}}\right]\frac{25}{32}$



$1/4$ $1/4$ $\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}$

$2/12 \cdot$ [illegible] $= 1/6 \cdot 3/4 = \frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}$ $\frac{1.3.}{2.4}\,\frac{1}{3}$

$5/40 = \frac{1}{8}\,(\underbrace{1 - 1/4 - 1/8}_{5/8}) = \frac{5}{64}$ $\frac{1}{4}\,\frac{3}{6}\,\frac{5}{8}$ $\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{4}$

$14/140 = \frac{1}{10}\,(\underbrace{1 - \frac{5}{64} - \frac{3}{8}}_{19/64}) = \frac{35}{640}$ $\frac{1}{4}\,\frac{3}{6}\,\frac{5}{8}\,\frac{7}{10}$ $\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\frac{1}{5}$

~~136~~

$42/504 = \frac{1}{12}\,($[illegible]$\frac{}{64}\;\frac{}{10}$ $\frac{640}{\frac{209}{431}}$ $= \frac{315}{12.640}$ $=$ $\frac{1}{4}\,\frac{3}{6}\,\frac{5}{8}\,\frac{7}{10}\cdot\frac{9}{12}$

$(1-\frac{}{64}$ $\frac{35}{64}$ [illegible] $\frac{3}{40}$

$\frac{1}{14}$

$\frac{1}{16}$

$1 - \frac{35+50+80+160}{640}$

$\frac{325}{315}$

$\frac{1}{\cancel{16}\,4.}\cdot\frac{105}{\cancel{640}}$

$\frac{\cancel{}.7}{2.4.\cancel{6}.8\,\cancel{}4.}$

$\frac{45}{\cancel{}4.}\cdot\frac{8.\cancel{}}{7}$

$\frac{9}{\cancel{}\,8}\cdot\frac{\cancel{}}{\cancel{}.7}$ [illegible]

$\frac{99}{418}\cdot\frac{\cancel{297}}{\cancel{1254}}\left(\frac{84}{128} - \frac{45}{8\,128}\right)$ 1254

$\frac{9.\cancel{99}.\,291}{\cancel{418}.4.128}\;38\;336\;297.$

672 101

$\frac{9}{\cancel{418}}\cdot\frac{\frac{45}{\cancel{627}}}{8.128}.33$

4. ~~38~~ 2

$1/8$ $3/32$ $9/128$ $7/128$ $\cancel{\frac{23}{4.128}}$ $\frac{45}{32.32}$ $\frac{9.33}{\cancel{16.3.128}\ 8.32.32}$

$3/4$ $3/4$ $7/9$ $\cancel{23/28}$ $45/56$ $33/40$

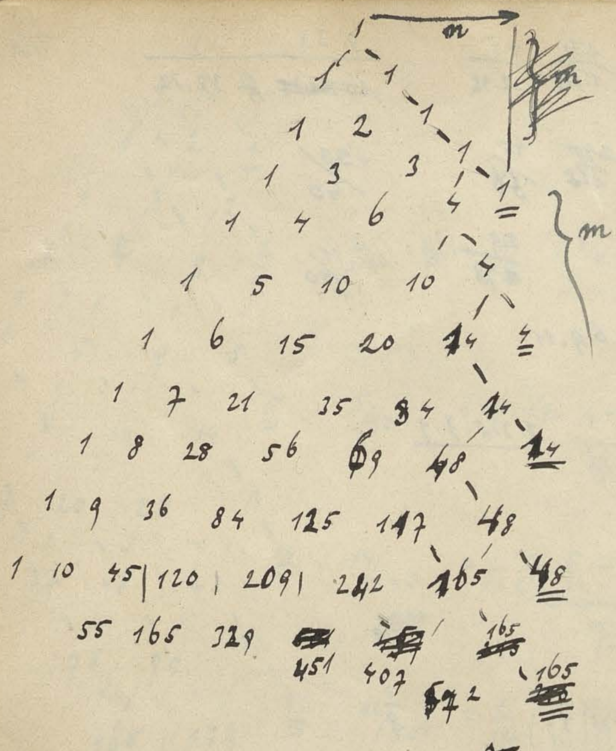
$\frac{1}{2}\frac{3}{2}$ $\frac{3}{5}\frac{5}{4}$ $\frac{2}{3}.\frac{7}{6}$ $\frac{5.9}{\cancel{4}.7.8}$ $\frac{3.11}{4.10}$

1 3 9 28 45 6.9.11

$1/8$ $\frac{3}{4}\frac{1}{8}$ $\frac{5}{4}.\frac{3.1}{}$ $\frac{1.3.5.7}{}$ $\frac{1.3.5.7.9}{}$

5

$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		
$\frac{3}{4}$	[illegible]	$\frac{3}{32}$	$:3$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$		
$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{128}$	$:5$	$\frac{9}{5.128}$	$\frac{9}{[illegible]4.5}$	$\frac{9}{128}$	$\frac{9}{16}$	
$\frac{7}{5}$		$\frac{7}{128}$	$:7$	$\frac{1}{128}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{6}{128}$	$\frac{6}{9}$	$\cancel{\frac{4.5}{6.8}}$
$\frac{9.5}{7.4}$		$\frac{45}{32.32}$	$:9$	$\frac{5}{8.128}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5.7}{8.128}$	$\frac{5.7}{6.8}$	$\cancel{\frac{15.4}{6.8}}$
		$\frac{9.33}{8.32.32}$	$:11$	$\frac{3.9}{4.128}$	$\frac{3.9}{8.5}$	$\frac{3.9}{8.128}$	$\frac{3.9}{5.7}$	= [illegible]



$\frac{1}{16}$ $\frac{1}{16}$

$\frac{4}{60} = \frac{1}{15}$ $\frac{1}{16}$

$\frac{14}{224} = \frac{1}{16}$ $\frac{7}{128}$

$\frac{48}{840} = \frac{2}{35}$ $\frac{3}{64}$

$\frac{165}{4.792} = \frac{15}{4.72} = \frac{5}{4.24} = \frac{5}{96}$ $\frac{3.5.11}{32.128}$

$= \frac{1}{3.7}$ $\frac{11.13}{32.128}$

$\frac{1}{3.7}.\frac{\cancel{3003}}{32.128}$ ~~429~~ 143

$\frac{3168}{165}$ 3003.4

~~572~~ 3.7

$1-\frac{165+192+224+512}{32.128}$

1093

$\frac{1}{16}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{15}{16}$

$\frac{2}{35}\left(1-\frac{7+16}{128}\right) = \frac{2}{35}\,\frac{105}{128} = \frac{3}{64}$

23 64

384
256
4096
1093
3003

$\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{8}\right)=$

$\frac{5}{96}\left(1-\frac{105+6}{128}\right) = \frac{5}{\cancel{96}}.\frac{\cancel{99}}{128}$ 33

32.

$\frac{1}{16}$:3 $\frac{1}{3.16}$

$\frac{1}{16}$:5 $\frac{1}{5.16}$ $\frac{3}{5}$

$\frac{7}{128}$:7 $\frac{1}{4.16}$ $\frac{5}{4}$

$\frac{3}{64}$:9 $\frac{1}{3.64}$ $\frac{1}{3}$

$\frac{3.5.11}{32.128}$:11 $\frac{3.5}{32.128}$ $\frac{9.5}{64}$

$\frac{1}{3.7}\left[1-\frac{1}{8}-\frac{7+6}{105}-\frac{5}{96}\right]$

315
21
3360
996
$\frac{2364}{3360} = \frac{394}{560} =$

420
416
160
996

32.13
96
416

1). $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{5}{128}$ $\frac{7}{256}$ $\frac{7.3}{256.4}$ $\frac{3.11}{256.8}$ $\frac{3.11.13}{256.128}$

2). $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{5}{64}$ $\frac{7}{128}$ $\frac{7.3}{256.2}$ $\frac{3.11}{256.4}$

3). $\frac{1}{8}$ $\frac{3}{32}$ $\frac{9}{128}$ $\frac{7}{128}$ $\frac{5.9}{32.32}$ $\frac{3.9.11}{8.32.32}$

4). $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{7}{128}$ $\frac{3}{64}$ $\frac{3.5.11}{32.128}$ $\frac{11.13}{32.128}$

5). $\frac{1}{32}$ $\frac{5}{128}$ $\frac{5}{128}$ $\frac{5.15}{16.128}$ $\frac{5.5.11}{(128).64}$ $\frac{7.11.13}{2.(128)^2}$

6). $\frac{1}{64}$ $\frac{3}{128}$ $\frac{27}{8.128}$ $\frac{5.11}{16.128}$

$\frac{11}{3.8}$

$\frac{5.8.11}{(128)^2 8} \cdot \frac{16.128}{8.15_3}$

$\frac{15}{16}$ $\frac{45}{48}$

$\frac{7.13}{25.4}$

7). $\frac{1}{128}$ $\frac{7}{4.128}$ $\frac{5.7}{16.128}$ $\frac{2.7.11}{64.128}$ $\frac{7.7.13}{2.(128)^2}$

---

(92) ↓ ~~$\frac{1}{2}$ 1 1 2 5 14 42 33 132~~ ~~3.11.13~~

1) $\frac{1.1}{2.2}$ $\frac{2.3}{4.3}$ $\frac{3.5}{6.4}$ $\frac{4.7}{8.5}$ $\frac{5.9}{10.6}$ $\frac{11}{14}$

2) $\frac{1.3}{2.3}$ $\frac{2.5}{4.4}$ $\frac{3.7}{6.5}$ $\frac{4.9}{8.6}$ $\frac{5.11}{10.7}$

3) $\frac{2.3}{2.4}$ $\frac{3.5}{4.5}$ $\frac{4.7}{6.6}$ $\frac{5.9}{8.7}$ $\frac{6.11}{10.8}$

4) $\frac{2.5}{2.5}$ $\frac{3.7}{4.6}$ $\frac{4.9}{6.7}$ $\frac{5.11}{8.8}$ $\frac{6.13}{10.9}$

5). $\frac{3.5}{2.6}$ $\frac{4.7}{4.7}$ $\frac{5.9}{6.8}$ $\frac{6.11}{8.9}$ $\frac{7.13}{10.10}$

6). $\frac{3.7}{2.7}$ $\frac{4.9}{4.8}$ $\frac{5.11}{6.9}$ $\frac{6.13}{8.10}$ ~~$\frac{7.15}{10.11}$~~ 8.15

7). $\frac{4.7}{2.8}$ $\frac{5.9}{4.9}$ $\frac{6.11}{6.10}$ $\frac{7.13}{8.11}$ $\frac{8.15}{10.12}$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5
1 6 15 20 15 5
1 7 21 35 35 20
1 8 28 56 70 55 20
1 9 36 84 126 125 75
1 10 45 | 120 | 210 | 251 | 200 75
1 11 55 165 330 461 451 275
1 12 66 220 495 ‖ 791 ‖ 912 ‖ 726 275
1 | 13 | 78 286 715 1286 1703 1638 1001

$\frac{75+80+80+64}{16.128}$ $\begin{array}{r} 128 \\ 768 \\ \hline 2048 \\ 299 \\ \hline 1749 \end{array}$

$\frac{\cancel{1749}}{16.128} . \frac{275}{4.\cancel{1749}}$ $\begin{array}{r} 6996 \\ -\ 275 \\ \hline 6721 \end{array}$

$\frac{1749}{16.128} - \frac{275}{4.16.128} = \frac{6721}{\cancel{}(128)^2}$

$. \frac{1001}{4.6721}$

$\underline{\underline{1}}$ $\frac{1}{32}$ $\frac{1}{32}$

$\underline{\underline{5}}$ $\frac{5}{124}$ $\frac{6}{128}$

$\frac{\cancel{1749}}{16.128} . \frac{275}{4.\cancel{1749}}$

$\underline{\underline{20}}$ $\frac{20}{476}$ $\frac{5}{128}$

$\underline{\underline{75}}$ $\frac{75}{1824}$ $\frac{5.15}{16.128}$

$\underline{\underline{275}}$ $\frac{275}{4.1749}$ $\frac{5.5.11}{64.128}$

$\underline{\underline{1001}}$ $\frac{1001}{4.6721} = \frac{91}{4.611} = \frac{7}{4.47}$ ‖ $\frac{7.11.13}{2.(128)^2}$

6996

$\begin{array}{r} 6996 \\ 275 \\ \hline 6721 \end{array}$

$\frac{1001}{4.(128)^2}$

$\frac{5}{\cancel{124}_4} . \frac{31}{32}$ $\frac{\cancel{119}}{128} . \frac{\cancel{20}\,5}{\cancel{476}_4}$

$\frac{16+40+75}{4.128}$

512
131
~~64~~ ~~128~~

$\frac{\cancel{275}}{4.\cancel{1749}}$ ~~(4.128~~

583

$\frac{\cancel{119}}{128} . \frac{65}{\cancel{1824}.4.\cancel{476}_4}$

$\begin{array}{r} 128 \\ 256 \\ 1024 \\ \hline 16384 \\ -\ 2667 \\ \hline 13717 \end{array}$ $\frac{13717}{128.128} . \frac{7}{4.47}$

$\frac{56.4+75}{16.128}$

$\begin{array}{r} 224 \\ 75 \\ \hline \cancel{299} \end{array}$ $\frac{\cancel{299}}{16.128} . \frac{\cancel{275}}{4.\cancel{1749}}$ 25 . 23 . 1 ‖

459

1247

$\frac{75+160+64}{16.128}$ $\begin{array}{r} 128 \\ 768 \\ \hline 2048 \\ -\ 299 \\ \hline 1749 \end{array}$

$\frac{275.\cancel{1749}}{4.\cancel{}\,\cancel{1749}.16.128}$

$\frac{8.1749 - 275}{16.128}$

2
407

$\frac{275+\cancel{600}+\cancel{}1280+\overset{512}{\cancel{}}}{128.128}$

$\begin{array}{r} 13992 \\ 275 \\ \hline 13717 \end{array}$

$\frac{11.\overset{7}{\cancel{77}}.\cancel{11}\,1247}{\cancel{}.4.\cancel{6721}.16.128}$

~~4.611~~ 47

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 $\underline{\underline{1}}$ $\frac{1}{64}$ 1 $\frac{1}{64}$

7 21 35 35 21 6

28 56 70 56 27 $\underline{\underline{6}}$ $\frac{6}{4.63} = \frac{1}{42}$ $\frac{3}{128}$

252

84 126 126 83 27 (41)!

210 252 209 110 $\underline{\underline{27}}$ $\frac{27}{4.246} = \frac{9}{328}$ $\frac{27}{8.128}$

462 461 319 110 $\underset{\cancel{27}}{\overset{\cancel{11}}{984}}$ (67)

923 780 429 $\underline{\underline{110}}$ $\frac{110}{4.957} = \frac{10}{4.87}$ $\frac{10.11}{32.128}$

$\frac{1}{\cancel{42}} \cdot \frac{\cancel{63}}{64}$ $\frac{3}{2}$

$1-\frac{5}{128} = \frac{\overset{3}{\cancel{123}}}{128} \cdot \frac{9}{\underset{8}{\cancel{328}}}$

$\frac{123}{128} - \frac{27}{8.128} = \frac{\begin{array}{r}984\\27\\\hline\cancel{957}\end{array}}{8.128} \cdot \frac{10}{4.\cancel{87}} \cdot 11$

$\frac{6}{\cancel{6}.2^{\cancel{6}}}$ $\frac{\cancel{12}}{6}$ $\underline{30}$

$\frac{1}{64}$ $\frac{1}{\cancel{36}}$

1 7 21 35 35 21 7 $\underline{\underline{1}}$

8 28 56 70 56 28 7

36 84 126 126 84 35

120 210 512 210 119 35

330 722 722 329 154

1052 1444 1051 483 154

637

$\underline{\underline{1}}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{128}$
$\underline{\underline{7}}$	$\frac{7}{4.127}$	$\frac{7}{4.128}$
$\underline{\underline{35}}$	$\frac{35}{4.501}$	$\frac{35}{16.128}$
$\underline{\underline{154}}$	$\frac{154}{4.1969}$	$\frac{11.14}{64.128}$
$\underline{\underline{637}}$	$\frac{637}{4.7722}$	$\frac{7.7.13}{2.(128)^2}$

$$\begin{array}{r} 508 \\ \underline{7} \\ 2004 \\ \underline{35} \\ 1969 \\ 7876 \\ \underline{154} \\ 7722 \end{array}$$

$\frac{11}{4.128}$

$$\begin{array}{r} 512 \\ \underline{11} \\ 501 \end{array}$$

$\frac{501}{4.128} \cdot \frac{35}{4.501}$

$$\frac{1}{4.128}\left[501 - \frac{35}{4}\right]$$

$$\begin{array}{r} 2004 \\ \underline{35} \\ 1969 \end{array}$$

$\frac{1969}{16.128} \cdot \frac{154}{4.1969}$

$$\frac{}{16.128}\left(1969 - \frac{154}{4}\right)$$

$\frac{126}{1024}$ $\frac{63}{512}$ $\frac{\begin{array}{r} 7876 \\ \underline{154} \\ \cancel{7722} \end{array}}{64.128} \cdot \frac{637}{4.\cancel{7722}}$

$2\left(\cancel{21}\ \cancel{7}\ \cancel{22} + \frac{22}{2}\right)$

$$\begin{array}{r} 42 \\ 48 \\ 27 \\ \underline{1} \\ 118 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 84 \\ 192 \\ 162 \\ \underline{10} \\ 448 \end{array} \quad \begin{array}{r} 512 \\ \underline{448} \\ 64 \\ \hline 1024 \end{array} : 8 \quad \begin{array}{r} 14 \\ 28 \\ 20 \\ 7 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ 84 \\ 100 \\ 49 \\ \underline{9} \\ 256 \end{array}$$

$$\binom{a}{b} = \frac{\cancel{a(a-1)(a-2)\ (a-b+1).\ (a-b)!}}{1.2.3\ldots b} \quad \frac{a!}{a-b)!}$$

$$\frac{(n+2m-2)!}{(n+m-1)!\,(m-1)!} =$$

n ungerade

$$\alpha_{m} = \frac{1}{2^n} \frac{\left(m+\frac{n-3}{2}\right)!}{\frac{n-1}{2}!} \frac{n(n+2)(n+4)\cdots\cdots(n+2m-4)}{2.4.6.8\ldots\ldots(2m-2)} \cdot \frac{n!}{\left(m+\frac{n-1}{[illegible]}\right)!}$$

n gerade

$$\alpha_m = \frac{1}{2^n} \frac{\left(m+\frac{n}{2}-2\right)!}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!} \frac{(n+1)(n+3)(n+5)\cdots\cdots(n+2m-3)\; n!}{\underset{1\;2\;3\;\ldots\ldots\;m-1}{2.4.6.8\ldots\ldots(2m-2)}.\,(m+n-1)!}$$

$\cancel{m-4}$

$$= \frac{1}{2^n} \frac{\left(m+\frac{n}{2}-2\right)!}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!} \underbrace{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\cdots(n+2m-2)}{\underset{\frac{n}{2}+1\quad \frac{n}{2}+2\quad\ldots\quad \frac{n}{2}+m-1}{(n+2)(n+4)\cdots\cdots(n+2m-2)}}}_{\frac{(n+2m-2)!\;\frac{n}{2}!}{2^{m-1}\,n!\;\left(\frac{n}{2}+m-1\right)!}} \underbrace{\frac{n!}{2.4.6.8\ldots(2m-2)(m+n-1)!}}_{\frac{n!}{(m+n-1)!\,(m-1)!\,2^{m-1}}}$$

$$= \frac{1}{2^{n+2m-2}} \frac{\cancel{\frac{n}{2}!}\;\cancel{n!}\;\cancel{\tfrac{n}{2}+1\;\tfrac{n}{2}+2}\cdots\frac{n}{2}}{\cancel{\left(\frac{n}{2}-1\right)!}\;\cancel{n!}\left(\frac{n}{2}+m-1\right)(m-1)!\,(m+n-1)!}$$

$$\boxed{\alpha_{mn} = \frac{1}{2^{n+2m-2}} \frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}+m-1} \frac{(n+2m-2)!}{(m-1)!\,(m+n-1)!} = \frac{n}{2^{n+2m-2}\,(n+2m-2)} \binom{n+2m-2}{m-1}}$$

zB. $n=4 \quad m=6$

$$\frac{1}{2^{14}} \frac{2}{7} \frac{14!}{5!\;9!} = \frac{1}{\cancel{2^{13}}_{2^{10}}} \frac{\overset{4}{\cancel{2}}}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{10}.11.\cancel{12}.13.\cancel{14}}{\cancel{1.3.4.5}}$$

$$= \frac{11.13}{4.1024}$$

$m=1$

$$\alpha = \frac{1}{2^{n+[illegible]}}$$

$$\alpha_{mn} = \frac{n}{2^{n+2m-2}\,(n+2m-2)} \frac{(n+2m-2)!}{(n+m-1)!\,(m-1)!} = \frac{n}{2^{n+2m-2}} \frac{(n+2m-3)!}{(n+m-1)!\,(m-1)!}$$

$$n! = \cancel{\,}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$$

Näherungsformel für grosse m, n:

$$\lg\left[\frac{(n+2m)!}{n+m!\; m!}\right] = (n+2m)\lg(n+2m) - (n+m)\lg(n+m) - m\lg m$$

$$= (n+m)\lg\frac{n+2m}{n+m} + m\lg\frac{n+2m}{m}$$

In den Anwendungen auf Br. B. wird meist $m \gg n$; dann ist

$$\lg[\,..\,] = (m+n)\lg\left(2\left[\frac{1+\frac{n}{2m}}{1+\frac{n}{m}}\right]\right) + m\lg\left(2\left[1+\frac{n}{2m}\right]\right)$$

$$= (m+n)\lg 2 + (m+n)\left[\begin{array}{l}\frac{n}{2m} - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2m}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{n}{2m}\right)^3 \sim \\ -\frac{n}{m} + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{m}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{n}{m}\right)^3 \cdots\end{array}\right] + \cancel{m}$$

$$+ m\lg 2$$

$$+ m\left[\frac{n}{2m} - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2m}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{n}{2m}\right)^3 - -\right]$$

$$= 2m\lg 2 + n\log 2 + (m+\cancel{n})\left[\begin{array}{l}-\cancel{\frac{n}{2m}} + \frac{3}{8}\frac{n^2}{m^2} - \frac{7}{3.8}\frac{n^3}{m^3} \\ + \cancel{\frac{n}{2m}} - \frac{1}{8}\frac{n^2}{m^2} + \frac{1}{3.8}\frac{n^3}{m^3}\end{array}\right]$$

$$+ n\left[-\frac{n}{2m} + \frac{3}{8}\frac{n^2}{m^2} - \frac{7}{3.8}\frac{n^3}{m^3}\right]$$

$$= \cancel{\lg 2}\,(2m+n)\lg 2 + \underbrace{\frac{1}{4}\left(\frac{n^2}{m} - \frac{n^3}{m^2}\right) - \frac{n^2}{2m} - \frac{3}{8}\frac{m^3}{m^2}}_{-\frac{1}{4}\frac{n^2}{m} - \frac{5}{8}\frac{n^3}{m^2}}$$

$$\alpha_{m,n} = \frac{n}{m\,.\,2^{2m+n}}\, e^{-\frac{n^2}{4m}}$$

$\frac{\alpha}{x} = y$

$4 \cdot \frac{12\cancel{6}}{2^{10} \cdot \cancel{10}} = \frac{3}{2^6} = \frac{3}{64}$

$$J = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\alpha}{x}}}{(2)^x}\, dx = \int_0^\infty 2^{-x} e^{-\frac{\alpha}{x}}\, dx$$

$$(1+x)^{n+2m-2} = \sum_{k=0}^{n+2m-2} \binom{n+2m-2}{k} x^k$$

$$\int_0^\infty$$

~~$\int (1+x)^{n+2m-2} dx = \sum \binom{n+2m-2}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}$~~

$2^x = e^{\lg(2^x)} = e^{x \lg 2}$

$x \lg 2 = z$

$$J = \int_0^\infty e^{-x \lg 2 - \frac{\alpha}{x}}\, dx = \frac{1}{\lg 2}\int_0^\infty e^{-z - \frac{\alpha \lg 2}{z}}\, dz$$

$z + \beta/z = y$

$dz = dy\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\frac{y}{2}}{\sqrt{\frac{y^2}{4}-\beta}}\right)$

$z^2 - zy = -\beta$

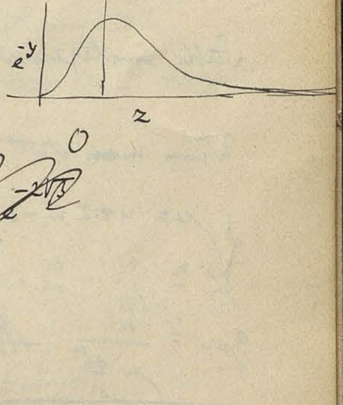
$z = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4}-\beta}$

$= z\, dy$

$$J = \int_0^\infty e^{-(z+\beta/z)}\, dz$$

$$J e^{-2\sqrt{\beta}} = \int_0^\infty e^{-\frac{(z+\sqrt{\beta})^2}{z}}\, dz = \int e^{-\frac{x^2}{(x-\sqrt{\beta})}} dx$$

$J =$ [illegible] $= J(\beta)$



$$\int_0^\infty e^{-z-\beta/z} \cdot \left(1-\frac{\beta}{z^2}\right) dz = \int_{(\infty)}^{\infty} e^{-y}\, dy =$$ ~~$-2e^{-y}\Big|_{2\sqrt{\beta}}^{\infty} = 2e^{-2\sqrt{\beta}}$~~

$y = z + \beta/z$

$\frac{\partial y}{\partial z} = 1 - \frac{\beta}{z^2} = 0$

$z_m = \sqrt{\beta}$

$y_m = 2\sqrt{\beta}$

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial J}{\partial \beta} = \int_0^\infty \frac{e^{-z-\frac{\beta}{z}}}{z}\, dz$$

$$J - \frac{\partial^2 J}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta}\frac{\partial J}{\partial \beta} = 2e^{-2\sqrt{\beta}}$$

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial^2 J}{\partial \beta^2} - \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial J}{\partial \beta} = \beta \int \frac{\sim}{z^2} dz = J$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \beta^2} - \frac{1}{\beta}\frac{\partial J}{\partial \beta} - J = 2e^{-2\sqrt{\beta}}$$

$$\alpha_{mn} = \frac{n}{2^{n+2m-2}(n+2m-2)} \frac{(n+2m-2)(n+2m-3)(n+2m-4)\dots(n+m)}{1.2.3\dots(m-1)\tfrac{2}{2}} \frac{.(n+m-1)\dots 2.1}{(n+m-1)!}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+m-1} \frac{n}{n+2m-2} \frac{(n+2m-2)(n+2m-3)(n+2m-4)\dots(n+m)}{2.4.6\dots(2m-2)}$$

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\dots m-n+1}{n!}$$

$n=1$:

$$\alpha_m = \left(\frac{1}{2}\right)^m \frac{1}{2m-1} \frac{(2m-1)(2m-2)(2m-3)\dots(m+1)}{2.\ 4.\ 6\dots(2m-2)}$$

$m=1$ | $m=2$ | $m=3$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2} \quad \Bigg\| \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{3}\ \frac{3}{2} = \cancel{8}\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} \quad \Bigg\| \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{5}\ \frac{5.4.\cancel{3}}{2.4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$m=4$ | $m=5$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{1}{\cancel{7}}\ \frac{\cancel{7}.\cancel{6}.5}{2.4.\cancel{6}} = \frac{5}{2^7} \quad \Bigg\| \quad \left(\frac{1}{2}\right)^5 \frac{1}{\cancel{9}}\ \frac{\cancel{9}\cdot\cancel{8}\cdot 7\cdot\cancel{6}}{2.4.\cancel{6}\cdot\cancel{8}} = \frac{7}{2^8}$$

---

also einfach indem man den normalen Binomialkoeffizienten der betreffenden Stelle multipliziert mit . $\frac{n}{2^{n+2m-2}(n+2m-2)} = \frac{n}{2^\mu . \mu}$

Wenn ~~man~~ statt dessen die Stelle bezeichnet durch Angabe von

$$\begin{cases} \mu = n+2m-2 \\ n \end{cases} \qquad m = \frac{\mu+2-n}{2} = \frac{\mu-n}{2}+1$$

$$a_{\mu n} = \frac{n}{\mu\, 2^\mu} \binom{\mu}{\frac{\mu-n}{2}} = \frac{(\mu+2-2m)}{2^\mu . \mu} \binom{\mu}{m-1} = \frac{\mu-2(m-1)}{2^\mu . \mu} \binom{\mu}{m-1}$$

$$a_{\mu,n} = \frac{1}{2^\mu} \binom{\mu}{m-1} \left[1 - \frac{2(m-1)}{\mu}\right]$$

$n = \mu+2-2m$

$m-1 = \frac{\mu-n}{2}$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-2} + \binom{n}{2}x^{n-4} + \dots \binom{n}{k}x^{n-2k} + \dots \frac{1}{x^n}$$

$$\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}{2.2^2} + \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^4}{4.2^4} + \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6}{6.2^6} + \dots = \dots - C_4 x^4 + C_2 x^2 + C_0 x^0 + C_2\frac{1}{x^2} + C_4\frac{1}{x^4} + \dots$$

$\mathcal{S}_{n}^{n}$

$$C_k = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nn}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{y}{2}\right)^4 + \frac{1}{6}\left(\frac{y}{2}\right)^6 + \dots = \cancel{8}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+\dots$$

$$\frac{1}{1+z} = 1-z+z^2-z^3-$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\right) = \frac{1}{1-z^2}$$

$$z^2+z^4+z^6\dots = \frac{z^2}{1-z^2}$$

$$\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^6}{6}\dots = \int\frac{z}{1-z^2}\,dz = -\frac{1}{2}\log(1-z^2)$$

$$= \log\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\mathcal{S}(x) = \log\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}}$$

unmöglich, denn $x+\frac{1}{x}$ ist immer > 2

also ist diese Reihe für $\mathcal{S}$ divergent!

Dagegen kann man nehmen:

$y = \frac{x}{\alpha} - \frac{\alpha}{x}$ und setzen:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{y}{2}\right)^4 + \frac{1}{6}\left(\frac{y}{2}\right)^6 - \frac{1}{8}\left(\frac{y}{2}\right)^8 \dots = \dots - C_4x^4 + C_2x^2 - C_0 + \frac{C_2}{x^2} - \frac{C_4}{x^4} \dots$$

$$= \log\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\left(\frac{x}{\alpha}-\frac{\alpha}{x}\right)^2}{4}}} = -\frac{1}{2}\log\left[1-\frac{x^4-2x^2+1}{4x^2}\right] = -\frac{1}{2}\log\left(\frac{-x^4+6x^2\alpha^2-\alpha^4}{4x^2\alpha^2}\right) =$$

$$= \cancel{-\frac{1}{2}\log 6} - \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{2}{3}\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{2}{3}\frac{\alpha^2}{x^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\log 4}_{=\log 2}$$

$x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}$ $\qquad x=\operatorname{tg}\varphi$ $\qquad x=e^{z}$

$\cancel{(\operatorname{tg}^2\varphi)^n+(\operatorname{ctg}^2\varphi)^n=\frac{\sin^{2n}\varphi}{\cos^{2n}\varphi}+\frac{\cos^{2n}\varphi}{\sin^{2n}\varphi}}$ $\qquad e^{2nz}+e^{-2nz}$

$x=e^{i\varphi}$

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{2n}+\frac{1}{(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{2n}}=\cancel{\frac{\cos\varphi}{(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{2n}}}$$

$$=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{2n}+(\cos\varphi-i\sin\varphi)^{2n}$$

$$=\cos\varphi^{2n}-2n\cos\varphi^{2n-2}\sin^2\ldots-\!-\!-$$

$\cancel{\operatorname{tg}\varphi}$

$$e^{2ni\varphi}+e^{-2ni\varphi}=2\cos(2n\varphi)$$

$$\delta=\log 2-\frac{1}{2}\lg\left[1-\frac{2}{3}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$\delta(\varphi)=\lg 2-\frac{1}{2}\lg\left[1-\frac{2}{3}\cos 2\varphi\right]$$

$\cancel{1-\frac{2}{3}(2\cos^2\varphi-1)}$

$\cancel{\frac{5}{3}-\frac{4}{3}\cos^2\varphi}$

$$=A_0+A_2\cos 2\varphi+A_4\cos 4\varphi+\ldots$$

$$f(\cos\varphi)=a_0+a_1\cos\varphi+a_2\cos^2\varphi+\ldots$$

$\cancel{\cos(n+m)\varphi+\cos(n-m)\varphi}$

$\cancel{2\int_0^\pi\cos n\varphi\cos m\varphi\,d\varphi=\frac{\sin(n+m)\varphi}{n+m}+\frac{\sin(n-m)\varphi}{n-m}}$

$$\int\cos\varphi\,f(\cos\varphi)\,d\varphi=a_1\int\cos^2\varphi\,d\varphi$$

$$\int_0^\pi\cos n\varphi\,\lg\left[1-\frac{2}{3}\cos\varphi\right]d\varphi=$$

$$=-\cancel{\frac{\sin n\varphi}{n}\lg[\ldots]}+\frac{2}{3n}\int_0^\pi\frac{\sin n\varphi\sin\varphi}{1-\frac{2}{3}\cos\varphi}\,d\varphi=\frac{2}{3n}\int_0^\pi\frac{\sin n\varphi\sin\varphi\left(1+\frac{2}{3}\cos\varphi\right)}{1-\frac{4}{9}\cos^2\varphi}\,d\varphi$$

~~$1-\frac{2}{3}\cos\psi = \frac{1}{3}\left[1+2(1-\cos\psi)\right] = \frac{1}{3}\left[1+4\sin^2\frac{\psi}{2}\right]$~~

~~$1+\frac{2}{3}\cos\psi = \frac{1}{3}\left[1+2(1+\cos\psi)\right] = \frac{1}{3}\left[1+4\cos^2\frac{\psi}{2}\right]$~~

~~$1-\frac{4}{9}\cos^2\psi = \frac{1}{9}\left[1+4\left(\sin^2\frac{\psi}{2}+\cos^2\frac{\psi}{2}\right)+16\sin^2\frac{\psi}{2}\cos^2\frac{\psi}{2}\right] = \frac{1}{9}\left[5+4\sin^2\psi\right]$~~

~~$\frac{\mu}{4}$~~

$$\sum_{n=-\mu}^{+\mu} a_{\mu n} = \sum n \binom{\mu}{\frac{\mu-n}{2}} \frac{1}{\mu 2^\mu} \quad \Big\| \quad \sum n\, a_{\mu n} = \sum n^2 \binom{\mu}{\frac{\mu-n}{2}} \frac{1}{2^\mu \mu}$$

μ geradzahlig

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^\mu = x^\mu + \binom{\mu}{1} x^{\mu-2} + \binom{\mu}{2} x^{\mu-4} + \cdots \binom{\mu}{\frac{\mu}{2}} + \cdots \frac{1}{x^\mu}$$

$$= x^{2\cdot\frac{\mu}{2}} + \binom{\mu}{1} x^{2\left(\frac{\mu}{2}-1\right)} + \cdots$$

$$\frac{d}{dx}\Big\| \quad \mu\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\mu-1}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = \mu x^{\mu-1} + \binom{\mu}{1}(\mu-2)\, x^{\mu-3} + \cdots \qquad -\mu\frac{1}{x^{\mu+1}}$$

$$\mu\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\mu-1}\left(x-\frac{1}{x}\right) = \mu x^\mu + \binom{\mu}{1}(\mu-2)\, x^{\mu-2} + - \text{—} \qquad - \frac{\mu}{x^\mu}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\qquad\right] = \mu^2 x^{\mu-1} + \binom{\mu}{1}(\mu-2)^2 x^{\mu-3} + \text{—} \qquad + \frac{\mu^2}{x^{\mu+1}}$$

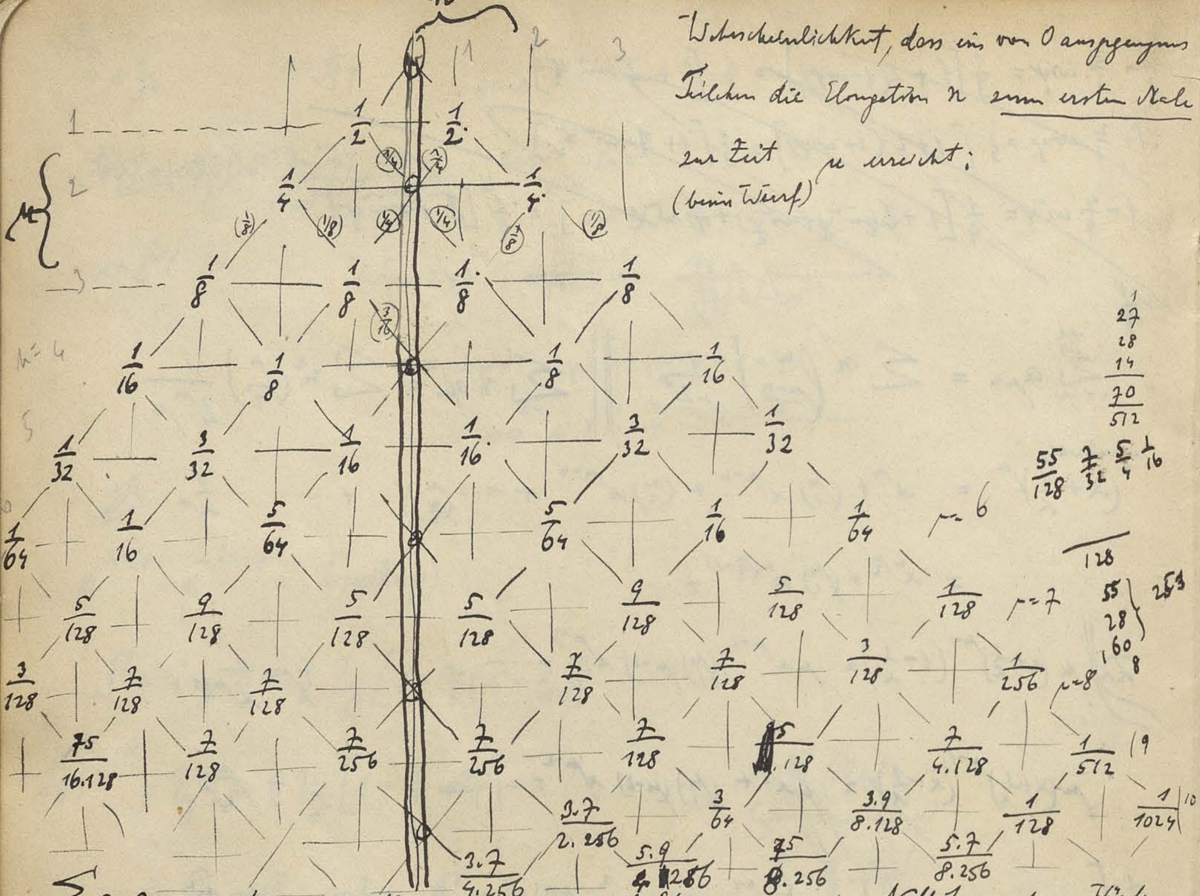
$$\sum n\, a_{\mu n} = \frac{\mu}{2^\mu \mu}\,\frac{1}{4}\cdot \underbrace{\frac{d}{dx}\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\mu-1}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]}\Bigg|_{x=1}$$

$$\left[(\mu-1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\mu-2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right) + \left(x+\frac{1}{x}\right)^{\mu-1}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]\Bigg|_{x=1}$$

$$= 2^\mu$$

$$\sum n\, a_{\mu n} = \frac{1}{4}$$

Wahrscheinlichkeit, dass ein von 0 ausgegangenes Teilchen die Elongation n zum ersten Male zur Zeit μ (beim Wurf) erreicht:



$\sum_n n a_{n\mu} = 1$ Also mittlere maximale Elongation aus der Null-Lage nach μ Würfen

$=$

Wahrscheinlichkeiten, dass ein Teilchen ~~eine erstmalige~~ einseitige Elongation zur Zeit μ noch vorher nicht erreichte erlangt.

$\frac{35}{128}$ $\frac{11}{16}$ 1

35
88
128
251

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{16}$ $\frac{3}{16}$ $\frac{5}{32}$ $\frac{5}{32}$ $\frac{35}{256}$ $\frac{35}{256}$ $\frac{63}{512}$ $= \frac{1}{2}\,\frac{1.3.5.7\ldots(\mu-2)}{2.4.6.8\ldots\mu-1}$ (für ungerade μ)

$\frac{5.7}{256}$ $\frac{7.9}{512}$ $= \frac{1}{2}\,\frac{1.3.5.7\ldots(\mu-1)}{2.4.6\ldots\mu}$ (für gerade μ)

Falls es sich um [illegible] bis zur Zeit $\mu=8$ handelt, betragen die Wahrsch., dass die Maximalelongation +1 erreicht wird zur Zeit

~~0~~ 2 4 6 8

~~$\frac{35}{256}$ $\frac{5}{128}$ $\frac{3}{128}$ $\frac{5}{256}$ $\frac{7}{256}$~~

~~35 10 6 5 7~~

~~0 2 4 6 8~~

~~$\frac{63}{256}$ $\frac{1}{128}$ $\frac{5}{128}$ $\frac{5}{256}$ $\frac{7}{256}$~~

~~10 5 4~~

Mittlere ~~erreichte~~ zur Zeit μ gehabt früher nicht erreichte

Mittlerer Betrag der zur Zeit μ zum ersten Mal erlangten Elongationen (in Bezug auf sämmtliche Teilchen, nicht nur in Bezug auf jene, welche sich eben im Maximal-Elongations Stadium befinden) $= \sum n\, a_{n\mu} = \frac{1}{2}$

Mittlerer Betrag der von Anfang an bis zur Zeit μ zum ersten Mal erreichten Elongationen $= \mu \sum a_{\mu n}$

$= \frac{\mu}{2}$

Wie viel Teilchen haben sich bis zur Zeit ~~$\mu=8$~~ $\mu=4$ eine Maximal Elong. von ~~*~~ $n=1$ erreicht?

bei wiederholtem Anlangen in dieselbe Maximal-Stellung gilt das erste Mal als wirklich

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ / & & \backslash \\ 1 & & 1 \end{array}$$

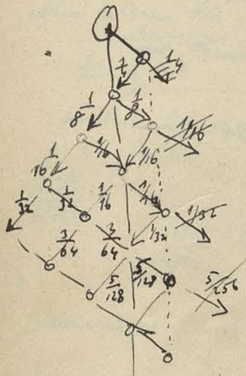
für $\mu=1$ haben wir $1/2$, davon sind aber alle jene abzuzählen welche von hieraus noch weiter aus (bis zur Zeit $\mu=8$) entfernen

$$+\frac{5}{16}-\frac{5}{64}-\frac{2}{128}+\frac{7}{256}=\frac{80-20-4+7}{256}=\frac{63}{256}$$

$$\cancel{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{8}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{16}} = \cancel{\frac{1}{4}\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{8}+\frac{2}{8}\right)=\frac{1}{4}}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{64}-\frac{1}{64}-\frac{7}{128}=\frac{32-4-7}{128}=\frac{21}{128}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)}$$



$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}=\frac{1}{4} \quad \text{bis } \mu=4$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}\right)+\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{2}\right)=$$

$$\frac{1}{4}-\frac{3}{32}+\frac{3}{64}+\frac{1}{32}=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{3}{64}=\frac{16-4+3}{64}=\frac{15}{64}$$

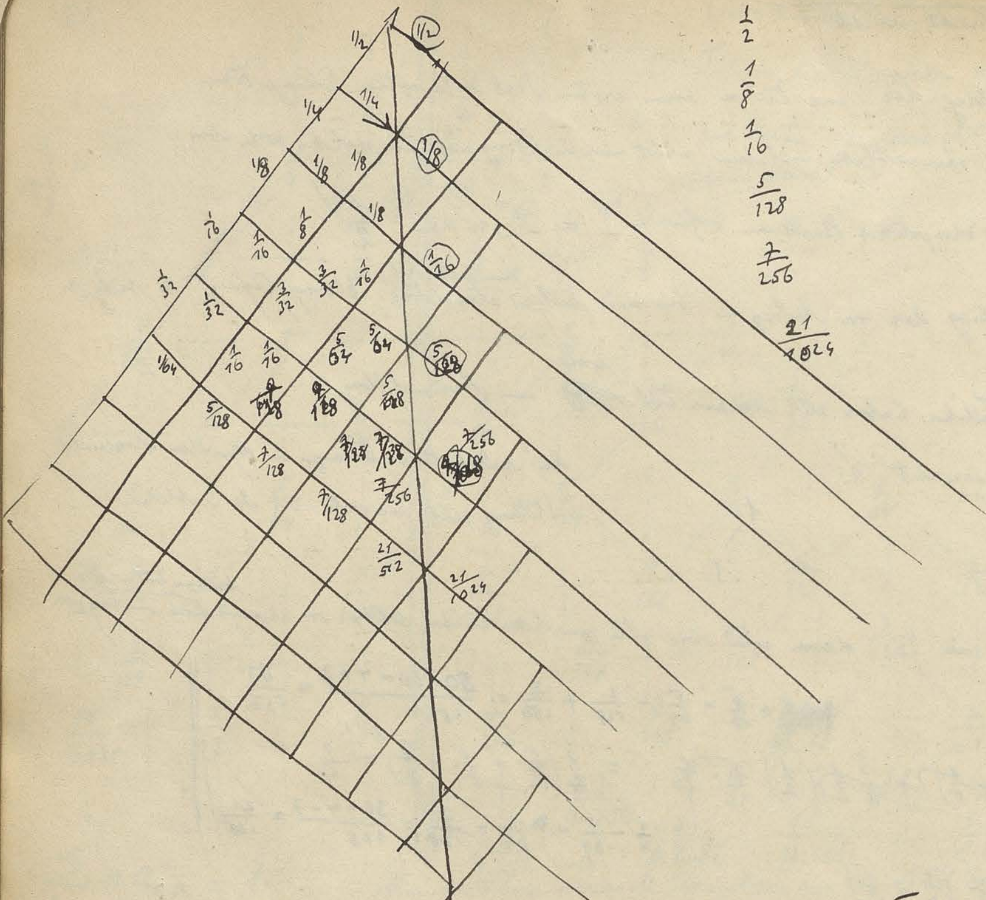
$$\cancel{\frac{1}{4}+\frac{5}{128}-\frac{5}{8}}\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{16}-\frac{1}{4}-\frac{5}{64}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{5}{64}=\frac{16+4-5}{64}=$$

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{5}{128}\right)+\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)+\cancel{\frac{5}{128}\left(1-\frac{1}{2}\right)}=\frac{3}{8}\,\frac{11}{16}-\frac{1}{16}\,\frac{5}{8}=\frac{33-5}{8.16}$$

$$=\frac{28}{128}=\frac{7}{32}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cancel{\frac{5}{128}-\frac{7}{128}}-\frac{6}{64}=\frac{16-4-6}{64}=\frac{6}{64}=\frac{3}{32}$$

$$\frac{7}{32}+\frac{7}{256}=\frac{63}{256}$$



Also erhält man die Wahrscheinlichkeit, dass bis zur Zeit μ das Teilchen die Maximal-Elongation n erreicht habe, indem man die Glieder der Reihe $a_{n,m}$ mit den Coefficienten $\left[1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{2}{16}+\dots-\right.\right.$ [illegible] $\left.\left.a_{1,\mu-n-2}\right)\right]$ multipliziert und dann addiert

$$\frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{5}{128}\right]+\frac{1}{8}\left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\right]+\frac{5}{64}\left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right]+\cancel{\frac{7}{128}\left[1-\frac{1}{2}\right]}$$

$$=\frac{14-5-5}{4.128}+\frac{5-1}{128}-\frac{1}{32}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{8}=\frac{5}{128}+\frac{1}{8}=\frac{21}{128}$$

$$\frac{1}{8}\left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\right]+\frac{3}{32}\left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right]+\frac{9}{128}\left[1-\frac{1}{2}\right]=$$

$$\frac{5}{128}+\frac{3}{32}\ \frac{3}{8}\quad+\frac{9}{256}=\frac{10+9+9}{256}=\frac{28}{256}=\frac{7}{64}+\frac{7}{128}=\frac{21}{128}$$

$$\frac{1}{16}\left[1-\frac{1}{2}-\qquad\right]+\frac{1}{16}\left[\qquad\right]+\frac{7}{128}\left[\qquad\right]=$$

$$\frac{5}{256}+\frac{1}{16}\ \frac{3}{8}\quad+\frac{7}{256}=\cancel{\frac{18}{256}}=\frac{9}{128}$$

$$\cancel{\frac{1}{32}\ \frac{5}{16}}\quad\frac{1}{32}\ \frac{3}{8}+\frac{5}{128}\ \frac{1}{2}=\frac{8}{256}=\frac{1}{32}+\frac{5}{128}=\frac{9}{128}$$

$$\frac{1}{64}\ \frac{3}{8}+\frac{3}{128}\ \frac{1}{2}=\frac{9}{512}$$

$$\frac{1}{256}+\frac{7}{2.256}=\frac{9}{512}$$

126
25 2
18 0
63
9
630
~~512~~
256

$\frac{315}{128}$

Also betragen die Wahrscheinl. einer Maximal Elongation im Zeitraum bis n = 9:

für n = 1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{7.9}{256}$	$\frac{3.7}{128}$	$\frac{3.7}{128}$	$\frac{3.3}{128}$	$\frac{3.3}{1.28}$	$\frac{3.3}{512}$	$\frac{3.3}{512}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{512}$
$\frac{126}{512}=\binom{9}{4}$	$\frac{84}{512}=\binom{9}{3}$		$\frac{36}{512}=\binom{9}{2}$		$\frac{9}{512}=\frac{\binom{9}{1}}{29}$		$\frac{1}{512}$	

Was übrig bleibt von 1, hat die Maximalelongation 0

Dabei wird „maximal" nur in Bezug auf positive Verschiebungen gezählt und negative werden beliebig gross zugelassen

Vielleicht wäre es einfacher wenn es sich um den maximalen Absolutbetrag handeln würde?

Durchschnittl. Max Elong. $=\frac{1004}{512}=\frac{251}{128}$

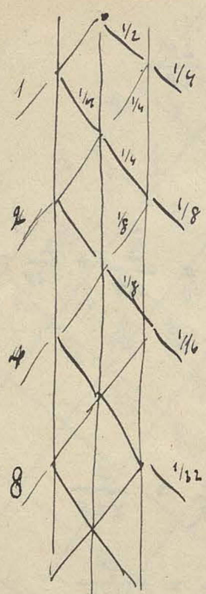
durchschnittl. Elongation : $\frac{315}{128}$

Mittlere " " $=\cancel{\sqrt{\frac{869}{64}}}\ \sqrt{\frac{493}{64}}=\sqrt{\frac{29.17}{64}}$

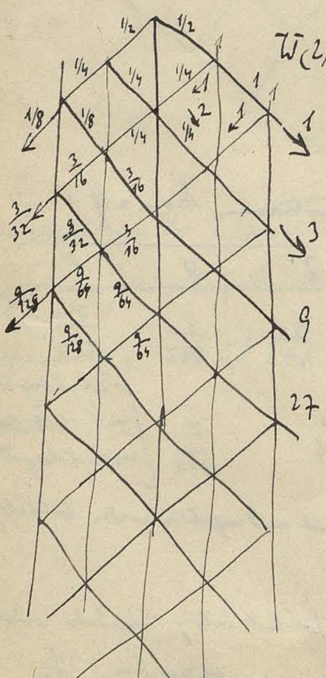
Absolute Maxima

Wahrsch. dass ein Teilchen bis μ

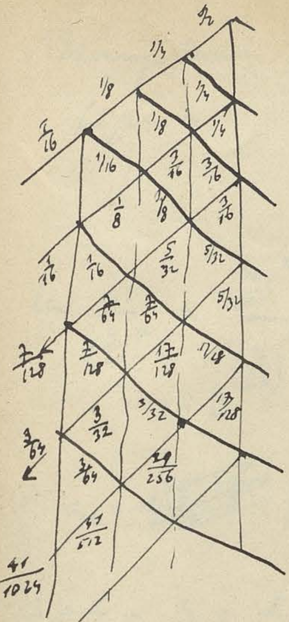
als absolutes Maximum die Elongation ± 1 erreicht

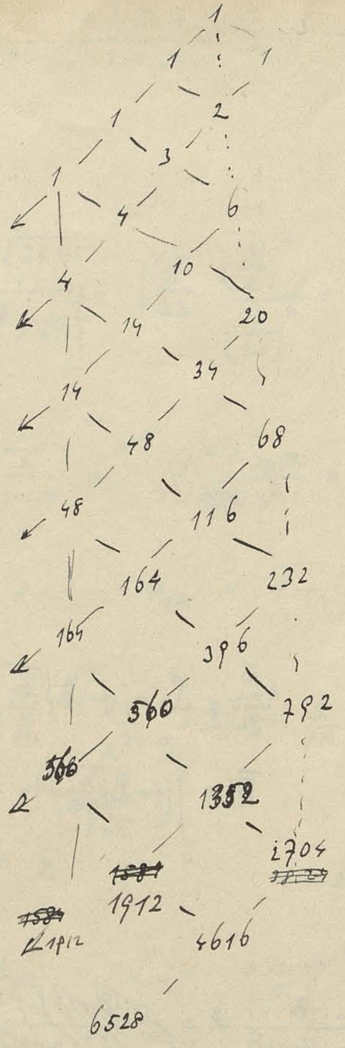


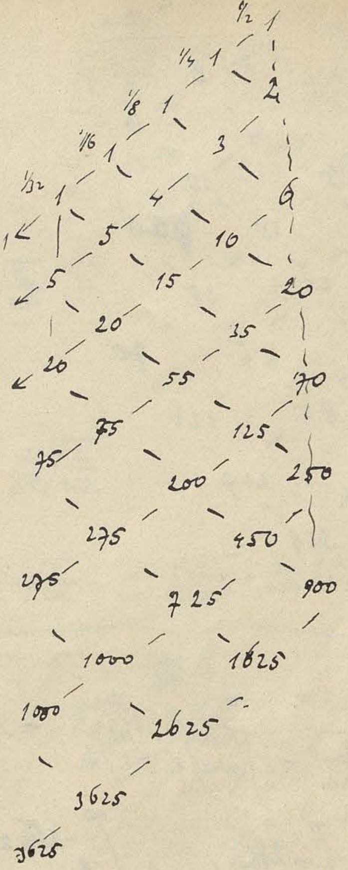
$$W(1) = 1 - 2\left(1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \cdots 1/2^{\left(\frac{\mu}{2}+1\right)}\right)$$



$$W(2) = 1 - 2\left(1/8 + 3/32 + \frac{9}{128} + \frac{27}{4.128} \cdots\right) - W(1)$$



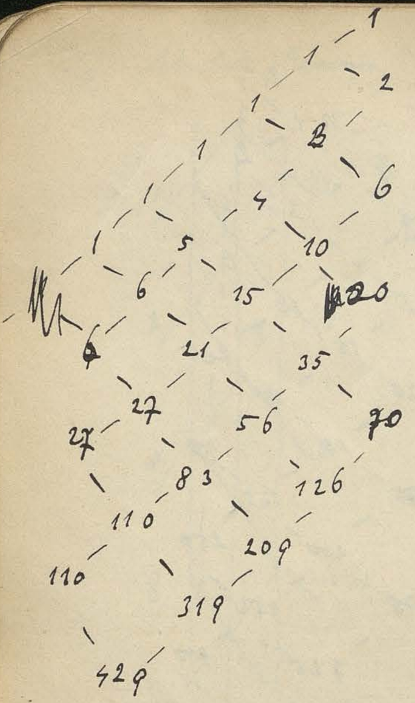




1
1.4
2.7
3.12
5.412

900 1
2175 3
550 2
3625

5.450
= 5.275
· 5.725



429

$$\cancel{\int_0^n \frac{(n-x)}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}} = \int_0^n (n-x)\left(e^{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}}-1\right)dx}$$

$$\overline{E}_n = \int_0^n e^{-2\sqrt{\frac{2}{n\pi}}}dn = 2\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\infty}\frac{e^{-2\sqrt{\frac{2}{\pi}}z}}{z^3}\,dz$$

$$\frac{d\overline{E}_n}{dn} = \delta_n = 1-\cancel{4}\sqrt{\frac{2}{n\pi}} \neq e^{-\cancel{4}\sqrt{\frac{2}{n\pi}}}$$

$$\overline{E}_n = \int_0^n\left(1-\cancel{4}\sqrt{\frac{2}{n\pi}}\right)dn = n-\cancel{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}$$

$$\cancel{\frac{1}{6}\,\frac{4!}{(2!)^2}\,\frac{2\cdot3\cdot}{4}}$$

$$\frac{1}{8}\cancel{\frac{6!}{(3!)^2}\frac{1}{4^3}=\frac{25}{8\cdot42}}$$

$$a_{1n} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\,8\cdot(2n-2)}\frac{F}{2n} = \frac{1}{2n}\,\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdots(2n-2)}{[2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)]^2}\cancel{A} = \cancel{\frac{1}{2n}\,\frac{(2n-2)!}{2^{n-2}\left[\frac{n-2}{2}!\right]^2}} = \frac{1}{2n}\,\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}\,\frac{1}{4^{n-1}}$$

$$\lim a_{1n} = \frac{1}{2n}\,\frac{1}{4^{n-1}}\sqrt{\frac{2}{(2n-2)\pi}}\,2^{2n-2} = \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{1}{(n-1)\pi}}$$

Näherungsformel.

für grosse n:

$n = 11$

$$a_{1n} = \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\,\frac{1}{12} = \cdots \qquad \frac{(n-2)!}{\left[\left(\frac{n-3}{2}\right)!\right]^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\frac{1}{n^2-1}$$

$$= \binom{n-3}{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\frac{n-3}{(n^2-1)(n\pi)}$$

$$\lim \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}!\right)^2} = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi}}{\left[\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}\sqrt{n\pi}\right]^2} = \sqrt{\frac{2}{n\pi}}\,\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\frac{n}{2e}\right)^n} = \sqrt{\frac{2}{n\pi}}\,(2)^n$$

$$a_{1n} = \sqrt{\frac{2}{(n-3)\pi}}\;2^{n-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\frac{\ }{n^2-1} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{2}{n\pi}}$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{5}{128} + \cdots a_{1n} = 1 - \underbrace{\left[\frac{1}{n}\sqrt{\frac{2}{n\pi}} + \frac{1}{n+1}\sqrt{\frac{2}{(n+1)\pi}} + \frac{1}{n+2}\sqrt{\frac{2}{(n+2)\pi}}\cdots\right]}_{R}$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_n^\infty \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{x\pi}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_n^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} = 1\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\Big| = 2\sqrt{\frac{2}{n\pi}}$$

$$S_n = 1 - 1\sqrt{\frac{2}{n\pi}} \neq e^{-\sqrt{\frac{2}{n\pi}}}$$

$$\left[S_n + S_{n-1}\cdot 1 + 2S_{n-2} + 3S_{n-3} + \cdots + (n-1)S_1\right]$$

$$\overline{E}_m = \int_0^n x\left[1 - 2\sqrt{\frac{2}{x\pi}}\right]dx = \frac{x^2}{2} - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{n^2}{2} - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,n^{3/2}$$

Vielleicht ebenso gut: $S_x = e^{-2\sqrt{\frac{2}{x\pi}}}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{x}} = z \qquad x = \frac{1}{z^2}$

$dx = -2\frac{dz}{z^3}$

$$\overline{E}_m = \int_0^n x\,e^{-2\sqrt{\frac{2}{x\pi}}}\,dx = 2\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^\infty \frac{e^{-2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot z}}{z^5}\,dz$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}\varphi\, d\varphi = \int_0^1 \frac{t^{2k}\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1.3.5.\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots 2k}\,\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{k+1}}$$

$$a_{1n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots 2(n-1)}\,\frac{1}{2n}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{t^{2k-2}}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{1}{2k}\,dt$$

$$\sum_{k=1}^{k=m}{}' a_{1k}(m-k+1) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{k=1}^{k=n}{}' t^{2k-2}\,\frac{(n-k+1)}{2k}\,dt$$

$$= \cancel{\frac{2}{\pi}} = \frac{[illegible]}{\pi}\int_0^\infty dx \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{(1+x^2)^{k+1}}\,\frac{1}{k}$$

$$\Sigma = (n+1)\underbrace{\sum_1^n{}' \frac{t^{2k-2}}{2k}} - \frac{1}{2}\sum_1^n{}' \underbrace{t^{2k-2}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{t^2}{4} + \frac{t^4}{6} + \cdots \frac{t^{2n-2}}{2n}}_{S} \quad \Big\| \quad 1 + t^2 + t^4 + \ldots t^{2n-2} = \frac{1-t^{2n}}{1-t^2}$$

$$\frac{1}{t}\,\frac{d}{dt}\left[S t^2\right] = \frac{1-t^{2n}}{1-t^2}$$

4096.16
24576
65536

$$S = \frac{1}{t^2}\int \frac{t-t^{2n+1}}{1-t^2}\,dt$$

$t = \sin\varphi$

$$\int_0^1 \frac{t-t^{2n+1}}{1-t^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin^{2n}\varphi)\sin\varphi\,\cancel{\cos\varphi}\,d\varphi}{\cos^2\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$\cancel{\frac{1.2.3}{4}}$ $\cancel{\frac{1.2.3.4.5}{4.6.8}}$ $\cancel{\frac{6.7}{10.12}}$

$n = 10$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5.7.9.\ldots 19}{2.4.6.8.10\ldots 20}$$

1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{35}{256}$	$\frac{63}{512}$	$\frac{231}{2048}$	$\frac{429}{4096}$	$\frac{6435}{2^{16}} = 65536$	$\frac{12155}{2^{17}}$	$\frac{46189}{2^{19}}$	
|	|			$\frac{5.7}{256}$	$\frac{7.9}{512}$	$\frac{3.7.11}{2^{11}}$	$\frac{3.11.13}{2^{12}}$	$\frac{5.9.11.13}{2^{14}}$	$\frac{[illegible].5.11.13.17}{2^{17}}$	$\frac{11.13.17.19}{2^{19}}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$		$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{11}{3.4}$	$\frac{13}{2.7}$	$\frac{15}{2.8}$	$\frac{17}{9.2}$ $\frac{[illegible]}{6.[illegible]}$	[illegible]	$\frac{19}{20}$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left\{-(n+1)\frac{1}{\sin^2\varphi}\int^{\varphi}\frac{(1-\sin^{2n}\varphi)\sin\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi} - \frac{1}{2}\,\frac{1-\sin^{2n}\varphi}{\cos^2\varphi}\right\}$$

$\binom{n}{k}$ x^{2k-1}

$\cancel{\frac{[1-(1-\delta)^{2n}]\,\delta\,d\omega}{\frac{\delta^2}{2}}} = \cancel{2n\delta^2\,d\omega}$

$\cancel{\frac{1-(1-\delta)^{2n}}{1-(1-\delta)^{2}}} =$

$$\int\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,d\varphi = -\log\cos\varphi$$

$$\int\frac{\sin^{2n+1}\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi} = \cancel{\int(\sqrt{1-x^2})} - \int\frac{(1-x^2)^n\,dx}{x} = -\log x + \sum_1\binom{n}{k}\frac{x^{2k}}{2k}$$

$x=\cos\varphi$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left\{-\frac{(n+1)}{\sin^2\varphi}\sum\binom{n}{k}\frac{\cos^{2k}\varphi}{2k} - \frac{1}{2}\,\frac{1-\sin^{2n}\varphi}{\cos^2\varphi}\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(\alpha+x^2)\sum'\frac{(n-k+1)}{(\alpha+x^2)^{k+1}}\,\frac{1}{k}\right] = \sum'\frac{n-k+1}{(\alpha+x^2)^{k+1}} = (n+1)\,\frac{1-\frac{1}{(\alpha+x^2)^{k+2}}}{1-\frac{1}{\alpha+x^2}} + \frac{d}{dx}\underbrace{\sum\frac{1}{(\alpha+x^2)^k}}_{\frac{1-\left(\frac{1}{\alpha+x^2}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{\alpha+x^2}}}$$

$$W = \frac{V}{v}\int p\,dv = \frac{V}{v}R\theta\log\frac{v}{v_0} = V p\log\left(\frac{v}{v_0}\right)$$

$$NMR = H$$

$$= \frac{vH\theta}{N}\log\left(\frac{v}{v_0}\right)$$

$$= v\cdot 4.10^{-14}\log\left(\frac{v}{v_0}\right)$$

$$\frac{H}{N} = \frac{8{\cdot}3.10^7\cdot 300}{6.10^{23}} = 1{\cdot}4.10^{-16}$$

$$= 4.10^{-14}$$

$7 : 1{\cdot}5 = 4{\cdot}6$

$1+\frac{1}{7}$

0·602 . 2·3

1204

18

1·38

14

1·52

Allgemein: ~~[illegible]~~

Wenn System ausgeht vom Zustand x_0:

Wahrscheinl., dass es den Zustand x zum ersten Male in der Zeit $t \overset{\dots\, t+dt}{}$ erreicht oder überschreitet?

$= \varphi(x_0, x, t)\, dt$ $\qquad \int_0^\infty \varphi(x_0, x, t)\, dt = 1$

Dann ist also ~~[illegible]~~ durchschnittliche Übergangszeit aus x_0 in x: $T = \int_0^\infty t\, \varphi(x_0, x, t)\, dt$

Jene Systeme, welche bis zur Zeit t die Lage x (zum ersten Mal) überschritten haben, aber $x + \Delta x$ nicht erreicht haben, haben also ihre ~~f~~ Maximal Elongation innerhalb der Zeit t in x gehabt || Natürlich nur für $x > x_0$

Also Wahrscheinl., dass ein System innerhalb der Zeit t seine Maximal Elongation in $x \dots x + dx$ gehabt habe $= -\frac{\partial}{\partial x}\int^t \varphi(x_0, x, t)\, dt . dx$

[wobei negative Verschiebung ausscheidet]

also mittlere (durchschnittliche einseitige) Maximalelongation (aus der Nulllage), welche innerhalb der Zeit t erreicht wird

$$\overline{E_m} = -\int_{x_0}^{x_m} x\, dx \frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \varphi(x_0, x, t)\, dt = \cancel{\int\left[-x\int_0^t \varphi\, dt\right]_0^x} + \int_0^x dx \int_0^t \varphi\, dt$$

$$= \iint \varphi(x_0, x, t)\, dx\, dt$$

Wahrscheinl. dass ein System innerhalb $t \dots t + dt$ seine Maximal Elongation in $x \dots x + dx$ gehabt habe $\;\cancel{\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dt}\; -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial t}\, dx\, dt$

Durchschnittl. Quadrat d. Maximal Elongation

$$\overline{E_m^2} = -\int x^2\, dx \frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \varphi(x_0\, x\, t)\, dt = \iint x\, \varphi(x_0, x, t)\, dx\, dt$$

Auch so indem man Pt blech mit Aluminiumblech bedeckt und darauf Ra St. zu fallen lässt; am Al Blech ist minimale Elektronenemission dagegen am Pt starke, sie werden aber durch das Al zurückgehalten

39

$P_0 \ldots P_0(1+\delta)$

Prawdopodobieństwo zgęszczenia pewnego w obrębie przestrzeni ω

41

zależy 1). od przeciętnej temperatury gazu T

2). od przeciętnego ciśnienia p

3). od wielkości δ

4). od wielkości ω

5). od kształtu ω

ad 5). Przyjmujące obręb $\underline{\omega}$ kształtu kulistego uwalniamy się od 5).

Czyli $P = f(T, p, \delta, \omega)$ (zamiast p możnaby też przeciętną gęstoś

Ad 4). Czem większy obręb $\underline{\omega}$ tem więcej drobin w nim, zatem tem ~~więcej~~ mniej stan będzie zbaczać od przeciętnego [Prawo wielkich liczb] nieprawdopodobniejszego.

Ad 3). Dla $\delta = \pm\infty$ $\lim P = 0$ bo to stany niemożliwe (?)
~~Zatem zawsze~~

(1) Według założenia zawsze $f(T, p, \delta, \omega) < f(T, p, 0, \omega)$

(2) A według ostatniego zdania: $\frac{\partial f}{\partial \omega} < 0$

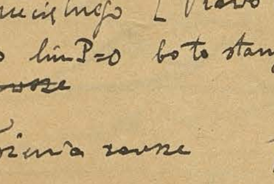
(1) oczywiście musi być wartość maksymalna, która odpowiada systemowi równań charakterystycznemu, niezależnie od ω:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \delta}\right) = 0$$

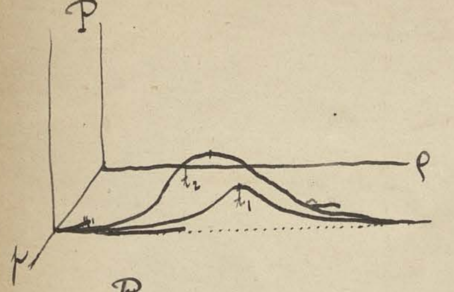
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \delta \partial \omega}\right) = 0$$

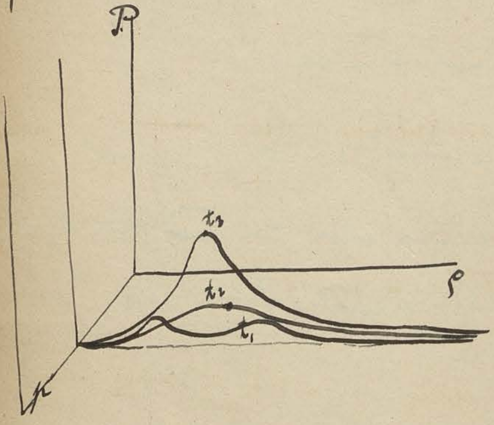
Graficznie: dla każdego danego ω:

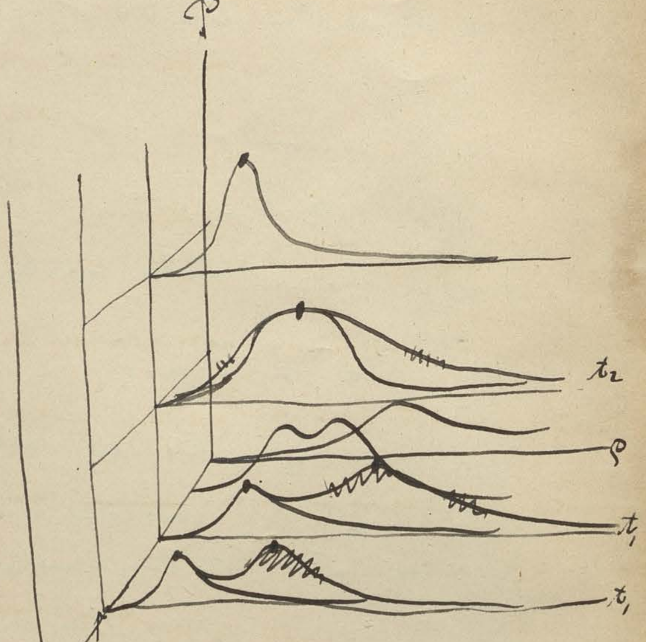
$P = z$
$\delta = x$
$T = \alpha$
$p = y$

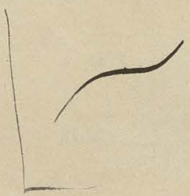


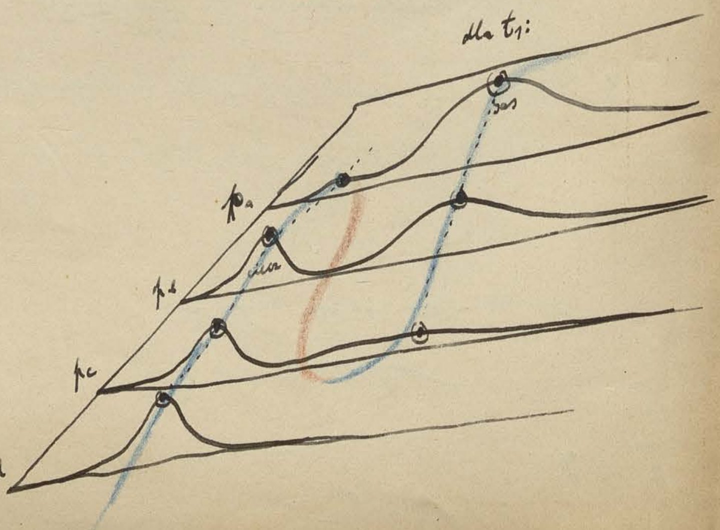
$P_w = f(T, \rho, p)$ system powierzchni z parametrem T

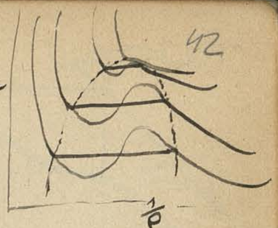












1). Gdy ~~[illegible]~~ ciśnienie kryt. i temp. kryt.

2). Gdy temp. $< T_K$, $p \geqq p_K$: 1 stan (ciekły) możliwy

$p < p_K$: w pewnym obszarze 1 st. c.

dalej 2 st. c. i gazowy

dalej 1 gazowy

~~$1 \; p_K \; 2$~~

3). Gdy temp. $> T_k$: 1 stan gazowy

~~Ten sposób przedstawienia nieracjonalny bo przekreślony w części~~ ——

~~Lepiej: zamiast p używać ρ średniego lub v~~ ?

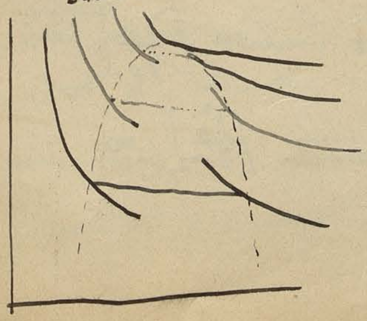
Przy tem oczywiście część —— nie jest wcale objęta

Wynika z tego że punkty najprawdopodobniejsze cieczy i gazu nie potrzebują wcale łączyć się w krzywą ciągłą

Granicą możliwego „Siedeverzug" będzie punkt $t, p = 1$ gdzie: $\frac{\partial P}{\partial \rho}=0$; $\frac{\partial P}{\partial \rho^2}=0$

„Unterkühlung" ~~Condensation~~ $t, p = 2$ gdzie $\frown = 0$

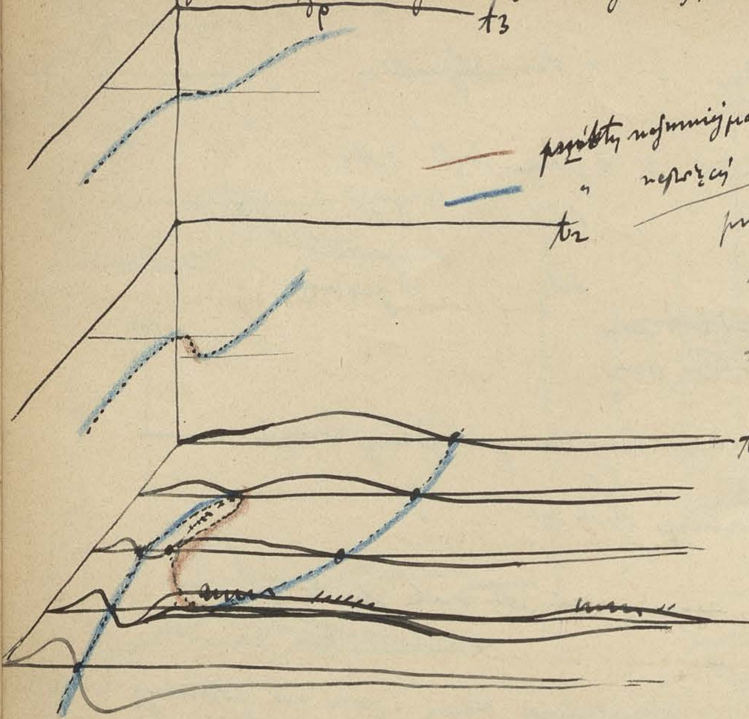
zatem:



W punkcie krytycznym schodzą się dwa punkty infleksyjne zatem musimy tam mieć:

$$\frac{\partial^3 P}{\partial \rho^3}=0$$

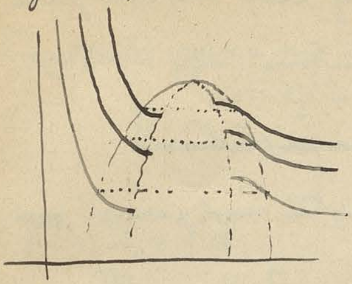
Przedstawiając $\frac{\partial P}{\partial \rho}$ otrzyma się stany najprawdopodob. z punktów zerowych



punkty przesycenia i ...
mają styczną równoległą do ρ :
tam musi być $\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\frac{\partial P}{\partial \rho}=0\right]=0$

W punkcie krytycznym zanika część zerowa brzegu i łączą się niektóre
Tam oczywiście także równocześnie punkt graniczny możliwego przesycenia
zatem także styczna równoległa do osi ρ
Zatem: pod założeniem ciągłości wszystkich pochodnych:
Punkty $\overset{\text{graniczne}}{\text{przesycenia}}$ i przegrzania określone przez warunek $\left[\frac{\partial p}{\partial \rho}\right]_{T=\text{const}}=0$
Tak samo też punkt krytyczny; w nim równocześnie $\left[\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right]_T=0$

Diagram p v zatem następujący:



Co charakteryzuje punkty wrzenia?   Przy danem T takie p gdzie istnieje:

Albo 1). równość P dla stanu ciekłego i gazowego

Ściślej $\int_{ciecz}^{\infty} P\,d\rho = \int_{0}^{gaz} P\,d\rho$

Dopóki $_{ciecz}\int P\,d\rho >_{gaz}\int P\,d\rho$: stan ciekły więcej prawdopod.

więc cała masa będzie ciekła, oczywiście wprawdzie będą cząstki gazowe, ale w całości wpływ ich nieznaczny; tem mniej znaczny czem większa różnica prawdop.

Albo 2). taki układ, żeby kondensacya małej ilości pociągała za sobą kondensacyę łatwiejszą większej ilości gazowej, i odwrotnie.

Albo 3). że kondensacya tem łatwiejsza czem większa w

Dla roztworów zupełnie analogicznie:

całkowite
t, p = ciśn. pary nasyc. [czy też stosunek par względnych ?]

zamiast ρ : stosunkową zawartość w cieczy

Albo piszę lepiej: t, ~~[illegible]~~ p = całkowite ciśn. pary nasyconej

zamiast ρ : zawartość procentową

Mając do czynienia z wzajemnym roztworem dwóch cieczy mamy właściwie jeszcze jedną niezależną zmienną = przeciętna koncentracya stosunkowa całej substancyi ~~i jedną zależną~~

[illegible] = x

~~Rozpada się ewentualnie w dwie warstwy : Faza ciekła dwupowierzchniowa~~

Wtedy przy danem p, danem x, danem T przeciętnie musi panować [illegible] we fazy ciekłej pewna koncentracya y [w razie jednej fazy = x] i pewna ~~[illegible]~~ v.

Zboczenia możliwe w kierunku y i v.

Dla ciała jednorodnego :

Prawdopodob. zgęszczenia (1[illegible]) : p. 637

$$W \sim e^{-\frac{\nu\delta^2}{2} - h\,\delta U} \qquad h = \frac{3N}{2(E-U_0)} \qquad E = U + L$$

$U = U_0 + \delta U$

= energia potencjalna owej konstelacji

|| W Termodynamice zwykle nazywa się U to co tutaj nazywamy E

δU = zmiana przy stałej temperat. t.j. stałej energii kinetycznej

zatem = $\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)\delta v$ gdzie U oznacza zwykłą termodynamiczną „energię wewnętrzną”

Tam mamy : $\frac{\partial U}{\partial v} = A\left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{v=\text{const}} - p\right]$

zatem oczywiście dla gazów idealnych $W \sim e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}}$, ponieważ $\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right) = 0$

Ogólnie :
$$W \sim e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}} \cdot e^{-hA\left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p\right]\delta v}$$

$$\delta v = v\,\delta$$

Tutaj jednak co innego, bo ten składnik oznacza tylko przyrost energii wewn. owego św równocześnie jednak zmniejsza się energ. wewn. reszty ciała ; a w powyższym wzorze δU oznacza sumę tych dwóch składników [t.j. różnicę energii całego ciała]

Po drugie : odnosimy tutaj δU do całej ilości n drobin, tam do jednostki masy.

$\delta U = \delta_1 U + \delta_2 U$

$= \cancel{hA}\left[\cancel{T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p}\right]\Big\{\cancel{\frac{m}{v}}\left[\cancel{\nu\int_0^\delta d\delta - n}\right]\cancel{V}$

$\Big\{\cancel{mn\int\delta v + mn}$

$n \qquad N-n$

$\omega \qquad V-\omega$

objętości właściwa [illegible] :

$$\frac{\omega}{mn} \qquad \frac{V-\omega}{m(N-n)}$$

$$\delta U = m\,n \int_{v_0 = \frac{\omega m}{\nu}}^{v = \frac{\omega m}{n}} \left(T\frac{\partial p}{\partial T} - p\right) dv + m\,(N-n) \int_{v_0}^{v'} \left(T\frac{\partial p}{\partial T} - p\right) dv$$

juil. $\left(T\frac{\partial p}{\partial T} - p\right) = \text{const}:$

$$= \cancel{m\left(T\frac{\partial p}{\partial T} - p\right)\left[n\int\frac{\omega}{m\,n} + \frac{(N-n)V-\omega}{m(N-n)}\right] \cdot V\left(T\frac{\partial p}{\partial T} - p\right)}$$

$$= \left(T\frac{\partial p}{\partial T} - p\right)\underbrace{\left[n\left(\frac{\omega}{n} - \frac{\omega}{\nu}\right) + (N-n)\left(\frac{V-\omega}{N-n} - \frac{V-\omega}{N-\nu}\right)\right]}$$

$$= (\qquad)\left[\omega\left[1 - \frac{n}{\nu}\right] + (V-\omega)\left[1 - \frac{N-n}{N-\nu}\right]\right]$$

$$= (\qquad)\left\{\omega\left[1-(1+\delta)\right] + V\left[1 - \frac{N-n}{N-\nu}\right] - \omega\left[1 - \frac{N-n}{N-\nu}\right]\right\}$$

$$= (\qquad)\left[-\omega\delta + (V-\omega)\left[1 - \frac{1-\frac{n}{N}}{1-\frac{\nu}{N}}\right]\right\}$$

$$= (\qquad)\left[-\omega\delta + (V-\omega)\left(1 - \left[1 - \frac{n}{N}\right]\left[1 + \frac{\nu}{N} + \frac{\nu^2}{N^2} + \frac{\nu^3}{N^3} + \cdots\right]\right)\right]$$

$$= (\qquad)\left[-\omega\delta + (V-\omega)\left(1 - \underbrace{\left[1 + \frac{\nu}{N} + \frac{\nu^2}{N^2} + \frac{\nu^3}{N^3} - \frac{n}{N} - \frac{n\nu}{N^2} - \frac{n\nu^2}{N^3}\cdots\right]}\right)\right.$$

$$= (\qquad)\left[\cancel{-\omega\delta - V\frac{\nu}{N} - \nu}\quad 1 - \frac{\nu\delta}{N} - \frac{\nu^2\delta}{N^2} - \frac{\nu^3\delta}{N^3}\right.$$

$$= (\qquad)\left[-\omega\delta + \underbrace{V\left[\frac{\nu\delta}{N} + \frac{\nu^2\delta}{N^2} + \frac{\nu^3\delta}{N^3}\right]} - \omega\frac{\delta\nu}{N} - \omega\frac{\delta\nu^2}{N^2} + \cdot\right]$$

$V\frac{\nu}{N} = \omega$

$$\left[-\omega\delta + \omega\delta + \frac{\nu}{N}\omega\delta + \frac{\nu^2}{N^2}\omega\delta + \cancel{\cdots} - \omega\frac{\delta\nu}{N} - \omega\frac{\delta\nu^2}{N^2} + \cdots\right]$$

$V - \omega = \omega\left[\frac{N}{\nu} - 1\right]$

$$= 0$$

$$\to \omega\left[-1-\frac{n}{\nu}\right]+(V-\omega)\left[1-\frac{N-n}{N-\nu}\right]=$$

$$\omega\left\{1-\frac{n}{\nu}+\left[\frac{N-\nu}{\nu}\left[\frac{N-\nu-\cancel{N}+n}{N-\nu}\right]\right]\right\}=\omega\left\{1-\frac{n}{\nu}+\frac{n-\nu}{\nu}\right\}=\omega\left\{\frac{\nu-n+n-\nu}{\nu}\right\}=0$$

zatem dopóki $T\frac{\partial p}{\partial T}-p=\text{const} \longrightarrow \delta U=0$

$$T\frac{\partial p}{\partial T}-p=c$$

$$\frac{1}{T}\frac{\partial p}{\partial T}-\frac{p}{T^2}=\frac{c}{T^2}=-\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{p}{T}\right)$$

$$\frac{p}{T}=\frac{c}{T}+fc.(v)$$

$$\frac{p-c}{T}=\alpha+\frac{R}{v}$$

$$pv=cv+RT+\alpha Tv$$

~~Trzeba koniecznie~~ Zatem przy niesk. małych δv pierwszego rzędu: $\delta U=0$!

Mogą być tylko wyrażenia kwadratowe i wyższe

$$\frac{1}{T}=u \qquad \int T^2\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{p}{T}\right)dv=\int\frac{1}{u^2}\frac{\partial(pu)}{\partial u}\cancel{u^2}=\int\frac{\partial(pu)}{\partial u}dv$$

V. d. W. :

$$p=\frac{RT}{v-b}-\frac{a}{v^2} \qquad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v=\frac{R}{v-b} \qquad \frac{RT}{v-b}-\frac{RT}{v-b}+\frac{a}{v^2}$$

$$U=-\int\frac{a}{v^2}dv=-\frac{a}{v}$$

$$-\cancel{m}n\,a\left[\frac{n}{\omega\cancel{m}}-\frac{\nu}{\omega\cancel{m}}\right]+\cancel{m}(N-n)a\left[\frac{N-n}{(V-\omega)\cancel{m}}-\frac{N-\nu}{(V-\omega)\cancel{m}}\right]=$$

$$=-\frac{n\,a}{\omega}(n-\nu)-\frac{(N-n)a}{V-\omega}(\nu-n)=-a\nu\delta\left[\frac{n}{\omega}-\frac{N-n}{V-\omega}\right]=-a\nu\delta\left[\frac{n}{\omega}-\frac{1-\frac{n}{N}}{\frac{\omega}{\nu}-\frac{\omega}{N}}\right]$$

$$=-\frac{a\nu\delta}{\omega}\frac{\left[\frac{n}{\nu}-\cancel{\frac{n}{N}}-1+\cancel{\frac{n}{N}}\right]}{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{N}}=-\frac{a\nu\delta^2}{\omega\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{N}\right)}=-\frac{a\nu^2\delta^2}{\omega\left(1-\frac{\nu}{N}\right)}=-\frac{a\omega}{m^2}\rho^2\delta^2=-\frac{a\nu\rho\delta^2}{m}$$

$$=-\omega\frac{a}{v^2}\cdot\delta^2=$$

Zatem według VdW:

$$W \sim \int e^{-\frac{\nu\delta^2}{2} + \nu\delta^2 \frac{h a \rho}{m}} = e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}}\left[1 - \frac{2 h a \rho}{m}\right]$$

$$h = \frac{3N}{2(E-U_0)} \qquad L = \frac{(E-U_0)}{N} = \frac{3RT}{2} m$$

$$h = \frac{3}{2L} = \frac{1}{RTm}$$

$$p = \frac{Nmc^2}{3} \qquad L = \frac{mc^2}{2}$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{c^2}{3} = RT \;\|\; T = \frac{L}{R}\frac{2}{3m}$$

$$W \sim e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}}\left[1 - \frac{3\alpha}{T}\frac{a\rho}{m}\right] = e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}}\left[1 - \frac{2a\rho}{RTm}\right]$$

jeżeli $T = \frac{2a\rho}{Rm^2}$ wtedy ~~sta~~ przekroczenie stanu stateczności równowagi

$$Tv = \frac{2a}{R}$$

= granica ~~przechładzania~~ przechładzania lub przegrzania

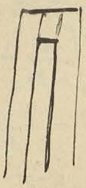
$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = 3\alpha \frac{aR}{m} \cdot \frac{1}{v}$$

dla każdej T tylko pewna gęstość ρ, zatem granica wspólna

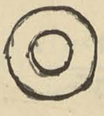
~~$\frac{\partial p}{\partial v} \gtrless 0$ $\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3} \gtrless 0$~~

Ale w rzeczywistości powyżej T_k nie ma już żadnych takich punktów!?

$$\frac{r_a}{r_1} = \sqrt{\frac{250 + 0{\cdot}4\, p_i}{250 - 1{\cdot}3\, p_i}} \qquad p_i = 100 \text{ atm.}$$



$$\sqrt{\frac{290}{120}} = \sqrt{2{\cdot}417} = 1{\cdot}55$$



CO_2: 31·4 73 Atm.

Ethylen: 10·1° 51 Atm.

$$\delta U = -a\left[mn \cdot \frac{1}{v} + m(N-n)\frac{1}{v'} - m\nu\frac{1}{v_0} - m(N-\nu)\frac{1}{v_0'}\right]$$

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{\omega}{mn} \qquad v' = \frac{V-\omega}{m(N-n)} \qquad v_0' = \frac{V-\omega}{m(N-\nu)} = v$$

$$\delta U = -a\left[\frac{m^2n^2}{\omega} + \frac{m^2(N-n)^2}{V-\omega} - \frac{m^2\nu^2}{\omega} - \frac{m^2(N-\nu)^2}{V-\omega}\right]$$

$$= -am^2\left[\frac{\nu^2(2\delta+\delta^2)}{\omega} + \underbrace{\frac{2N(\nu-n)+n^2-\nu^2}{V-\omega}}\right] \qquad \frac{V\nu}{N} = \omega$$

$$= \nu\,\frac{-2N\delta+(2\delta+\delta^2)\nu}{V-\omega} = \nu\,\frac{-2\delta+(2\delta+\delta^2)\frac{\nu}{N}}{\frac{\omega}{\nu}-\frac{\omega}{N}}$$

~~$= \frac{\nu}{\omega}\,-2N\delta+(2\delta+\delta^2)\nu$~~

$$= -\frac{am^2}{\omega}\left[\nu^2(2\delta+\delta^2) + \nu^2\frac{\left[-2\delta+(2\delta+\delta^2)\frac{\nu}{N}\right]}{1-\frac{\nu}{N}}\right] =$$

$$= -\frac{am^2}{\omega}\nu^2\left[(2\delta+\delta^2)\nu - 2\delta \,\Big|\, + (2\delta+\delta^2)\frac{\nu}{N} - 2\delta\frac{\nu}{N} + (2\delta+\delta^2)\frac{\nu^2}{N^2} - 2\delta\frac{\nu^2}{N^2} \cdots\right.$$

$$= -\frac{am^2\nu^2}{\omega}\delta^2 = -a\frac{m\nu}{v}\delta^2 = -am\nu\rho\delta^2$$

$$W \sim e^{-\nu\frac{\delta^2}{2} + amh\nu\rho\delta^2} = e^{-\nu\frac{\delta^2}{2}\left[1-2amh\rho\right]} \qquad mh = \frac{1}{RT}$$

granica stanów statecznych : $\frac{2a\rho}{RT} = 1$

Czemu temu nie czyni zadość punkt krytyczny, gdzie $RTv = \frac{8}{9}a$?

Zatem przy każdej temperaturze byłaby gęstość graniczna, poniżej której collapsus!

Jest to w związku z tem, że w wyrażeniu dla δU znajduje się tylko $\underline{a}$, nie ma jednak $\underline{b}$, zatem tak jak gdyby punkty przyciągające. V. d. W. nie uwzględnia właśnie wzrostu wielkości b przy ogrzaniu! Gdyby się podstawiło wzór dokładny zamiast $\frac{RT}{v-b}$, musiałoby się b zmienić.

ogólnie: $\delta U =$ ~~$m n \frac{\partial U}{\partial}$~~

$$= \left[m n u + m (N-n) U - m \nu u_0 - m (N-\nu) U_0 \right]$$

$$\boxed{\cancel{\begin{aligned} &= m \left[\frac{\partial n u}{\partial n} dn + \frac{\partial [(N-n) U]}{\partial n} dn \right] \\ &= m \nu \, d\delta \, \frac{\partial}{\partial n} \underbrace{\left[n u + (N-n) U \right]}_{NU + n(u-U)} \end{aligned}}}$$

$$= m \left\{ N (U - U_0) + (n u - \nu u_0) - (n U - \nu U_0) \right\}$$

$$U_0 = u_0$$

$$= m \left\{ N (U - u_0) + n (u - U) \right\} = m \{$$

Winkelm. II 2. p. 659!

~~Donnan~~ F. G. Chem News 90 (1904) p. 139 Chem. Ztg Repert. 28 p. 281 (1904)

dodając 1 mol. do N tak samo jak gdyby v się zmniejszyło o $\overset{2v \text{ na}}{}$ $v(1 - \frac{1}{N})$

zatem adiabat. Compr. o $\frac{1}{N}$ części

$$\delta Q = r\,dx + (H - C)\,dT$$

$$v = x s + (1-x) 6$$

$$dv = (s - 6)\,dx = \frac{v}{N} \qquad dx = -\frac{v}{N(s-6)}$$

$$x \; \dots (x + dx)(N + \tfrac{1}{N})$$

$$xN \quad xN + N dx + x + dx$$

$$x(s-6) - v : v = \Delta d : \Delta f$$

~~$xs : 1$~~

$$= 6 : v = \rho : \rho_f$$

$$\Delta \%_d = \frac{dx}{x} + \frac{1}{N} + \frac{dx}{Nx}$$

$$= \frac{1}{N} \left[1 - \frac{v}{x(s-6)} \right] + \frac{dx}{Nx}$$

$$\Delta \%_f = \frac{v}{N x (s-6)}$$

Boltzmann II p. 174

$$\left[v e^{-\frac{b}{v} - \cancel{\frac{5b^2}{16v^2}}}\right]^{n} = \prod_{\nu=0}^{\nu=n-1}\left(v - 2\nu m b + \frac{17\nu^2}{16}\right) = W$$

$$\lg W = \sum_{0}^{n-1} \lg\left(v - 2\nu m b + 17\frac{\nu^2 m^2 b^2}{16 v}\right)$$

$$= \sum_{0}^{n-1} \lg v - \frac{2\nu m b}{v} - \frac{15\nu^2 m^2 b^2}{16 v^2}$$

$$= n \lg v - \frac{n^2 m b}{v} - \frac{5 n^3 m^2 b^2}{16 v^2}$$

dla $nm = 1$:

$$= n\left[\lg v - \frac{b}{v} - \frac{5b^2}{16v^2}\right]$$

$$W_f = v_f^{\,n}\, e^{-n\left(\frac{b}{v_f} + \frac{5b^2}{16v_f^2}\right)} = \left\{v_f\left[1 - \frac{b}{v} - \frac{5b^2}{16v^2} + \frac{b^2}{2v^2}\right]\right\}^n$$

$$W_g = v_g^{\,n}\, e^{-n\left(\frac{b}{v_g} + \frac{5b^2}{16v_g^2}\right)} \qquad = v_f - b + \frac{3}{16}\frac{b^2}{v}$$

~~[illegible]~~

$$\frac{1}{v_f} - \frac{1}{v_g} = \frac{rT}{2a}\left[\lg\frac{v_g}{v_f} - b\left(\frac{1}{v_g} - \frac{1}{v_f}\right) - \frac{5}{16}b^2\left(\frac{1}{v_g^2} - \frac{1}{v_f^2}\right)\right]$$

$$W \sim e^{-\nu\frac{\delta^2}{2} - h\,\delta U}\,d\delta$$

Albo dalej, trzymając się wyłącznie oznaczenia termodynamicznego

~~U jest~~ t.j. oznaczając E całą energię wewnętrzną, L energię kinetyczną

$$W \sim e^{-\nu\frac{\delta^2}{2} - h\,\delta(E-L)}\,d\delta$$

(~~Robiąc założenie że L się nie zmienia przy zgniataniu~~)

L jest miarodajnem dla temperatury :

Całkowita $\underbrace{\text{energia } E \text{ jest supponowana}}$ stałą, zatem temp. dla każdego δ inne!

~~$\delta U = \frac{\partial U}{\partial v} dv$~~ zatem wszystkie zmiany są adiabatyczne | t.j. temp. dla w będzie inna niż dla V-w

ale czy także ściśnienie w w i rozrzedzenie w V-w z osobna wzięte będą adiabatyczne?

~~$U_2 + U_1 + \ldots$~~

$$E_2 - E_1 = P_1^2 = \text{praca wykonana} = 0$$

~~wykonując sobie~~

~~Jeżeli substancja~~

$$\delta Q = c_v\,dT + AT\frac{\partial p}{\partial T}dv$$

Jeżeli Temp. pozostaje niezmienioną, ciepło zużywa się wyłącznie na ~~prac~~ zmianę objętości, więc na zmianę energii potencyalnej U, i na pracę zewnętrzną A p dv podczas gdy L pozostaje stałem

zatem $\frac{\partial U}{\partial v} = A\left(T\frac{\partial p}{\partial T} - p\right)$ | [illegible] $=$

W ogólności: $\delta U =$

Wzór (18) pg 639

$$W \sim e^{-\frac{v\delta^2}{2}\left[1+\frac{\alpha\nu}{v}+\frac{15}{32}\frac{\alpha^2\nu^2}{v^2}-2hC\nu\right]}\,d\delta$$

$C = \frac{a\,m^2}{[illegible]}$

w tem $\nu\alpha = 2b$

$$e^{\left[1+2\frac{b}{v}+\frac{15}{8}\frac{b^2}{v^2}-2hC\nu\right]} =$$

$=$ ~~$\left[1+2\frac{b}{v}+\frac{15}{8}\frac{b^2}{v^2}+2\frac{b^2}{v^2}\right]e^{1-2hC\nu}$~~

$$2hC\nu = \frac{2a\,m^2\nu}{RTm} = \frac{2a\varrho}{RT} = \frac{2a}{RT.v}$$

Zatem stany przesycenia będą określone równaniem

$$\frac{2a}{RT.v} = 1 + 2\frac{b}{v} + \frac{15}{8}\frac{b^2}{v^2}$$

to z ograniczeniem do pierwszego wyrazu to samo co przedtem!

$$v^2 + 2\left(b - \frac{a}{RT}\right)v + \frac{15}{8}b^2 = 0$$

$$v = -\left(b-\frac{a}{RT}\right) \pm \sqrt{\left(b-\frac{a}{RT}\right)^2 - \frac{15}{8}b^2}$$

ażeby pierwiastek rzeczywisty, musiałoby być +

$\frac{a}{RT} \gg b$ więc istnieje granica temperatury, powyżej której nie ma pierwiastka rzeczywistego, mianowicie:

$$\left(\frac{a}{RT}\right)^2 - \frac{2ab}{RT} - \frac{7}{8}b^2 = 0$$

$$\frac{a}{RT} = b\left[1+\sqrt{\frac{15}{8}}.\right]$$

tam będzie $v = b\sqrt{\frac{15}{8}}$

powinna być identyczna z temperat. krytyczną dla której przy tem samem przybliżeniu:

~~$p+\frac{a}{v^2} = RT$~~ ~~$p = \frac{RT\,v^3}{v-b}$~~

$$p + \frac{a}{v^2} = RT\left[\frac{1}{v} + \frac{b}{v^2} + \frac{5}{8}\frac{b^2}{v^3}\right]$$

$$\frac{2a}{v^3} = RT\left[\frac{1}{v^2} + \frac{2b}{v^3} + \frac{15b^2}{8v^4}\right]$$

$$\frac{6a}{v^4} = RT\left[\frac{2}{v^3} + \frac{6b}{v^4} + \frac{15b^2}{2v^5}\right]$$

$$\frac{2a}{v} = RT\left[1 + \frac{2b}{v} + \frac{15b^2}{8v^2}\right]$$

$$\frac{6a}{v} = RT\left[2 + \frac{6b}{v} + \frac{15b^2}{2v^2}\right]$$

$$\left[2 + \frac{6b}{v} + \frac{15b^2}{2v^2}\right] = 3\left[1 + \frac{2b}{v} + \frac{15}{8}\frac{b^2}{v^2}\right]$$

~~$5 + 16\frac{b}{v} + \frac{11.15}{8}\frac{b^2}{v^2} = 0$~~

Zatem dla temp. krytycznej:

$$\frac{b^2}{v^2} + \frac{8.16}{11.15}\frac{b}{v} + \frac{40}{11.15} = 0$$

$$\frac{b}{v} = -\frac{64}{11.15} \mp \sqrt{\underbrace{-40.11.15 + (64)^2}_{<1\,!}}$$

$$\frac{b}{v} \mp \quad \text{ujemne!}$$

$$\begin{array}{r} 165.40 \\ \hline -6600 \\ +4096 \\ \sqrt{25{,}04} = 5{\cdot}01 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 64^2 = 36 \\ 48\;\; \\ 16 \\ \hline 4096 \end{array}$$

$$1 - \frac{15}{8}\frac{b^2}{v^2} = 0$$

$$\frac{b}{v} = \sqrt{\frac{8}{15}}$$

$$\frac{a}{RT} = \frac{v}{2}\left[1 + \frac{2b}{v} + \frac{15}{8}\frac{b^2}{v^2}\right] = \frac{b}{2\frac{b}{v}}\left[\cdots\right]$$

$$= \frac{b}{2\sqrt{\frac{8}{15}}}\left[1 + 2\sqrt{\frac{8}{15}} + \frac{15}{8}\frac{8}{15}\right] = b\left[1 + \sqrt{\frac{15}{8}}\right]$$

Teraz zadość czyni temperat. krytyczna według mego równania!

$$\cancel{p = -\frac{a}{v^2}} \qquad p = -\frac{a}{b^2}\frac{8}{15} + \frac{a}{b^2\left(1+\sqrt{\frac{15}{8}}\right)}\left[\sqrt{\frac{8}{15}} + \frac{8}{15} + \frac{5}{\cancel{8}}\frac{\cancel{8}}{15}\sqrt{\frac{8}{15}}\right]$$

$$= \frac{a}{b^2}\left\{\frac{\cancel{\frac{8}{15}} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{8}{15}} - \cancel{\frac{8}{15}} - \sqrt{\frac{8}{15}}}{1+\sqrt{\frac{15}{8}}}\right\} = \frac{a}{b^2}\frac{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{15}}}{1+\sqrt{\frac{15}{8}}}$$

$$= \frac{a}{3b^2}\frac{1}{\frac{15}{8}+\sqrt{\frac{15}{8}}}$$

$$\frac{RT_k}{p_k v_k} = \frac{a\left(\frac{15}{8}+\sqrt{\frac{15}{8}}\right)}{b\left(1+\sqrt{\frac{15}{8}}\right)\frac{a}{3b^2}\;b\sqrt{\frac{15}{8}}} = 3\,\frac{1+\sqrt{\frac{15}{8}}}{1+\sqrt{\frac{15}{8}}} = 3$$

podczas gdy według zwykłego v. d. W.:

$$\frac{RT_k}{p_k v_k} = \frac{8a \quad 27b^2}{27b \quad a \cdot 3b} = \frac{8}{3} = 2{\cdot}666$$

Równanie określające zatem ~~stany~~ granicę możliwego przesycenia będzie:

$$\frac{2a}{RTv} = 1 + \frac{2b}{v} + \frac{15}{8}\frac{b^2}{v^2}$$

w tym: $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = +\frac{2a}{v^3} - RT\left[\frac{1}{v^2}+\frac{2b}{v^3}+\frac{15 b^2}{8 v^4}\right]$

to znaczy że ~~stany~~ granica przesycenia tam

gdzie $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = 0$!!! co się przez się rozumie!

to samo co przedtem geometrycznie wywiedziono

Czy to ogólnie ?

Jaki ewentualny związek ?

~~Ctr~~ Do określenia warunków parowania:

$\frac{1}{v} = \rho$

$$W \sim e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}\left[1+\frac{2b}{v}+\frac{15}{8}\frac{b^2}{v^2}-\frac{2a}{RTv}\right]} = e^{+\frac{\nu\delta^2}{2}\cdot\frac{\partial p}{\partial v}\cdot\frac{v^2}{RT}} = e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}\cdot\frac{\partial p}{\partial \rho}\cdot\frac{1}{RT}}$$

$$= e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T hm}$$

Czy to może być ogólnym wzorem ?

$p = \rho RT$

$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right) = RT$ $\qquad e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}}$

Prawdop. dla dwóch specyalnych stanów (ciecz-para) o równy— . –

~~$\left(\frac{\nu}{n}\right)^n \frac{e^{n-\nu}}{\sqrt{2n\pi}}$~~

pag 639: Ad (17): i (18): to tylko ważne dla małych δ. Jak trzeba by te wzory uogólnić dla znacznych zmian gęstości jakie właśnie przy skraplaniu następują?

Ilość kombinacyj : $A = \left(\frac{\nu}{n}\right)^n \frac{e^{n-\nu}}{\sqrt{2n\pi}}$

Az

$$\log A = n\left[\log \nu - \log n\right] + n - \nu - \frac{1}{2}\log n$$

Jeśli n i ν bardzo duże znika $\frac{1}{2}$ w porównaniu n

pozostaje, oznaczając $\frac{n}{\nu} = \varepsilon$

$$\log A = \nu\left\{\varepsilon \log\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon - 1\right\}$$

~~$B = \prod_{k=0}^{n-1}\left[\nu - \alpha k + \frac{17}{64}\frac{\alpha^2 k^2}{\nu}\right]$~~

$$\log B = \sum_{k=0}^{n-1} \log\left[\nu - \alpha k + \frac{17}{64}\frac{\alpha^2 k^2}{\nu}\right]$$

$\frac{b}{b}$ $\frac{a}{b}$ $\frac{b}{a}$

$\frac{1}{2}\frac{\frac{n}{2}-1}{n-1} \cdot \frac{1}{2}\frac{\frac{n}{2}+1}{n+1}$ $\frac{1}{2}\frac{\frac{n}{2}}{n-1}$ $\frac{1}{2}\frac{\frac{n}{2}}{n+1}$

$\frac{\text{Kon. a}}{\text{Kon. b}}$ w 2 untal.

$$\frac{\cancel{2}\,\frac{\frac{n}{2}-1}{n-1} + \frac{n}{4}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}\right)}{\frac{\frac{n}{2}+1}{n+1} + \cdots} = \frac{2(n-2)(n+1) + n\,2n}{2(n+2)(n-1) + 2n^2} = \frac{2n^2 - n - 2}{2n^2 + n - 2} =$$

Ad Reinganum: Über d. v. W. f. R. e. Fl. p. 876

(to samo co Boltzmann II p. 174)

Analogia: ciągnie się kule białe i czarne, z których początkowo równe ilości ale po wyciągnięciu czarnej odkłada się ją ~~[illegible]~~ podczas gdy po wyciągnięciu białej kładzie się ją napowrót i dodaje jeszcze nową białą.

Tak każde wyciągnięcie zmienia prawdp. następnego wyciągnięcia.

	cz	b
1).	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2). jeśli była czarna	$\frac{\frac{n}{2}-1}{n-1}$	$\frac{\frac{n}{2}}{n-1}$
jeśli była biała	$\frac{\frac{n}{2}}{n+1}$	$\frac{\frac{n}{2}+1}{n+1}$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{2}-1}{n-1}+\frac{\frac{n}{2}}{n+1}\right) \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{2}}{n-1}+\frac{\frac{n}{2}+1}{n+1}\right)$$

$$\frac{\frac{n^2}{2}-n+\cancel{\frac{n}{2}}-1+\frac{n^2}{2}-\cancel{\frac{n}{2}}}{n^2-1} \qquad \frac{n^2}{2}+\cancel{\frac{n}{2}}+\frac{n^2}{2}+n-\cancel{\frac{n}{2}}-1$$

prawdp. wyciągnięcia $\frac{cz}{b}$ przy drugiem wyciągnięciu, nie wiedząc jaka była pierwsza $\Big\}$ $= \frac{1}{2}\,\frac{n^2-n-1}{n^2-1} \qquad \frac{1}{2}\,\frac{n^2+n-1}{n^2-1}$

Zatem ~~prawdp.~~ ilość czarnych w dwóch naciąg. (często powtórzonych) / do ilości białych " " " " $= \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{n^2-n-1}{n^2-1}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{n^2+n-1}{n^2-1}}$

prawdp. otrzymania czarnej w dwóch wstecz / prawdp. " białej " " $= \longrightarrow = \dfrac{2n^2-n-2}{2n^2+n-2}$

więc zupełnie co innego niż $\dfrac{n^2-n-1}{n^2+n-1}$

N drobin w objętości V przy temperat. T

jakie prawdop. że w objętości $\underline{v}$ znajdzie się ich $\underline{n}$?

Przy dopuszczeniu znacznych zmian gęstości jakie przy skropleniu zachodzą.

Chodzi o porównanie prawdop. stanu ciekłego i gazowego.

$$W \sim \left(\frac{\nu}{n}\right)^n \frac{e^{n-\nu}}{\sqrt{2n\pi}} \prod_{k=0}^{n-1}\left[1-\frac{\alpha k}{v}+\frac{17}{64}\frac{\alpha^2k^2}{v^2}\right]\prod_{k=0}^{N-n-1}\left[1-\frac{\alpha k}{V-v}+\frac{17}{64}\frac{\alpha^2k^2}{(V-v)^2}\right](E-U_0)^{\frac{3N}{2}-1}$$

$$n = m(1+\delta)$$

$$W \sim \left(\frac{\nu}{m}\right)^m\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^m \frac{e^{m-\nu}}{\sqrt{2m\pi}}\frac{e^{m\delta}}{\sqrt{1+\delta}} \prod \cdots \qquad (E-U_{00})^{\frac{3N}{2}-1} e^{-h\delta U}$$

$$\left(\frac{\nu}{m}\right)^m \frac{e^{m-\nu}}{\sqrt{2m\pi}} \underbrace{(1+\delta)^{-m\delta\cdot\frac{1}{\delta}}}_{e^{-m\delta} \quad e^{m\delta}}$$

$$\nu\delta\lg(1+\delta) = \nu\delta^2$$

$$\lg W = m(1+\delta)\left[\lg\nu - \lg m - \lg(1+\delta)\right] +$$

$$(m+m\delta-\nu) - \lg\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}\lg m - \frac{1}{2}\lg(1+\delta) \quad + \cdots$$

$$= m\lg\frac{\nu}{m} + m\delta\lg\frac{\nu}{m} \underbrace{- m(1+\delta)\underbrace{\lg(1+\delta)}_{\left[\delta - \frac{\delta^2}{2} - \cdots\right]} + m\delta}_{-m\frac{\delta^2}{2}}$$

$$+ m - \nu$$

$$- \lg\sqrt{2\pi m}$$

$$W=\left(\frac{\nu}{m}\right)^{m}\frac{e^{m-\nu}}{\sqrt{2\pi m}}\cdot\left(\frac{\nu}{m}\right)^{m\delta}e^{-\frac{m\delta^2}{2}}$$

$$-\nu(1+\delta)\underbrace{\lg(1+\delta)}_{\delta-\frac{\delta^2}{2}}+\nu\delta-\lg\sqrt{2\pi n}$$

$$=\nu\left[\cancel{\delta}-\delta+\frac{\delta^2}{2}-\delta^2\right]$$

$$\left(\frac{e}{1+\delta}\right)^{\nu(1+\delta)}e^{-\nu}$$

$$\nu(1+\delta)\left(1-\delta+\frac{\delta^2}{2}\right)=$$

$$\nu\left(1-\cancel{\delta}+\frac{\delta^2}{2}+\cancel{\delta}-\delta^2\right)=\nu\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right)$$

$$e^{\nu\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right)}$$

$$W\sim\left(\frac{\nu}{n}\right)^{n}\frac{e^{n-\nu}}{\sqrt{2\pi n}}\prod_{k=0}^{n-1}\left[1-\frac{\alpha k}{\nu}+\frac{17}{64}\frac{\alpha^2k^2}{\nu^2}\right]e^{-a^2\rho}$$

$\nu =$ $\overset{\text{[illegible]}}{\text{ilość}}$ w gazie przypadająca na 1cm² [pod założeniem że gaz idealny]

$n=\nu\varepsilon$ $\quad\varepsilon=$ Condensations coefficient

$\quad=\nu\varepsilon_0(1+\delta)$

$$W\sim\left[\frac{1}{\varepsilon_0(1+\delta)}\right]^{\nu\varepsilon_0(1+\delta)}\frac{e^{\nu[\varepsilon_0(1+\delta)-1]}}{\sqrt{2\pi\nu\varepsilon_0(1+\delta)}}\prod\ldots$$

$$\lg W=-\nu\varepsilon_0(1+\delta)\left[\lg\varepsilon_0+\delta-\frac{\delta^2}{2}+\frac{\delta^3}{3}\ldots\pm1\right]-\nu\;-\lg\sqrt{2\pi\nu\varepsilon_0}$$

~~$n=-\nu-\lg\sqrt{2\pi\nu\varepsilon_0}-\nu\varepsilon_0\lg\varepsilon_0-\nu\varepsilon_0\delta(1+\lg\varepsilon_0)+$~~ $-\lg\sqrt{\ldots}$

$$=-\nu\left\{\varepsilon_0\lg\varepsilon_0+\cancel{\varepsilon_0\delta}-\frac{\varepsilon_0\delta^2}{2}+\delta\varepsilon_0\lg\varepsilon_0+\delta\varepsilon_0^2-\varepsilon_0-\cancel{\varepsilon_0\delta}+1\right\}$$

$$=-\nu\left\{\frac{\varepsilon_0\delta^2}{2}+\varepsilon_0\lg\varepsilon_0(1+\delta)-\varepsilon_0+1\right\}-\lg\sqrt{2\pi\nu\varepsilon_0}$$

~~ε_0~~

$$W=\frac{e^{-\frac{\nu\varepsilon_0\delta^2}{2}}\,e^{\varepsilon_0\nu-\nu}}{\varepsilon_0^{\nu\varepsilon_0}\,\varepsilon_0^{\nu\varepsilon_0\delta}\sqrt{2\pi\nu\varepsilon_0}}\underbrace{\prod\ldots\ldots}_{\cancel{=e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}}\frac{\alpha n}{\nu}}}$$

$$\lg \prod = \sum_{k=0}^{n} \lg\left[1 - \frac{\alpha k}{v} + \frac{17}{64}\frac{\alpha^2 k^2}{v^2}\right]$$

$$= n \lg v + \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left(-\frac{\alpha k}{v} + \frac{17}{64}\frac{\alpha^2 k^2}{v^2} - \frac{\alpha^2 k^2}{2v^2} \cdots \right)}_{= -\frac{\alpha k}{v} - \frac{15}{64}\frac{\alpha^2 k^2}{v^2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Sigma k &= \frac{n^2}{2} \\ \Sigma k^2 &= \frac{n^3}{3} \end{aligned}}$$

$$= n \lg v - \frac{\alpha n^2}{2v} - \frac{5}{64}\frac{\alpha^2 n^3}{v^2}$$

$$= n \lg v$$

$$\overline{W} \neq v^n e^{-\frac{\alpha n^2}{2v} - \frac{5}{64}\frac{\alpha^2 n^3}{v^2}} \left(\frac{e}{\varepsilon_0}\right)^{\varepsilon_0 v} \frac{1}{e^v}\sqrt{\frac{v\varepsilon_0}{2\pi}} \; e^{-\frac{v\varepsilon_0 \delta^2}{2} - v\varepsilon_0 \delta \lg \varepsilon_0} \; d\delta \; e^{-\alpha v \varepsilon_0 (1+\delta)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\delta - \beta\delta^2} d\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta\left(\delta + \frac{\alpha}{2\beta}\right)^2} \cdot e^{\frac{\alpha^2}{4\beta}} d\delta$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \cdot e^{-\frac{\alpha^2}{4\beta}}$$

Po scałkowaniu wprowadzić ε w zależności od pT według równania VdW.

Otrzyma się tak równanie zawierające $f(p\,T\,v) = 0$

co razem z VdW oznaczy punkty ~~$f(p\,T) = 0$~~ $T = \varphi(p)$

Boltzm. p 173

$$W = \prod_{\nu=0}^{\nu=n-1}\left(v - 2\nu m b + \frac{17\nu^2 m^2 b^2}{16 v}\right) \cdot e^{-2han}$$

= [illegible] n Mol. [illegible] $\underline{\underline{v}}$ [illegible] Vol. $\underline{\underline{1}}$ [illegible]

[illegible] ?

$$\log W = \sum \log\left(v - 2\nu m b + \frac{17\nu^2 m^2 b^2}{16 v}\right) - 2hAn$$

$nm = 1$

$$= \log v - \frac{b}{v} - \frac{5b^2}{16v^2} - [illegible] \frac{2\mu U}{nT}$$

$$\prod\left(v_g - 2b + \frac{17}{16}\frac{b^2}{v_g}\right) = \prod\left(v_f - 2b + \frac{17}{16}\frac{b^2}{v_f}\right] e^{4hmA\left(\frac{1}{v} - \cdot\right)}$$

$\frac{78}{28} \cdot 1.3$

$$\log \underbrace{v - \frac{b}{v}}_{} - \frac{5b^2}{16v^2} = \frac{A}{Tv} + \log \cdots$$

$$\neq \log \frac{(v_g - b)}{v_f - b} =$$

$$\frac{(1-\Theta_f)}{1-[illegible]} e^{\frac{2\mu U}{RT}} = 1 \quad ?$$

8103 — 1·99 . 2·3

$$\frac{586}{7517} = 2\cdot3\left[\log \frac{0\cdot880}{0\cdot004} - \log(1-\Theta_f)\right]$$

2·33 . 2·34

5. — $-(8\cdot2 . 2\cdot9)$

$n = 4.10^{19} \cdot 10^{-14} \cdot l\,(cm)\ \frac{p}{p_0}$

parowaniu żelaza skonstatował
zapomocą skręta płasz. polar.!

$$\frac{1}{\sqrt{2n\pi}} = \frac{1}{\sqrt{8.10^5.\pi}}\sqrt{\frac{p_0}{p}} = \frac{10^{-3}}{2}\frac{1}{\sqrt{l}}\sqrt{\frac{p_0}{p}}$$

$\alpha_t = [\alpha].d.l$

1 dm $\alpha = 36^\circ$

$\left(\frac{l}{d}\right)$ Terpentinöl kręt t. = 376.0
(Schuldky)
$C_{10}H_{16}$

$[\alpha]_D = 36^\circ = \frac{10.\alpha}{.l\,\rho}$

[illegible]
$\rho \neq 0.004$

120
16
136

depolaryzacja

$\alpha = 36^\circ.\frac{l\rho}{10}$
wtedy skręca się o 360° dla $l\rho = 1$, 100
t.j. $l = 250$ cm, 100

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}}\delta^2 d\delta}{\int e^{-\nu\frac{\delta^2}{2}} d\delta} = \frac{1}{\nu}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

$$\int_0^\infty x e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha}$$

$$\frac{\frac{1}{2\alpha}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2\alpha}} : \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} = 1 : \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\int x^4 e^{-\alpha x^2} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

$$n = \frac{4 . 10^{19} . 5 . 10^{4}}{3} = 6 . 10^{23}$$

$(r = \frac{1}{1000} \text{mm})$

$$n_0 = 6 . 10^{23} . 6 . 10^{-4}$$

$$= 3{\cdot}6 . 10^{20}$$

$$\varphi = \frac{1000}{1} . 0{\cdot}00005 . 0$$

$$\frac{\varphi}{n_0} = \frac{0{\cdot}05}{6 . 10^{23}} = \cancel{10^{-24}}\ 10^{-25} =$$ [illegible]

$$10^{-25}\sqrt{3{\cdot}6 . 10^{20}} = 2 . 10^{-15} =$$ [illegible] 1sec.

$$c\rho q \neq 3 . 10^{-8} \qquad \frac{2 . 10^{-15}}{3 . 10^{-8}} = 1 . 10^{-7} =$$ [illegible]

3). przez polarność pojedyńczych drobin, ale tak żeby się kombinowały w [illegible]

4). uwzględnienie równoczesnych zmian sąsiednich punktów

~~Ale~~ Z dotychczasowego rachunku ~~nie może wypływać~~ wynika wpływ temperatury: zero

Rozszerzalność termiczna =0 | bo dopuszczone tylko siły sprężyste koło pozycji równowagi

temperatura zmieniłaby średnią wielkość wychyleń z pozycji równowagi

ale ponieważ ta wtedy nie wpływa przeciętnie wcale na siły, przeto także rozmiary ciała nie będą od

temp. zależeć.

Chcąc otrzymać wpływ temp.: nie pomoże 2). przy rozwinięciu do x²

ani 3). "

Tylko: albo 4). albo 1).

Zdaje się że rozpocząć trzeba od równania (1) ponieważ chcemy otrzymać przypadek pośredni między takiemi miękkiemi drobinami i sztywnemi kulami.

Ale czy wtedy robiąc φ=0 ; φ'=∞ ; powinniśmy znów otrzymać dawniejsze wyniki dla kul sztywnych? ~~[illegible]~~ Tak, ale tylko właśnie wskutek rachunku ścisłego z wszystkiemi potęgami xyz!

Możnaby połączyć jedno z drugiem supponując jądro sztywne, ale lepiej może dalszy składnik

---

18/II 1905

$$c_{11} = -\frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[5\varphi + \frac{l}{2}\varphi'\right] \qquad c_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[\frac{7}{2}\varphi + \frac{l}{2}\varphi'\right]$$

$$\frac{l^2}{\sqrt{2}}(c_{11} - c_{12}) = \frac{3}{2}\varphi$$

$$\varphi = \frac{2}{3\sqrt{2}} l^2 (c_{11} - c_{12})$$

$$l\varphi' = -\frac{2}{\cancel{2}}\left(c_{11}\frac{l^2}{\sqrt{2}} + 5\varphi\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}}\left[l^2 c_{11} + \frac{5}{3}l^2 c_{11} - \frac{5}{3}c_{12}l^2\right]$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{2}}\;\frac{8l^2c_{11} - 5l^2c_{12}}{3}$$

$$l\varphi' = -\frac{2}{3\sqrt{2}}l^2(8c_{11} - 5c_{12})$$

Zatem $$c_{44} = -\sqrt{2}(\varphi + l\varphi') = -\frac{2}{3}l^2\left[c_{11} - c_{12} + 8c_{11} + 5c_{12}\right]$$

$$= -\frac{2}{3}l^2\left[4c_{12} - 7c_{11}\right]$$

Więc teorya Poissona $c_{44} = c_{12}$ nie będzie wcale spełniona,

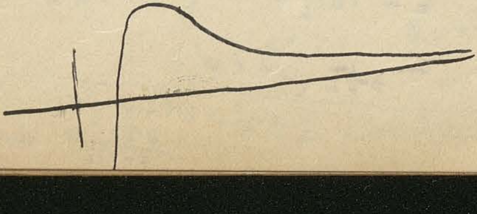
ale przecież istniałaby określona relacja (liniowa) między współczynnikami

ponieważ one zależą tylko od dwóch danych φ, φ'

Uogólnienie możliwe w dwojakim kierunku

1). przez uwzględnienie trzecich potęg w rozwinięciu dla r x^3 etc.

2). przez zmianę założenia pa^2 i wprowadzenie zmienności, tak ażeby rodzaj siły dany był krzywą następującego rodzaju; wtedy wyjdzie w rachunku



oprócz poprzedzającego φ także φ'

(dla drugorzędnych 36 sąsiadów)

$\frac{\varphi}{\varphi'} = \varepsilon$

~~$\left(5\varepsilon + \frac{l}{2}\right)^2 = 3\left(5\varepsilon + \frac{l}{2}\right)(8\varepsilon + 2l) - (9\varepsilon + 3l)(8\varepsilon + 2l)$~~

~~$= (12\varepsilon - 3l)(4\varepsilon + l)$~~

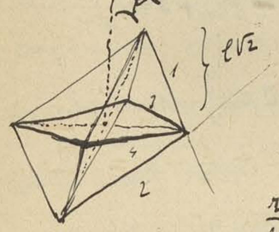
Superponujące trzy jednakowe odkształcenia w kierunkach osi otrzyma się ściśnienie równomierne

$$p = \delta \cdot \frac{-\sqrt{2}}{l^2}\left\{5\varphi + \frac{l}{2}\varphi' - 2\left[\frac{7}{2}\varphi + \frac{l}{2}\varphi'\right]\right\} = -\delta\frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[-2\varphi - \frac{l}{2}\varphi'\right]$$

$$= +\delta\frac{2\sqrt{2}}{l^2}\left[4\varphi + l\varphi'\right]$$

stimmt!

Wię wszystkie : $\frac{E\,(1-2\mu)}{3} = K$



Moment koło osi 2 wytwarzają jedynie tylko siły powstające w ramionach 1, 2

$$\frac{r_1}{l} = [illegible] \sqrt{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\alpha) - \frac{x}{l}\right]^2 + \frac{z^2}{l^2} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{y}{l}\right)^2}$$

Po pierwsze pomijając $x\,y\,z$:

$$\frac{r_1}{l} = l\sqrt{1-\alpha} = l\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$r_2 = l\sqrt{1+\alpha} = l\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$X_1 = -\left[\varphi - l\frac{\alpha}{2}\varphi'\right]\frac{l\sqrt{2}(1-\alpha)}{l\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = -\left[\varphi - \frac{l\alpha}{2}\varphi'\right]\sqrt{2}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= -\sqrt{2}\left[\varphi - \frac{l\alpha}{2}\varphi' - \frac{\alpha\varphi}{2}\right] =$$

$$X_{10} = -\left[\varphi + \frac{\alpha}{2}l\varphi'\right]\sqrt{2}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{2}.\left[\varphi + \frac{l\alpha}{2}\varphi' + \frac{\alpha\varphi}{2}\right]$$

$$X_1 - X_{10} = \sqrt{2}\,.\,\alpha(\varphi + l\varphi') \qquad T = \sqrt{2}\,(\varphi + l\varphi')$$

$$X_y = (X_1 - X_{10})\sqrt{2} = \alpha T = -2\alpha\frac{(\varphi + l\varphi')}{l^2}$$

Jeśli równanie: $\frac{7}{2}\varphi + \frac{l}{2}\varphi' = \sqrt{2}\,2(\varphi + l\varphi')$ $\quad l\varphi' = \frac{2\sqrt{2}+1}{7+2\sqrt{2}}\varphi \;\; \cancel{+} - \frac{2}{5}\varphi$

$$X_0 = \frac{2\sqrt{2}}{l^2}\varphi - a\rho^2 = 0$$

rozciąganie ~~zgniecenie~~ $l' = l(1+\delta)$ $\rho = \rho_0(1-3\delta)$

= ciśnienie na zewnątrz ↓

$$\cancel{X_0 + 2\sqrt{2}\left[+\frac{\varphi}{l^2} l\delta - \frac{2\varphi}{l^3} l\delta\right] + a\rho^2 . 6\delta + p = 0}$$

$$\cancel{\frac{p}{\delta} = \frac{2\sqrt{2}}{l^2}\left[2\varphi + l\varphi' + 6\varphi\right]}$$

$$\cancel{\frac{p}{3\delta} = \frac{2\sqrt{2}}{l^2}\left[4\varphi + l\varphi'\right] = K}$$

$$K = \frac{p}{3\delta} = +\frac{2\sqrt{2}}{3l^2}\left[4\varphi + l\varphi'\right] \leftarrow$$

$l_x' = l_x(1+\delta)$ $\rho = \rho_0(1-\delta)$

$$\cancel{X_0} + \frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[\varphi\delta + \frac{l\delta}{2}\varphi'\right] + \underbrace{a\rho^2 . 2\delta}_{\frac{4\varphi\sqrt{2}.\delta}{l^2}} + X = 0$$

$$\frac{X}{\delta} = -\frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[5\varphi + \frac{l}{2}\varphi'\right] = E$$

↓ krótkie podstawa rozpórka (1+δ)

$$\frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[\frac{5}{2}\varphi\delta + \frac{l\delta}{2}\varphi'\right] + \frac{6\varphi\sqrt{2}.\delta}{l^2} + Y = 0$$

$$\frac{Y}{\delta} = -\frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[\frac{7}{2}\varphi + \frac{l}{2}\varphi'\right] = \mu E$$

Wogóle musi $\frac{\varphi'}{\varphi}$ być < 0 i to tem więcej czem sztywniejsze druty

$$\cancel{\frac{E}{K} = 3(1-2\mu)}$$

$$\cancel{\frac{5\varphi + \frac{l}{2}\varphi'}{8\varphi + 2l\varphi'} = 3 - 3 . \frac{\frac{7}{2}\varphi + \frac{l}{2}\varphi'}{5\varphi + \frac{l}{2}\varphi'}}$$

$\mu = 0$:

$$\varphi' = -7\varphi$$

Jeśli $\mu = \frac{1}{4}$ ~~(...)~~

$$4\left(\frac{7}{2}\varphi + \frac{l}{2}\varphi'\right) = 5\varphi + \frac{l}{2}\varphi'$$

$$9\varphi + \frac{3}{2}l\varphi' = 0$$

$$l\varphi' = -6\varphi$$

$\mu = \frac{1}{2}$:

$$7\varphi + l\varphi' = 5\varphi + \frac{l}{2}\varphi'$$

$$2\varphi + l\frac{\varphi'}{2} = 0$$

$$l\varphi' = -4\varphi$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial y}_{110} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{y}{2} - \frac{y\delta}{2} \pm \frac{(1+\delta)x}{2} - \frac{\delta}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial r_5}{\partial y}_{17} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{y}{2} \pm \frac{z}{2}$$

$$\frac{\partial (r_1 + r_{10} + r_5 + r_7)}{\partial y} = 2\left[\sqrt{2} + y - \frac{y\delta}{2} - \frac{\delta}{2\sqrt{2}}\right]$$

$$\frac{\partial (r_1^2 + \dots)}{\partial y} = 4\left[\sqrt{2} + 2\frac{y}{l}\right]$$

W stanie normalnym t.j. dla $\delta=0$

$$X_0 = \frac{2\sqrt{2}}{l^2}\varphi(l) = Y_0 = \frac{2\sqrt{2}}{l^2} \quad -a\rho^2$$

$$\neq a\rho^2 \qquad \neq a\rho^2$$

Przy ogólnym $\lambda = l(1+\delta)$ $-a\rho^2(1-6\delta)$

$$p+\ X_1 = \overset{p+}{\frac{2\sqrt{2}}{}}\left[\frac{\varphi(l)}{l^2} + l\delta\frac{\varphi'}{4l^2} + \frac{\delta\varphi}{2l^2}\right] = \overset{p+}{\frac{2\sqrt{2}}{l^2}}\left[\varphi\left(1+\frac{\delta}{2}\right) + \frac{\delta l\varphi}{4}\right] = a\rho^2(1+\delta)$$

$$p = -\frac{\delta\sqrt{2}}{l^2}\left[\varphi + l\frac{\varphi'}{2}\right] + \frac{\delta\sqrt{2}\varphi}{l^2}$$

$$p = 3K\delta = \frac{\delta\sqrt{2}}{l^2}\left[\varphi + \frac{l\varphi'}{2}\right]$$

$$K = \frac{\sqrt{2}}{3l^2}\left[\varphi + \frac{l\varphi'}{2}\right]$$

$$X - X_0 = \delta\frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[\varphi + \frac{l}{2}\varphi'\right] + \frac{4\sqrt{2}}{l^2}\delta\varphi =$$

$$Y_0 - Y = \delta\frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[\frac{5}{2}\varphi - \frac{l}{2}\varphi'\right].$$

$$\overline{X_1+X_2+X_3+X_4} = 2\frac{\iiint\left\{\varphi\left[\sqrt{2}+\frac{\delta}{\sqrt{2}}-\frac{x}{l}+\frac{3x\delta}{l}\right]+\varphi' l\left[\frac{\delta}{\sqrt{2}}-\frac{x}{l}-\frac{3x\delta}{l}\right]\right\} e^{-[\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2]}\,dx\,dy\,dz}{\iiint e^{-[\alpha \dots]}}$$

$$= 2\left\{\varphi\left[\sqrt{2}+\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right]+\varphi' l\,\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$= \sqrt{2}\left[\varphi(2+\delta) + \varphi'\frac{l\delta}{2}\right] \qquad$$ [T.j. tak samo jak dla środka]

Zatem $$X = \frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[(2+\delta)\,\varphi(l) + \frac{l\delta}{2}\,\varphi'(l)\right] - a\rho^2(1-\delta)^2$$

$$\sum r_{1,5,7,10} = 2l\left[2+\frac{\delta}{2}+\frac{y}{l}\sqrt{2}+\frac{3(\dots)}{4l^2}-\frac{x^2\delta}{2l^2}-\frac{y^2}{4l^2}-\frac{\dots}{4l^2}\delta-\frac{y\delta}{2\sqrt{2}l}\right]$$

$$\sum r^2 \dots = 2l^2\left[2+\delta+2\frac{y}{l}\sqrt{2}+2\frac{(x^2+y^2+z^2)}{l^2}\right]$$

$$Y = 2\left[\sqrt{2}-\frac{\delta}{2\sqrt{2}}+\frac{y}{l}-\frac{y\delta}{2l}\right]\left[\varphi-l\varphi'\right]+\varphi'\,2\left[\sqrt{2}+2\frac{y}{l}\right]l$$

$$= 2\left[\sqrt{2}-\frac{\delta}{2\sqrt{2}}+\frac{y}{l}-\frac{y\delta}{2l}\right]\varphi + 2\left[+\frac{\delta l}{2\sqrt{2}}+y+\frac{y\delta}{2l}\right]\varphi'$$

$$\overline{Y} = 2\left[\varphi\left(\sqrt{2}-\frac{\delta}{2\sqrt{2}}\right)+\frac{\delta l}{2\sqrt{2}}\varphi'\right]$$ ~~$= 2\left(\sqrt{2}-\frac{\delta}{2\sqrt{2}}\right)(\varphi-l\varphi')$~~

~~$= \sqrt{2}\left(2-\frac{\delta}{2}\right)(\varphi-l\varphi')$~~

zatem ~~$Y = \frac{\sqrt{2}\left(2-\frac{\delta}{2}\right)(\varphi-l\varphi')}{l^2(1+\delta)}$~~

$$Y = \frac{\sqrt{2}\left[\varphi\left(2-\frac{\delta}{2}\right)+\frac{l\delta}{2}\varphi'\right]}{l^2(1+\delta)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[\varphi\left(2-\frac{\delta}{2}-2\delta\right)+\frac{l\delta}{2}\varphi'\right] = \frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[\varphi\left(2-\frac{5}{2}\delta\right)+\frac{l\delta}{2}\varphi'\right]$$

$$\frac{r}{l}{}_{6,8} = \sqrt{x^2+\left(\frac{1}{\sqrt2}-y\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt2}-z\right)^2} = \sqrt{1 - y\sqrt2 - z\sqrt2 + x^2+y^2+z^2}$$

$$= 1 - \frac{y}{\sqrt2} \mp \frac{z}{\sqrt2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{2} - \frac12\left(\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2} \pm yz\right)$$

$$\frac{1}{l}\frac{\partial r_6}{\partial x} = x$$

$$X_{6,8} = -\varphi\left[1 - \frac{y}{\sqrt2\, l} + \frac{z}{\sqrt2\, l}\right]$$

$$r_1 + r_2 = 2\left\{1+\frac{\delta}{2} - \frac{x}{\sqrt2} - \frac{x\delta}{2\sqrt2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{2} - \frac{x^2+y^2+z^2}{4}\delta - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2\delta}{2} - \frac{y^2}{4}\right\}$$

$$r_9 + r_{10} = 2\left\{1+\frac{\delta}{2} + \frac{x}{\sqrt2} + \frac{x\delta}{2\sqrt2} + \frac{x^2+y^2}{2} - \sim \ - \ \cdot\cdot\cdot - \cdot \right\}$$

$$r_1+r_2+r_9+r_{10} = 4\left\{1+\frac{\delta}{2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{2} - \frac{x^2+y^2+z^2}{4}\delta - \frac{x^2}{4} - \cancel{\frac{x^2\delta}{2}} - \frac{y^2}{8}\right\} - \frac{x^2\delta}{8} - \frac{z^2}{8} + \frac{3y^2\delta}{16} + \frac{3z^2\delta}{16}$$

$$r_3+r_4+r_{11}+r_{12} = 4\left\{1+\frac{\delta}{2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{2} - \frac{---}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2\delta}{8} - \frac{z^2}{8}\right\} - \frac{y^2}{8}$$

$$r_5+r_7+r_6+r_8 = 4\left\{1 + \frac{x^2+y^2+z^2}{2} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4}\right\}$$

$$\Sigma r = 4l\left\{3+\delta + \frac{(x^2+y^2+z^2)}{l^2} - \frac{(x^2+y^2+z^2)\delta}{2l^2} - \frac{x^2\delta}{l^2}\right\} \qquad -1-1-1 \qquad \begin{matrix} 6-1-\frac{1}{2} \\ -1-1+\frac{3}{2} \end{matrix}$$

$$\Sigma r^2 = 4l^2\left\{3+2\delta + 3\frac{(x^2+y^2+z^2)}{l^2}\right\}$$

Prawdopodob. xyz:

~~$\sim e^{-h[\Phi(l) + (\Sigma r - 12l)(\varphi - \varphi' l)]}$~~

$$\sim e^{-h\left[12(\Phi(l) - l\varphi + l^2\varphi') + (\varphi - l\varphi')\Sigma r + \frac{\varphi'}{2}\Sigma r^2\right]} dx\,dy\,dz$$

Przeciętne $X_5 =$

$$\frac{\iiint_{-\infty}^{+\infty} -\varphi\left[1+\frac{y}{l\sqrt2} - \frac{z}{l\sqrt2}\right] e^{-h\left[\frac{\varphi - l\varphi'}{l}4\left[(x^2+y^2+z^2)\left(1-\frac{\delta}{2}\right) - x^2\delta\right] + 6\varphi'(x^2+y^2+z^2)\right]} dx\,dy\,dz}{\iiint e^{-h\left[\frac{(\varphi - l\varphi')}{l}4\left(1-\frac{3\delta}{2}\right) + 6\varphi'\right]x^2 - h\left[\frac{(\varphi-l\varphi')}{l}4\left(1-\frac{\delta}{2}\right)+6\varphi'\right](y^2+z^2)}} =$$

$$= -\varphi$$

$$X_{1,2} = \varphi\left[\frac{1}{\sqrt2}+\frac{\delta}{2\sqrt2}-\frac{x}{2l}+\frac{3x\delta}{2l}+\frac{(1+\delta)y}{2l}\right]+\left[\frac{\delta}{2\sqrt2}-\frac{x}{2l}+\frac{y}{2l}-\frac{3x\delta}{4l}-\frac{y\delta}{4l}\right]\varphi'$$

$$= \varphi\,\cancel{\left[\frac{1}{\sqrt2}+\frac{\delta}{2\sqrt2}\frac{x}{2l}+\frac{y}{2l}+\frac{3x\delta}{2l}\right.}$$

$$= \frac{\varphi}{2}\left[\sqrt2+\frac{\delta}{\sqrt2}-\frac{x}{l}\pm\frac{y}{l}+\frac{3x\delta}{l}\pm\frac{y\delta}{l}\right]+\frac{\varphi'}{2}\left[\frac{\delta}{\sqrt2}-\frac{x}{l}\pm\frac{y}{l}-\frac{3x\delta}{2l}\mp\frac{y\delta}{2l}\right]$$

$$\frac{r_3}{l} = \sqrt{\left(\frac{1+\delta}{\sqrt2}-\frac{x}{l}\right)^2+\frac{y^2}{l}+\left(\frac{1}{\sqrt2}\mp\frac{z}{l}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1+\delta - x(1+\delta)\sqrt2 - z\sqrt2 + (x^2y^2z^2)}$$

$$= 1+\frac{\delta}{2}-\frac{x(1+\delta)}{\sqrt2}\mp\frac{z}{\sqrt2}+\frac{x^2y^2z^2}{2}-\frac12\left[\frac{x^2(1+2\delta)}{2}+\frac{z^2}{2}-\frac{x\delta}{\sqrt2}\mp\frac{z\delta}{\sqrt2}+\frac{x^2y^2z^2}{2}\delta \pm xz \pm xz\delta\right]$$

$$\frac1l\frac{\partial r_{3,4}}{\partial x} = -\frac{1+\delta}{\sqrt2}+x-\frac{x(1+2\delta)}{2}+\frac{\delta}{2\sqrt2}-\frac{x\delta}{2}-\frac{z}{2}-\frac{z\delta}{2} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt2}-\frac{\delta}{2\sqrt2}+\frac{x}{2}-\frac{3x\delta}{2}\mp\frac{z(1+\delta)}{2}$$

$$X_{3,4} = \varphi\left[\frac{1}{\sqrt2}+\frac{\delta}{2\sqrt2}-\frac{x}{2l}+\frac{3x\delta}{2l}\pm\frac{z(1+\delta)}{2l}\right]+\varphi'\left[\frac{\delta}{2\sqrt2}-\frac{x}{2l}\mp\frac{z}{2l}-\frac{3x\delta}{4l}\mp\frac{z\delta}{4l}\right]$$

$$\frac{r_{5,7}}{l} = \sqrt{x^2+\left(\frac{1}{\sqrt2}-y\right)^2+\left(+\frac{1}{\sqrt2}-z\right)^2}$$

$-\frac{z^2y}{2\sqrt2}\quad -\frac{yz^2}{\sqrt2}$

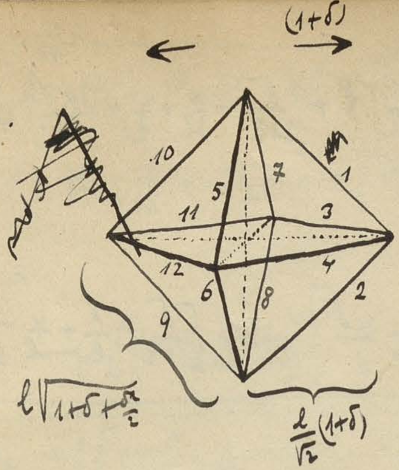
$$= \sqrt{1+y\sqrt2-z\sqrt2+(x^2y^2z^2)}$$

$$= 1+\frac{y}{\sqrt2}\mp\frac{z}{\sqrt2}+\frac{x^2y^2z^2}{2}-\frac12\left(\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}\mp yz\right)$$

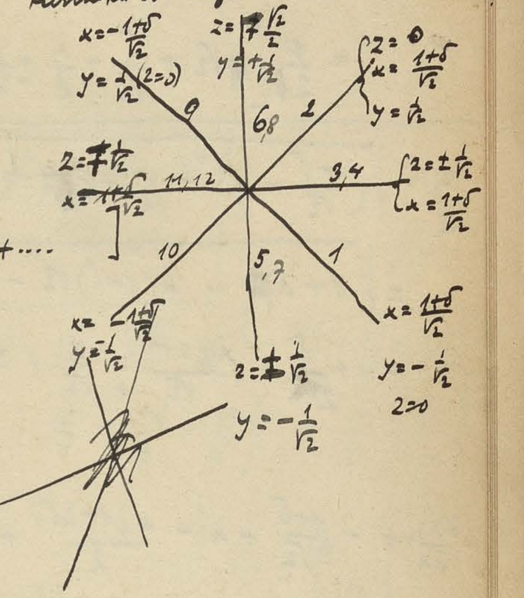
$$\frac1l\frac{\partial r_{5,7}}{\partial x} = x$$

$$X_{5,7} = -\varphi\left[1+\frac{y}{\sqrt2 l}\mp\frac{z}{\sqrt2 l}\right]$$

$$\sqrt{\frac{l^2}{2}+\frac{l^2}{2}(1+\delta)^2} = l\sqrt{1+\delta+\frac{\delta^2}{2}}$$



Skutek rozciągnięcia (1+δ) w kierunku osi krystalicznej X



$$X = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi(l) + (r-l)\varphi(l) + \frac{(r-l)^2}{2}\varphi'(l) + \dots\right]$$

$$X = -\left[\varphi + (r-l)\varphi'\right]\frac{\partial r}{\partial x}$$

~~$\frac{r_1}{l} = \sqrt{1+\delta+\frac{\delta^2}{2}} = 2l$~~ Przeciętnie jedno centrum przypada na l^2

$$\frac{r_1}{l} = \sqrt{\left(\frac{1+\delta}{\sqrt{2}}-x\right)^2 + \cancel{(y+\;)^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-y\right)^2 + z^2}$$

$$= \sqrt{1+\delta+\frac{\delta^2}{2} - (1+\delta)x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + (x^2+y^2+z^2)}$$

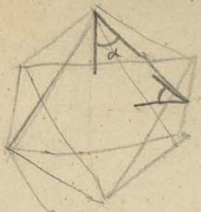
$$= 1+\frac{\delta}{2} - \frac{(1+\delta)x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{x^2+y^2+z^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{(1+2\delta)x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{x\delta}{\sqrt{2}} + \frac{y\delta}{\sqrt{2}} + \cancel{\frac{(x^2+y^2+z^2)\delta}{2}} - (1+\delta)xy\right]$$

$$= 1+\frac{\delta}{2} - \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{\delta x}{2\sqrt{2}} + \frac{x^2+y^2+z^2}{2} - \frac{(x^2+y^2+z^2)\delta}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2\delta}{2} - \frac{y^2}{4} + \frac{(1+\delta)xy}{2} - \frac{y\delta}{2\sqrt{2}})$$

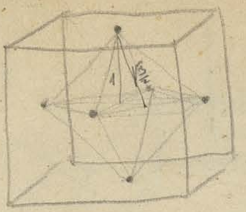
$$\frac{1}{l}\frac{\partial r_1}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\delta}{2\sqrt{2}} + x - \frac{x\delta}{2} - \frac{x}{2} - x\delta + \frac{(1+\delta)y}{2}$$

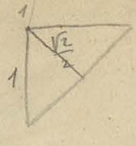
$$\frac{\partial r_{12}}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\delta}{2\sqrt{2}} + \frac{x}{2l} - \frac{3x\delta}{2l} \pm \frac{(1+\delta)y}{2l}$$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$

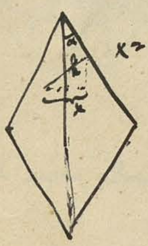


$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$





$\sqrt{1+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$



$x = h.\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}.\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

$\frac{5}{6}\sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}}$

$= \frac{5\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{3}$

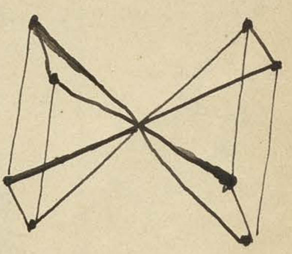
$= -\frac{\sqrt{2}}{6}$

[illegible] $\frac{2}{3}\sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}}$

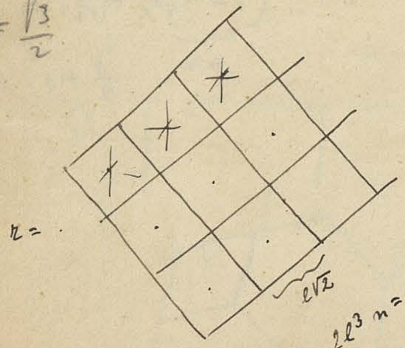
$= \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$\sqrt{\left(\frac{1}{6}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{12}+\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{1+8}{12}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$

$\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}.\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{6}$



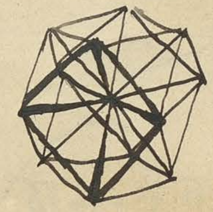
$\frac{2}{3}\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

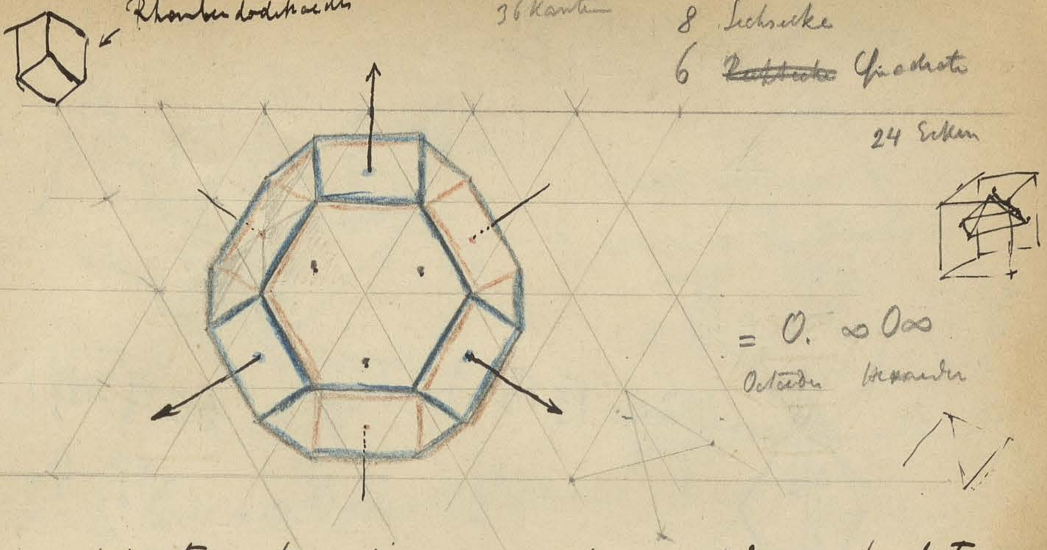


$2l^3 n = 1$

$-\frac{\alpha^2}{8} - \frac{\alpha\beta}{4} - \frac{\beta^2}{8}$

$+\frac{\alpha^3}{16} + \frac{3\alpha^2\beta}{16} + \frac{3\alpha\beta^2}{16} + \frac{\beta^3}{16}$





36 Kanten

8 Sechsecke
6 ~~Rechtecke~~ Quadrate

24 Ecken

= O. ∞O∞
Octaeder Hexaeder

reprezentuje zatem system regularny; osi krystaliczne przechodzą przez kwadraty rogi kostki są środkami sześciokątów

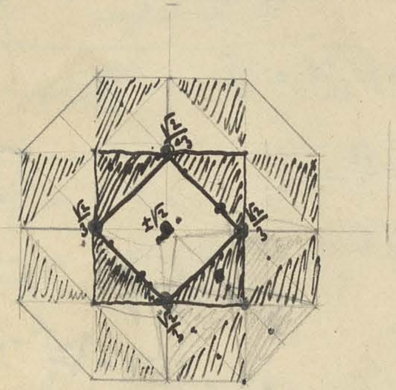
$2\sqrt{2} = 2{\cdot}84$

$\frac{1}{2}\sqrt{3}\ \frac{2}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2}+\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\ \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}$$



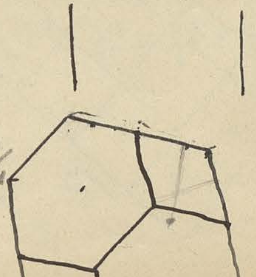
$$\left(\underbrace{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}}_{\frac{2}{3}\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$$\frac{8}{9}+\frac{1}{2} = \frac{16+9}{18}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}$$

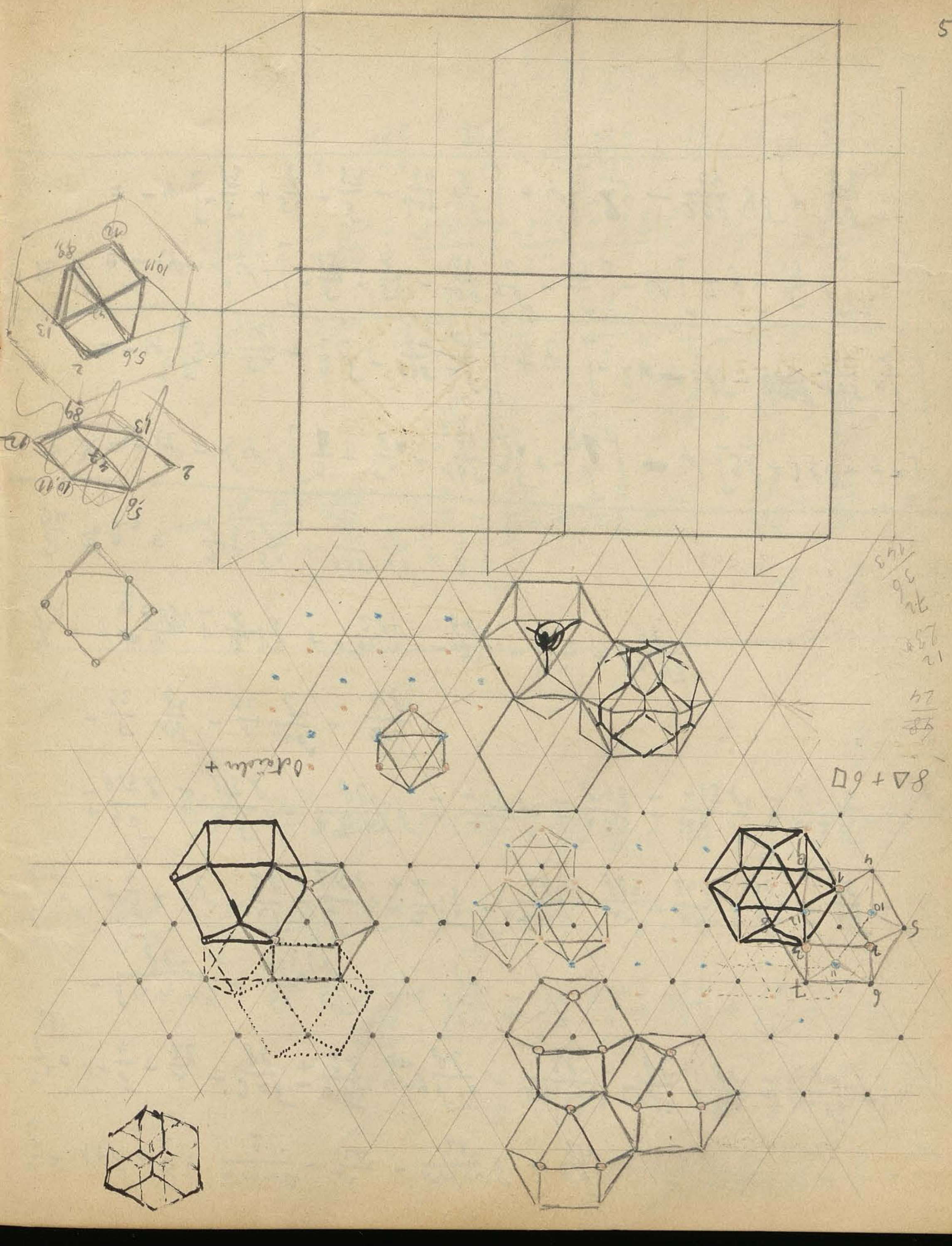
$8{,}12 - 12 = 7{,}12$
84

$+6{,}12 - 12 = 60$
144



$1+2\ \sqrt{3}\ \frac{\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{6}$

=


12
8,9
10,11
4,7
1,3
5,6
2
12
8,9
1,3
4,7
2
10,11
5,6
Oktaeder +
8△+6□
143
36
72
432
12
48
24
h
10
5
6
t

$$\frac{r_1}{l} = 1+\delta+\frac{x}{l}+\frac{x^2+y^2+z^2}{2l^2}-\frac{x^2}{2l^2}-\frac{x^2+y^2+z^2}{2l^2}\delta+\frac{x^2\delta}{2l^2}$$

$$\underset{(3)}{\frac{r_2}{l}} = 1+\frac{\delta}{4}+\frac{x}{2l}+\frac{3x\delta}{8l}\mp y\frac{\sqrt{3}}{2l}\pm y\frac{\delta\sqrt{3}}{8l}+\frac{x^2+y^2+z^2}{2l^2}-\frac{x^2}{8l^2}-\frac{3y^2}{8l^2}\pm\frac{xy\sqrt{3}}{4l^2}-$$

$$-\frac{\delta(x^2+y^2+z^2)}{8l^2}-\frac{61}{(16)^2}\frac{x^2\delta}{l^2}-\frac{9}{(16)^2}\frac{y^2\delta}{l^2}$$

$$\frac{r_4}{l(5)} = 1+\frac{\delta}{4}+\frac{x}{2l}+\frac{x\delta}{2l}\mp\frac{y}{2\sqrt{3}l}\mp\frac{z}{l}\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{x^2+y^2+z^2}{2l^2}-\frac{x^2}{8l^2}-\frac{y^2}{24l^2}-\frac{z^2}{3l^2}-\frac{x\delta}{8l}+$$

$$\pm\frac{y\delta}{8\sqrt{3}l}\pm\frac{z\delta}{2\sqrt{6}l}-\frac{x^2+y^2+z^2}{8l^2}\delta\pm\frac{xy}{4\sqrt{3}l^2}\pm\frac{xz}{l^2\sqrt{6}}\pm\frac{xy\delta}{4\sqrt{3}l^2}\pm\frac{xz\delta}{l^2\sqrt{6}}-\frac{yz}{3\sqrt{2}l^2}$$

$$-\frac{5}{32}\frac{x^2\delta}{l^2}-\frac{1}{32}\frac{y^2\delta}{l^2}-\frac{z^2\delta}{4l^2}$$

$$\frac{r_7}{l(7)} = 1+\frac{y}{l\sqrt{3}}\pm\frac{z}{l}\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{x^2+y^2+z^2}{2l^2}-\frac{y^2}{6l^2}-\frac{z^2}{3l^2}+\frac{yz\sqrt{2}}{3l^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\sum r_{1-7} = \frac{3}{l}+\frac{5x}{l^2}-\frac{165}{64}\frac{x\delta}{l^2}+\frac{3}{2}\frac{\delta}{l}$$

$$\sum X = -(\varphi-l\varphi')\left[\frac{3}{l}+\frac{5x}{l^2}-\frac{165}{64}\frac{x\delta}{l^2}+\frac{3}{2}\frac{\delta}{l}\right]\text{[illegible]}\,\varphi'\left[3l+3l\delta+7x\right]$$

$$= -\varphi\left[3+\frac{5x}{l}+\frac{3}{2}\delta-\frac{165}{64}\frac{x\delta}{l}\right]+\varphi'\left[-2x\,\text{[illegible]}\,\frac{3}{2}l\delta-\text{[illegible]}\,\frac{165}{64}\frac{x\delta}{l}\right]$$

$$\sum Y = -(\varphi-l\varphi')\left[-\frac{5}{\sqrt{3}}+\frac{5y}{l}-\frac{209}{64}\frac{y\delta}{l}+\frac{\delta}{\sqrt{3}}\right]-\varphi'\left[7y-\frac{5}{\sqrt{3}}l\right]$$

$$= -\varphi\left[-\frac{5}{\sqrt{3}}+\frac{5y}{l}+\frac{\delta}{\sqrt{3}}-\frac{209}{64}\frac{y\delta}{l}\right]+\varphi'\left[-2y-\frac{209}{64}y\delta+\frac{l\delta}{\sqrt{3}}\right]$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{1}{l} + \cancel{\frac{x}{l^2}} - \cancel{\frac{x}{l^2}} - \cancel{\frac{x\delta}{l^2}} + \cancel{\frac{x\delta}{l^2}}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x} = \frac{1}{2l} + \frac{3\delta}{8l} + \frac{x}{l^2} - \frac{x}{4l^2} + \frac{y\sqrt{3}}{4l^2} - \frac{x\delta}{4l^2} - \frac{61\,x\delta}{8.16.l^2}$$

$$= \frac{1}{2l} + \frac{3\delta}{8l} + \frac{3x}{4l^2} - \frac{61}{128}\frac{x\delta}{l^2} \pm \frac{y\sqrt{3}}{4l^2} - \frac{x\delta}{4l^2}$$

$$\frac{\partial r_4}{\partial x} = \frac{1}{2l} + \frac{\delta}{2l} + \frac{x}{l^2} - \frac{x}{4l^2} - \frac{\delta}{8l} - \frac{x\delta}{4l^2} + \frac{y}{4\sqrt{3}\,l^2} + \frac{2}{l^2\sqrt{6}} + \frac{y\delta}{4\sqrt{3}\,l^2} + \frac{2\delta}{l^2\sqrt{6}} - \frac{5}{16}\frac{x\delta}{l^2}$$

$$= \frac{1}{2l} + \frac{3\delta}{8l} + \frac{3x}{4l^2} - \frac{9}{16}\frac{x\delta}{l^2} \pm \frac{y}{4\sqrt{3}\,l^2} \pm \frac{y\delta}{4\sqrt{3}\,l^2} \pm \frac{2}{l^2\sqrt{6}} \pm \frac{2\delta}{l^2\sqrt{6}}$$

$$\frac{\partial r_6}{\partial x} = \frac{x}{l^2}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial y} = \frac{y}{l^2} - \frac{y\delta}{l^2}$$ 2

$$\frac{\partial r_2}{\partial y} = -\frac{\sqrt{3}}{2l} + \frac{\delta\sqrt{3}}{8l} + \frac{y}{l^2} - \frac{3}{4}\frac{y}{l^2} + \frac{x\sqrt{3}}{4l^2} - \frac{y\delta}{4l^2} - \frac{9}{128}\frac{y\delta}{l^2}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2l} + \frac{\delta\sqrt{3}}{8l} + \frac{y}{4l^2} \pm \frac{x\sqrt{3}}{4l^2} - \frac{41}{128}\frac{y\delta}{l^2}$$ 2

$$\frac{\partial r_4}{\partial y} = -\frac{1}{2\sqrt{3}\,l} + \frac{y}{l^2} - \frac{y}{12l^2} + \frac{\delta}{8\sqrt{3}\,l} - \frac{y\delta}{4l^2} + \frac{x}{4\sqrt{3}\,l^2} + \frac{x\delta}{4\sqrt{3}\,l^2} - \frac{2}{3\sqrt{2}\,l^2} - \frac{y\delta}{16l^2}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}\,l} + \frac{11\,y}{12l^2} + \frac{\delta}{8\sqrt{3}\,l} - \frac{5y\delta}{16l^2} \pm \frac{x}{4\sqrt{3}\,l^2} \pm \frac{x\delta}{4\sqrt{3}\,l^2} - \frac{2}{3\sqrt{2}\,l^2}$$ 2

$$\frac{\partial r_6}{\partial y} = -\frac{1}{l\sqrt{3}} + \frac{y}{l^2} - \frac{y}{3l^2} + \frac{2\sqrt{2}}{3l^2} = -\frac{1}{l\sqrt{3}} + \frac{2y}{3l^2} + \frac{2\sqrt{2}}{3l^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Sigma_{1-1} = \frac{5y}{l} - \frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{209}{64}\frac{y\delta}{l} + \frac{\delta}{\sqrt{3}}$$

~~$\sum Y = -[\varphi(l) - l\varphi'] \left[7\frac{y}{l} - \frac{7}{3}\frac{y}{l} + \frac{2\sqrt{2}}{3l} - \frac{2\delta y}{l}\right] - \frac{\varphi'(l)}{2} 14 y$~~

~~$= 7\frac{y}{l}\left[-\frac{2}{3}\varphi(l) - \frac{1}{3}l\varphi'(l)\right] + \frac{2\delta y}{l}\left[\varphi(l) - l\varphi'(l)\right] - z\frac{\sqrt{2}}{3l}\left[\varphi(l) - l\varphi'(l)\right]$~~

$\sum Y = \frac{\partial}{\partial y}\left[r_1 + r_2 + r_{-2} + r_4 + r_{-5} + r_6 + r_{-1}\right.$

$\sum_y r = l\left[7 + 3\delta + \frac{5}{2}\frac{x^2+y^2+z^2}{l^2} - \frac{x^2+y^2+z^2}{l^2}\cdot\delta - \frac{2x^2\delta}{l^2} - \frac{5y}{l\sqrt{3}} + \frac{y\delta}{l\sqrt{3}} - \frac{2}{l}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2\delta}{l\sqrt{6}}\right.$

$\frac{\partial \sum r}{\partial y} = 5\frac{y}{l^2} - 2y\frac{\delta}{l^2} - \frac{5}{l\sqrt{3}} + \frac{\delta}{l\sqrt{3}}$

$\sum_y r^2 = 7l^2 + 5l^2\delta + 7(x^2+y^2+z^2) - \frac{10ly}{\sqrt{3}} - 2lx\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\frac{\partial}{\partial y}\sum r^2 = 14y - \frac{10l}{\sqrt{3}}$

$\sum Y = -\left\{\left[\varphi(l) - l\varphi'(l)\right]\left[\frac{5y}{l} - \frac{2y\delta}{l} - \frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{\delta}{\sqrt{3}}\right] + \varphi'(l)\left[7y - \frac{5l}{\sqrt{3}}\right]\right\}$

$\sum_{\delta=0} Y = -\left[\varphi(l) - l\varphi'(l)\right]\left[\frac{5y}{l} - \frac{5}{\sqrt{3}}\right] + \varphi'(l)\left[7y - \frac{5l}{\sqrt{3}}\right] =$

$= \varphi(l)\left[\frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{5y}{l}\right] + \varphi'(l)\left[12y - \frac{10}{\sqrt{3}}l\right]$

$\sum_{\delta=0} X = -\varphi(l)\left[\frac{5x}{l} + 3\right] - \varphi'(l)\left[2x\right]$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} x\, e^{-(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)}\,dx\,dy\,dz =$$

$$\iint e^{-(\beta y^2+\gamma z^2)}\,dy\,dz \int_0^\infty \underbrace{x\, e^{-\alpha x^2}\,dx}_{} =$$

$$\frac{e^{-\alpha x^2}}{2\alpha}\Bigg|_\infty^0 = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)}\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}$$

$$\overline{\Sigma X} = -3\varphi\left(1+\frac{\delta}{2}\right) - \frac{3l\delta}{2}\varphi' + \frac{\left[\left(\frac{6\delta}{l}-\frac{5}{l}\right)\varphi - 2\varphi'\left(1+\frac{3\delta}{\cancel{}}\right)\right]\cdot}{\sqrt{\pi\left[4\frac{\varphi}{l}-\frac{6\varphi\delta}{l}+\frac{6\varphi'\delta}{\cancel{}}+2\varphi'\right]}}$$

$$= \overbrace{-3\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\varphi - \frac{3\delta l}{2}\varphi'}^{\text{Tyle tokri bez ruchu}} + \frac{(6\delta-5)\frac{\varphi}{l} - 2\left(1+\frac{3\delta}{\cancel{}}\right)\varphi'}{\underbrace{\sqrt{2\pi\left[(2-3\delta)\frac{\varphi}{l}+(1+3\delta)\varphi'\right]}}_{}}$$

$$= \cancel{-}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\frac{\varphi}{l}}{\sqrt{}} + \sqrt{(2-3\delta)\frac{\varphi}{l} + (1+3\delta)\varphi'}\right.$$

W stanie normalnym przy $\delta=0$:

$$\overline{\Sigma X} = -3\varphi - \frac{\frac{5\varphi}{l}+2\varphi'}{\sqrt{2\pi\left(\varphi'+\frac{2\varphi}{l}\right)}} = \mathrm{A}$$

$$= -3\varphi - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\frac{\varphi}{l}}{\sqrt{}} + \sqrt{}\right).$$

$$\sum_{1-7} r^2 = 7(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) + 6l\xi + 5l^2 + 2l^2(1+\delta)^2 + 6l\xi\delta$$

$$\sum_{1-12} r^2 = 12(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) + 8l^2 + 4l^2(1+\delta)^2$$

$$\sum_{1-12} r = l\left[12 + 4\delta + 4\frac{(x^2+y^2+z^2)}{l^2} - 2\delta\frac{(x^2+y^2+z^2)}{l^2} - 4\frac{x^2\delta}{l^2}\right]$$

$$\sum_{1-7} r = l\left[7 + 2\delta + \frac{7}{2}\frac{x^2+y^2+z^2}{l^2} - \frac{x^2}{l^2} + \frac{3x}{l} - \frac{7y^2}{6l^2} - \frac{4z^2}{3l^2} + \frac{yz\sqrt{2}}{3l^2} - \frac{\delta(x^2+y^2+z^2)}{l^2} - \frac{2x^2\delta}{l^2} + \frac{3x\delta}{2l}\right]$$

$$\sum X = -\frac{\partial}{\partial x}\left[3\Phi(l) + \varphi(l)\left(\sum_{1-7} r - 7l\right) + \frac{\varphi'(l)}{2}\left[\sum_{1-7} r^2 - 2l\sum_{1-7} r + l^2\right]\right]$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\cancel{3\Phi(l)+}\left[\varphi(l) - l\varphi'(l)\right]\sum_{1-7} r + \frac{\varphi'(l)}{2}\sum_{1-7} r^2\right\}$$

$$= +\left[l\varphi'(l) - \varphi(l)\right]\left[7\frac{x}{l} - \frac{2x}{l} + 3 - \frac{2\delta x}{l} - \frac{4\delta x}{l} + \frac{3\delta}{2}\right]$$

$$- \frac{\varphi'(l)}{2}\left[14x + 6l + 6l\delta\right]$$

$$\boxed{\sum X = -\varphi(l)\left[\frac{5x}{l} + 3 - \frac{6x\delta}{l} + \frac{3\delta}{2}\right] + \varphi'(l)\left[-\frac{9}{2}x - 6x\delta - \frac{3l\delta}{2}\right]}$$

$$\boxed{\text{dla } x=0 : \quad \sum X = -\varphi(l)\left[3 + \frac{3\delta}{2}\right] - \frac{3}{2}l\delta\varphi'(l)}$$

$$\overline{\sum X} = \frac{\displaystyle\iiint_{\xi=-\infty\ \eta=-\infty\ \zeta=0}^{+\infty} \sum X\, e^{-hU}\,dx\,dy\,dz}{\displaystyle\int e^{-hU}\,dx\,dy\,dz}$$

w U uwzględnić potrzeba tylko f(x,y,z) bo stałe i tak się zniosą

$$U = \text{const} + \left[\varphi(l) - l\varphi'(l)\right]\left[\frac{4(x^2+y^2+z^2)}{l} - \frac{2\delta(x^2+y^2+z^2)}{l} - \frac{4x^2\delta}{l}\right] +$$

$$+ \frac{\varphi'(l)}{2}\left[12(x^2+y^2+z^2)\right]$$

$$= (x^2+y^2+z^2)\left[\frac{4\varphi(l)}{l} - \frac{2\delta\varphi(l)}{l} + 2\varphi(l) + 2\delta\varphi'(l)\right] - \frac{4x^2\delta}{l}\left[\varphi - l\varphi'\right]$$

$$r_6 = \sqrt{l^2 + \xi^2+\eta^2+\zeta^2 - \frac{2l\eta}{\sqrt3} + 2l\xi\sqrt{\frac23}}$$

$$= l\left[1 + \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{2l^2} \mp \frac{\cancel{l}\eta}{\sqrt3\, l} + \frac{\cancel{l}\xi}{l}\sqrt{\frac23} - \frac{\eta^2}{6l^2} - \frac{\xi^2}{3l^2} + \frac{\eta\xi\sqrt2}{3l^2}\right]$$

$$r_7 = l\left[1 + \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{2l^2} + \frac{\eta}{l\sqrt3} + \frac{\xi}{l}\sqrt{\frac23} - \frac{\eta^2}{l l^2} - \frac{\xi^2}{3l^2} + \frac{\eta\xi\sqrt2}{3l^2}\right]$$

$$r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7 = l\Big[7 + 2\delta + \frac{3\xi}{l} + \frac{3\delta\xi}{l} + \frac72\,\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{l^2} - \xi^2 -$$

$$- \frac32\,\frac{\xi\delta}{l} - \frac{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\delta}{l^2} - 2\,\frac{\xi^2\delta}{l^2} - \frac43\,\frac{\eta^2}{l^2} - \frac43\,\frac{\xi^2}{l^2} - \frac{\eta\xi\sqrt2}{l^2}\Big]$$

$$= l\Big\{7 + 2\delta + \frac{3\xi}{l} + \frac{3\delta\xi}{2l} + \frac{13}{6}\,\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{l^2} + \frac13\,\frac{\xi^2}{l^2} - \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{l^2}\delta - 2\frac{\xi^2\delta}{l^2}$$

$$- \frac{\eta\xi\sqrt2}{l^2}\Big\}$$

$$\sum r = l\Big\{12 + 4\delta + \frac{14}{3}\,\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{l^2} - \frac23\,\frac{\xi^2}{l^2} + \frac32\,\frac{\xi\delta}{l} - 2\,\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{l^2}\delta - 4\,\frac{\xi^2\delta}{l^2} -$$

$$- \frac23\,\frac{\xi^2}{l^2} - \frac56\,\frac{\eta^2}{l^2} - \frac{\eta\xi}{l^2}\,\frac{4\sqrt2}{3}\Big\}$$

Da $\delta = 0$:

$$\sum r = l\Big\{12 + \cancel{1}4\,\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{l^2} - \frac16\,\frac{\eta^2}{l^2} - \frac{\eta\xi}{l^2}\,\frac{4\sqrt2}{3}\Big\} \quad ?$$

Do tego przychodzą trzy centra leżące pod i poza płaszczyzną n.p. 4, 5, pod, 6 poza

$$r_4 = \sqrt{\left[\xi + \frac{l}{2}(1+\delta)\right]^2 + \left[\frac{l}{2\sqrt3} - \eta\right]^2 + \left[l\sqrt{\frac{2}{3}} - \zeta\right]^2}$$

$$r_5 = \sqrt{\left[\xi + \frac{l}{2}(1+\delta)\right]^2 + \left[\frac{l}{2\sqrt3} + \eta\right]^2 + \left[l\sqrt{\frac{2}{3}} + \zeta\right]^2}$$

$\frac{2}{3}\frac{1}{2\sqrt3}$

~~dwie w płaszczyźnie~~ ~~± (6, 8) przestają działać przyciągając się~~

$$r_6 = \sqrt{\xi^2 + \left[\frac{l}{\sqrt3} - \eta\right]^2 + \left[l\sqrt{\frac{2}{3}} + \zeta\right]^2}$$

$$r_8 = \sqrt{\xi^2 + \left[\frac{l}{\sqrt3} + \eta\right]^2 + \left[l\sqrt{\frac{2}{3}} + \zeta\right]^2}$$

te wszystkie jeśli wystąpią
na prawej stronie

rozwinąć wszystko aż do drugich potęg $\xi\eta\zeta$, pierwszych δ

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3$$

$$r_1 = \sqrt{l^2 + 2l^2\delta + 2l\xi + 2l\delta\xi + \xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

~~$= l\left[1+\delta + \frac{\xi}{l} + \frac{\delta\xi}{l} + \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{2l^2} - \frac{\xi^2}{2}\right] - \frac{\xi\delta}{l} - \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 . \delta}{2l^2} - \frac{\xi\delta}{l^2}$~~ $+\frac{3}{2}\frac{\xi^2\delta}{l^2}$

$-\frac{\xi^2\delta}{4}$ $+\frac{\xi\eta\delta\sqrt3}{4l^2}$ $+\frac{\xi\eta\sqrt3}{4l^2}$

$$r_2 = \sqrt{l^2 + \frac{l^2}{2}\delta + l\xi + l\xi\delta - l\eta\sqrt3 + \xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

~~$= l\left[1 + \frac{\delta}{4} + \frac{\xi}{2l} + \frac{\xi\delta}{2l} - \eta\frac{\sqrt3}{2l} + \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{2l^2} - \frac{\xi^2}{8l^2} - \frac{3\eta^2}{8l^2}\right] - \frac{\delta(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}{8l^2}$~~ $-\frac{\xi\delta}{8l} + \frac{\eta\delta\sqrt3}{8l}$

$$r_3 = \sqrt{} = l\left[1+\frac{\delta}{4} + \frac{\xi}{2l} + \frac{\xi\delta}{2l} + \eta\frac{\sqrt3}{2l} + \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{2l^2} - \frac{\xi^2}{8l^2} - \frac{3\eta^2}{8l^2}\right] - \frac{\xi\delta}{8l} - \eta\frac{\delta\sqrt3}{8l} - \frac{\delta(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}{8l^2} \Big\}$$

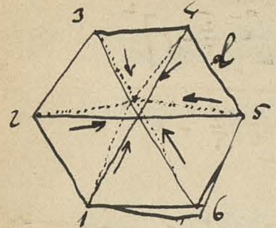
$$r_{4_5} = \sqrt{l^2 + \frac{l^2\delta}{2} + l\xi + l\xi\delta - \frac{l\eta}{\sqrt3} - 2l\zeta\sqrt{\frac{2}{3}} + \xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

~~$= l\left[1 + \frac{\delta}{4} + \frac{\xi}{2l} + \frac{\xi\delta}{2l} \mp \frac{\eta}{2\sqrt3} \mp l\zeta\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{2l^2} - \frac{\xi^2}{8l^2} - \frac{\eta^2}{24l^2} - \frac{\zeta^2}{3l^2} - \right.$~~

~~$- \frac{\delta\xi}{8l^2} + \frac{\delta\eta}{8\sqrt3 l^2} \pm \frac{\delta\zeta}{2\sqrt6 . l^2} - \frac{\delta(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}{8l^2} - \frac{\xi^2\delta}{4l^2} + \frac{\xi\eta}{4\sqrt3 l^2} \pm \frac{\xi\zeta}{l^2\sqrt6}$~~ $+$

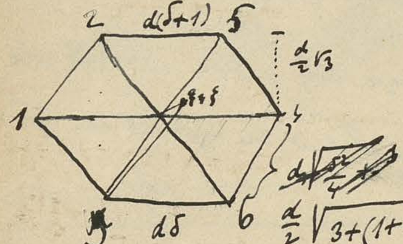
~~$\pm \frac{\xi\eta\delta}{4\sqrt3 . l^2} + \frac{\xi\zeta\delta}{\sqrt6 . l^2}$~~ $- \frac{\eta\zeta}{3\sqrt2 l^2}\Big]$

I). Przyjmijmy regularny układ sześciokątny centrów odpychających,



a wewnątrz drobinę, ogólnie w położeniu ekscentrycznem z prawdopodob. e^{-hU}; ~~jaka przeciętna siła~~? jakie przeciętne naprężenie układow w kierunku $\begin{cases} X ? \\ Y \end{cases}$

Dla ogólności zaraz przyjmiemy sześciokąt rozciągnięty w kierunku x w stosunku 1 .. 1+δ ; rozmiary poprzeczne niezmienione



$$\frac{d}{2}\sqrt{3+(1+\delta)^2} = d\left(1+\frac{\delta}{4}\right)$$

$$\Sigma X = \sum \varphi(r_n)\,\frac{x-x_n}{r_n} = -\frac{\partial}{\partial x}\sum(\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3)$$

$$\int\varphi(r)\,dr = \Phi(r) = \Phi(l) + (r-l)\,\varphi(l) + \frac{(r-l)^2}{2}\varphi'(l) + \cdots$$

$$\Sigma X = -\frac{\partial}{\partial x}\left[3\,\Phi(l) + \varphi(l)\left[r_1+r_2+r_3-3l\right] + \frac{\varphi'(l)}{2}\left[(r_1-l)^2+(r_2-l)^2+(r_3-l)^2\right]^{?}_{\xi} + \cdots\right]$$

$$r_1 = \sqrt{\left[\xi + l(1+\delta)\right]^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

$$r_2 = \sqrt{\left[\xi + \frac{l}{2}(1+\delta)\right]^2 + \left[\frac{l}{2}\sqrt{3} - \eta\right]^2 + \zeta^2}$$

$$r_3 = \sqrt{\left[\xi + \frac{l}{2}(1+\delta)\right]^2 + \left[\frac{l}{2}\sqrt{3} + \eta\right]^2 + \zeta^2}$$

Dójmy za to, że dane jest pole siły sprężystej [pierwszy składnik ogólnego szeregu Taylora]
pochodzące z otaczających drobin

$$U = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}xz + a_{23}yz + a_{33}z^2$$

stąd według Boltzmana (– Maxwella ?) ~~[illegible]~~ prawdopodob. pewnej pozycji

$$\sim e^{-hU}\,dx\,dy\,dz \quad \text{, zatem } \bar{U} = \frac{\int U e^{-U}\,dx\,dy\,dz}{\int e^{-U}\,dx\,dy\,dz}$$

będzie $= \bar{L}$

Tak samo też po deformacji wprawdzie zmienią się spółczynniki a_{xy}.

ale znów pole sprężyste zatem także $\bar{U}_1 = \bar{L}_1 = \bar{L}_0$

wyjątek stanowią w tem tylko drobiny na powierzchni ciała położone !!

Bo siły $X_x\, Y_y\, Z_z$ są już uwzględnione, a pozostające siły molek. nie dodają pola sprężystego o średniej pozycji równowagi [ponieważ wtedy bez względu na nie byłaby równowaga]

Zatem $\bar{U}_1 - \bar{U}_0 = U$ warstwy powierzchownej

Ta metoda zresztą do żadnych rezultatów co do wartości E, K.. nie doprowadzi, tylko do otrzymania ściśliwości objętościowej, ponieważ X_x połączone z Y_y i Z_z.

Lepiej metoda bezpośrednia: Przekrój ciało płaszczyzną $x = \alpha$ i zważ na siły działania

$$\underline{X}_x = \sum_{x_2<\alpha}\sum_{x_1>\alpha} f(r_{12})\,\frac{x_1-x_2}{r_{12}} - \sum_{x_2<0}\sum_{x_1>0} \varphi(r_{12})\,\frac{x_1-x_2}{r_{12}}$$

↓ przyciągające o wielkiej sferze

↓ odpychające o bardzo małym obszarze działania

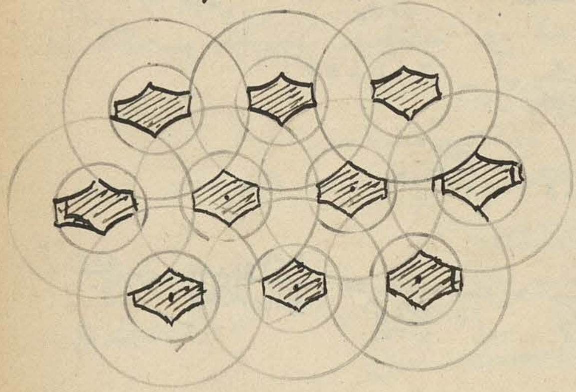
↓ w to wejdą wyłącznie składniki pochodzące od 12 przylegających drobin

↓ tak jakby każda kula owinięta warstwą kauczuku

Przy założeniu kul sprężystych nie ma wyjścia z tej sprzeczności

Także jeśli ~~[illegible]~~ się przyjmuje siły a przyciągają w obrębie małym

to w każdym razie przy rozciąganiu w kierunku $\underline{X}$, a niezmienionych odległościach y



1). ciśnienie Y powstające z ruchu drobin zmniejsza się tylko w stosunku $\frac{1}{1+\delta}$

$\longrightarrow X$

2). ciągnienie Y wskutek sił atrakcyjnych zmniejsza się jeszcze silniej [α). bo odległość² większa
β). bo nachylenie z większa
γ). bo podstawa większa $1+\delta$]

zatem powstaje rozszerzenie w kierunku $\underline{Y}$!

Jedyny sposób otrzymania skurczenia poprzecznego: przyjęcie sfery sił odpychających

Najprościej (z powołaniem na Dulong-Petit-Richarz-Staigmüller) tak że siły działające na każdą drobinę przy małych wychyleniach: sprężyste.

$$\overline{L}_0 = \frac{3}{2}pv + \frac{1}{2}\sum\left(x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} + z\frac{\partial U}{\partial z}\right) = \overline{U}_0 \quad = \frac{mnc^2}{2} = \frac{3}{2}RT$$

po deformacji w kierunku X $\qquad \leftarrow\square\rightarrow X_x$ pro 1 cm²

$$\overline{L}_1 = -\frac{1}{2}X_x\, abc + \frac{1}{2}\Sigma \ldots \quad = -\left(\underbrace{X_x v}_{+Y_y+Z_z}\right) + \overline{U}_1 \quad = \frac{3}{2}RT$$

← mogą powstać także te siły !

$$X_x = \frac{\overline{U}_0 - \overline{U}_1}{v}$$
$+Y_y+Z_z$

W środku komórki siła (prawie) = 0

U powstaje właśnie z położeń ekscentrycznych zatem w kierunku wydłużenia: $\cancel{X}+\frac{a\rho^2}{(1+\delta)^2} = \frac{2RT}{v-v_0}\,\frac{d-6}{d(1+\delta)-6}$

prostopadle : $Y+\frac{a\rho^2}{(1+\delta)^2} = \frac{2RT}{v-v_0}\,\frac{1}{1+\delta}$

poprzednio : $p+\frac{a\rho^2}{\,} = \frac{2RT}{v-v_0}$

$Y=(p+a\rho^2)\frac{1}{1+\delta}-\frac{a\rho^2}{(1+\delta)^2}$
$=p+\cancel{a\rho^2}-\cancel{a\rho^2}+2a\rho^2\delta$
$-(p+a\rho^2)\delta$

zatem: $Y = p + a\rho^2\left[1-\frac{1}{(1+\delta)^2}\right]-\delta\left[p+a\rho^2\right]$

$$X = \left[p+a\rho^2\right]\frac{d-6}{d(1+\delta)-6}-\frac{a\rho^2}{(1+\delta)^2}$$

$$\frac{d-6}{d}\neq\frac{1}{3}\,\frac{v-v_0}{v_0} \qquad \overset{\parallel}{\frac{1}{1+\frac{d\delta}{d-6}}} = \frac{1}{1+\frac{3v_0}{v-v_0}\delta}\neq \text{[illegible]}\ 1-\frac{3v_0}{v-v_0}\delta$$

W stanie normalnym: $p\neq 0$

$$\cancel{Y = a\rho^2.\,\delta\left(1-\frac{d}{d-6}\delta-1-2\delta\right)} = -a\rho^2\delta\left(\frac{d}{d-6}+2\right)$$

$$X = +a\rho^2\left[\cancel{1}-\frac{3\delta v_0}{v-v_0}-\cancel{1}+2\delta\right] = a\rho^2\delta\left[-\frac{3v_0}{v-v_0}+2\right]$$

więc rozciąganie w kierunku X powodowałoby siłę kurczącą sprężystą w kierunku X

$$a\rho^2\left[\frac{3v_0}{v-v_0}+2\right]\delta \quad \left(\begin{array}{l} X_x+Y_y+Z_z = a\rho^2\frac{3v_0}{v-v_0}\delta \\ \text{przy czym} \\ \quad \Delta p = \frac{a\rho^2}{v-v_0}\cdot v_0\,\delta \ \text{wypłaszczeniem} \end{array}\right)$$

a równocześnie siłę rozpychającą (!) $a\rho^2\delta$ w kierunku Y

więc zupełnie inaczej niż w ciałach rzeczywistych!!

Moduł sprężystości $E = a\rho^2\left(\frac{3v_0}{v-v_0}\cancel{+}-2\right) = a\rho^2\left[\frac{3a\rho^2}{2RT}-2\right]$ $\quad\left[a\rho^2=\frac{\theta\alpha}{\beta}\right.$

Np. Pb: $\alpha = 0{\cdot}0_4 29$

$\rho = 11{\cdot}4$

$\beta = 2{\cdot}76\,.\,10^{-6}$

$TR = \frac{28}{207\,.\,0{\cdot}00125}$

$$\frac{3}{2}\,\frac{\theta^2\alpha^2.\,207.\,0{\cdot}00125}{\beta^2\rho.\,28} = 10^{-3}\,\theta^2 10^2 = 10^4\ \text{atm.}$$

$= 10\,\frac{\text{ton}}{1\text{cm}^2}$

	9154	7482
4624	3160	0569
4362	0969	8058
8986	4771	
4409	8054	
4577	8051	

w rzeczywistości 170

Zatem ~~[illegible]~~ w ciele deformowanem skutek taki jak gdyby cała deformacja się skupiła na ścianach wewnętrznych wydrążeniach.

Przy wydłużeniu 1 na $1+\delta$

zwiększa się długość wydrążeń z $2a = 2(d-\sigma)$

na $2(d-\sigma)$ ~~+ [illegible]~~ $+2d\delta$ = ~~$2d+\delta-\sigma$~~

$= 2[d(1+\delta)-\sigma]$

więc ciśnienie normalne zmniejsza się w stosunku

w kierunku wydłużenia

zmniejszone ale tylko w stosunku $\frac{1}{1+\delta}$ (z powodu wydłużenia ~~[illegible]~~ ścian)

$$\frac{(d-\sigma)}{d(1+\delta)-\sigma}$$

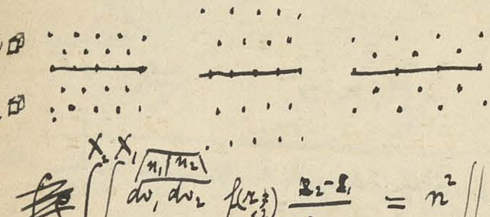
podczas gdy normalne w kierunkach prostopadłych ~~niezmienione~~

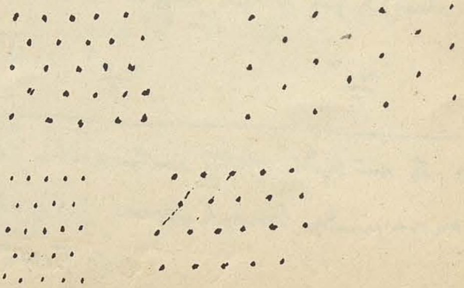
[pod ~~zatem~~ niezmienionych odstępów]

[Trzeba udowodnić: że (całkowite) ciśnienie składowe wywierane przez (jedną) drobinę zawartą w naszym dookołem w kierunku osi X nie zmienia się wskutek równomiernego rozciągnięcia w kierunku Y, a zmienia się wskutek rozciągnięcia w kierunku X odwrotnie do długości]

równocześnie zmienia się ciśnienie wewnętrzne $a\rho^2$ na $a\left(\frac{\rho}{1+\delta}\right)^2$

ale pozostaje równe we wszystkich stronach





$$\iint_{x_2=0\ x_1=0}^{X_2\ X_1} \sqrt{n_1}\sqrt{n_2}\, dv_1\, dv_2\, f(r_{12}) \frac{x_2-x_1}{r_{12}} = n^2 \iint ..$$

~~30103~~
~~47712~~

~~1.82391 − $\pi\left[\frac{47.81}{180} - \frac{1}{3}\right]\pi$~~

~~0.911955 − 1~~ 54

90309
95424

1.94885
9.974425

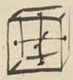
Nieprawda! bo przecież bez przestrzeni innego Kształtu!

70.528°
60

$10.528 : 180 = 1.0528 : 18 =$
$0.1198 : 2 = 0.05849 \cdot \pi$. $\sqrt{2}$

76708
07918
49715
15051s

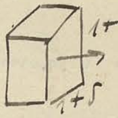
$49392s \;\Big|\; b = 3.1183 \cdot v_0 \;\Big\|\; \frac{b}{4} = 0.7796\ v_0$

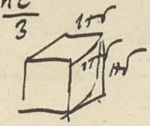


jeśli pojedyncza drobina zacznie się poruszać [illegible], tak jak gdyby po kolei w kierunkach osi, to: (pro 1cm²)

$\frac{mc^2}{3}$ ←

$$\frac{\frac{mc^2}{3}\left(1-\frac{\delta}{3}\right)}{(1+\delta)}$$





$$\frac{\frac{mc^2}{3}\left(1-\frac{2\delta}{3}\right)}{(1+\delta)^2}$$

$$\frac{\frac{mc^2}{3}\left(1-\frac{3\delta}{3}\right)}{(1+\delta)^2} = \frac{mc^2}{3}(1-3\delta)$$

Tak samo jak gaz

---

podobnie gaz w tych przypadkach:

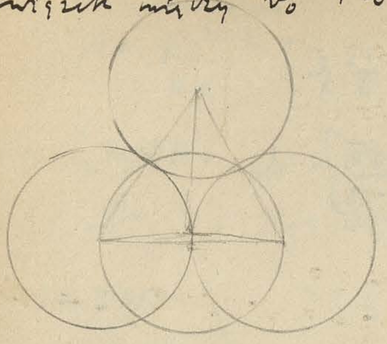
$\frac{mc^2}{3}$ $\quad \frac{mc^2}{3}(1-\delta)$ $\quad \frac{mc^2}{3}(1-2\delta)$ $\quad \frac{mc^2}{3}(1-3\delta)$

---

to nie będzie ściśle zastosowalne, bo równe prawdop. jakiegokolwiek kierunku, zatem stosunek zmniejszona prawdop. bocznych uderzeń

$$\frac{(1+\delta)\left(1-\frac{\delta}{3}\right)}{(1+\delta)\left[(1+\delta)1+(1+\delta)1+\frac{1}{}\right]} = \frac{1}{3}\frac{(3-\delta)}{(3+2\delta)} = \frac{1-\delta}{3}$$

Związek między v_0 i b :



$\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt{37}}{8}$

$6^3\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{17.3}{64}}$

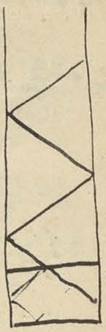
$1-\left[(1-x)\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2 = \frac{3}{4} + x^2\frac{3}{4}$

$= 1-\frac{3}{4}(1-x)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2$

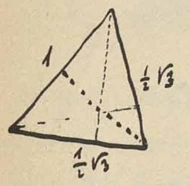
$\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2}$

$x^2 - x = -\frac{1}{3}$

$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}$



ilość
uderzeń
[illegible]
[illegible]
ścianę
niezależnie
od wysokości
naczynia



$\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} =$

$h = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{3}.h$

$h = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\frac{1}{6}\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{6\sqrt{2}}$

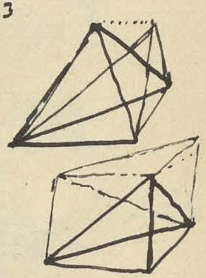
$\sqrt{1-\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}\ \frac{1}{2}\sqrt{3}$

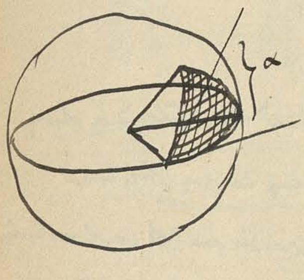
$\frac{2}{3} = \frac{3}{4}(1-x^2)$

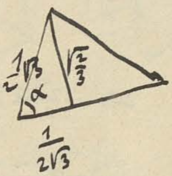
$\frac{8}{9} = 1-x^2 \qquad x = \sqrt{1-\frac{8}{9}} = \frac{1}{3}$

$1 - \frac{4}{9}\,\frac{3}{4} = \frac{2}{3}$

$\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{9}{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$







$\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \arcsin\sqrt{\frac{8}{9}}$

▨ $= \left(3\arcsin\sqrt{\frac{8}{9}} - \pi\right)\frac{a^3}{3}$

$v_0 : b = \frac{1}{6\sqrt{2}} : 4.\frac{4}{3.8}\left(3\arcsin\sqrt{\frac{8}{9}} - \pi\right)$

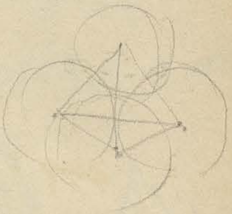
$b = 2\left[\arcsin\sqrt{\frac{8}{9}} - \frac{\pi}{3}\right] v_0.6\sqrt{2}$

~~dokładne~~ dokładne równanie:

$$p + \frac{a}{v^2} = \frac{rT}{v}\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{6}{\lambda}\right]$$

$$p + \frac{a}{v^2} = \frac{rT}{v}\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{v}{v_0}} - 1}\right] \mp \frac{rT}{v}\left[1 + \frac{v_0\sqrt{2}}{v - v_0}\right]$$

$$p = \frac{mc^2}{3\pi a^3} \qquad a = \cancel{\frac{d-6}{2}} = \cancel{\frac{d}{2}\left(1 - \frac{6}{d}\right)} \qquad \frac{n\,mc^2}{3} = RT$$



$$= \frac{RT}{n\pi a^3} =$$

$$= \frac{RT}{n\frac{4a^3\pi}{3}}\,\frac{4}{3}$$

$$\frac{n\frac{4}{3}a^3\pi}{3} : \underbrace{n V_d}_{v} = a^3 : \left(\frac{d}{4}\right)^3$$

$$n\frac{4a^3\pi}{3} = \frac{88a^3v}{d^3} = 8v\left(1 - \frac{6}{d}\right)^3$$

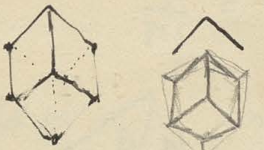
$$= \frac{RT}{6v\left(1-\frac{6}{d}\right)^3}$$

$$\frac{d}{6} = \sqrt[3]{\frac{v}{v_0}} = \left[1 + \frac{v_0 - v}{v_0}\right]^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}\frac{v - v_0}{v_0}$$

$$= \frac{RT\,.\,36}{v\left(\frac{v - v_0}{v_0}\right)^3}$$

$$1 - \frac{6}{d} = \frac{1}{3}\frac{v - v_0}{v_0}$$

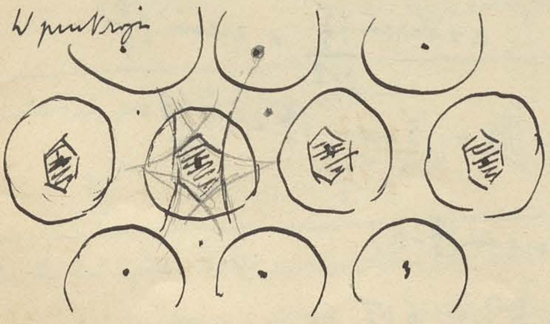
$$= \frac{9}{2}RT\frac{v_0^2}{(v - v_0)^3}$$



$a = d - 6$

8 Ecke 12 Fl.

W przekroju



ciśnienie wśród ⬢ tak jak gdyby gaz zgęszczony w swej objętości rozchodzi się jednak na ~~po~~ powierzchnię większą w stosunku $\left(\frac{d}{4} : a\right)^2$

$$\text{zatem } p + \frac{a}{v^2} = \frac{RT}{n\left(\frac{4\pi a^3}{3}\right)}\left(\frac{a}{\frac{d}{4}}\right)^2$$

$$= \frac{9}{2}RT\frac{v_0^2}{(v - v_0)^3}\cdot 4\left(1 - \frac{6}{d}\right)^2 = \frac{2}{3}\frac{RT}{v\left(1 - \frac{6}{d}\right)} = \frac{2RT}{(v - v_0)}$$

$$\frac{\beta}{\beta_1} = \frac{1}{\left(1 + \frac{p\beta_1}{\theta\alpha_1}\right)^2}$$

N. p. C_2H_5OH : $\beta_1 = 0{\cdot}0_4 970$ $\qquad \frac{2750 . 0{\cdot}000097}{273 . 0{\cdot}00104} = \frac{0{\cdot}98}{1{\cdot}04} = 0{\cdot}94$

0° $\alpha_1 = 0{\cdot}0_2 104$

$p = 2750$

2878
5756
4244 0·266
9868
4112

$\beta_1 = ~~[illegible]~~ 970$

$\beta =$ 258 podług mego. 28·4

~~Według Amagat~~ 250 atm 76·9 20·3
750 56·6 10·8
1250 45·8 7·3
1750 38·5

Eter $\beta = 0{\cdot}0_3 146$ $\qquad \frac{2750. 0{\cdot}000146}{273. 0{\cdot}00150} = 0{\cdot}98$

$\alpha = 0{\cdot}0_2 150$

Chwolson p. 554

$\frac{1}{(1{\cdot}98)^2} = \frac{1{\cdot}02}{4}$

$\beta_1 = 146 : 4 = 36{\cdot}5$ podług mego wzoru 31·7

~~przyjmując zaś β = 0°~~

CS_2 $\beta = 0{\cdot}0_4 539$? Quincke

$0{\cdot}0_4 72$ Amagat

$\alpha = 0{\cdot}0_2 1212$ Amagat

$\frac{0_3 72}{0_2 121}$

8573
0828
7745

1·595

2028
4056
5944
8573
4517

!

$\beta_1 = 28{\cdot}3$

jeśli $\beta = 72$ podług tego 29·9

$\rho = \rho_0 (1 + 0'0_2 3177\, t + 0'0_4 550\, t^2)$

1'15885
1375
1'2963

$\dfrac{273 \cdot 0'0_2 1045}{\rho_0 \rho_0^2}$

$\dfrac{373 \cdot 0'0_2 1221 \cdot (1'0566)^2}{\rho_0 \rho_0^2 \; 1'2963}$

4362
0191
4553

5092
5717
0867
0239
0239
7062
1127
5935
625
5310

625

0'285

$\underbrace{0'340}_{\rho_0 \rho_0^2}$

$\frac{\theta\alpha}{\beta} v^2$

$\alpha = 0{\cdot}0_2 089885 + 0_5 13749\, t + 0_8 30288\, t^2$

$v = 1 + 0{\cdot}0_2 089885\, t + 0{\cdot}0_5 068745\, t^2 + 0{\cdot}0_8 10096\, t^3$

$\rho = \rho_0 (1 + 0{\cdot}0_2 2913\, t + 0{\cdot}0_4 590\, t^2)$

$$\begin{array}{r} 00089885 \\ 13749 \\ 3029 \\ \hline 0{\cdot}00106663 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{\cdot}2913 \\ 590 \\ \hline 1{\cdot}881 \end{array}$$

$$\frac{273 \,.\, 0{\cdot}0_2 089885}{\beta_0 \rho_0^2} \qquad \frac{373 \,.\, 0{\cdot}001067 \,.\, (1{\cdot}098)^2}{\beta_0 \,.\, 1{\cdot}881 \,.\, \rho_0^2}$$

$$\begin{array}{r} 1{\cdot}089885 \\ 6875 \\ 1009 \\ \hline 1{\cdot}097769 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4362 \\ 9538 \\ \hline 3900 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5717 \\ 0282 \\ 0406 \\ 0406 \\ \hline 6811 \\ -2744 \\ \hline 4067 \end{array}$$

$\underbrace{0{\cdot}2455}_{\beta_0\rho_0^2}$ $\underbrace{0{\cdot}2551}_{\beta_0\rho_0^2}$! Amylalkohol

$\frac{25{\cdot}5}{125000}$

Äthylalkohol $v = v_0[1 + 0{\cdot}0_2 104863\, t + 0{\cdot}0_5 175099\, t^2 + 0{\cdot}0_8 13452\, t^3]$

104139 7836 17618

$$\begin{array}{r} 1{\cdot}05243 \\ 438 \\ 17 \\ \hline 1{\cdot}05698 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{\cdot}05207 \\ 196 \\ 220 \\ \hline 1{\cdot}05623 \end{array}$$

(50°)

$\alpha = 0{\cdot}0_2 104863 + 0{\cdot}0_5 350198\, t + 0{\cdot}0_8 40356\, t^2$

104139 15672 35236

$$\begin{array}{r} 0{\cdot}0_2 104863 \\ 1751 \\ 101 \\ \hline 0{\cdot}0_2 12338 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10414 \\ 784 \\ 881 \\ \hline 0{\cdot}0_2 12079 \end{array}$$

Kontrola wzoru $a = \frac{\theta \alpha}{\beta \rho^2}$

$$\frac{(273+t)(0{\cdot}001028 + 0{\cdot}0_5 3558\, t)(1 + 0{\cdot}0_2 1028\, t + 0{\cdot}0_5 1779\, t^2)^2}{0{\cdot}0_4 770\,(1 + 0{\cdot}0_2 657\, t + 0{\cdot}0_4 174\, t^2)\,\rho_0^2} = a \text{ Toluol}$$

$$1 + 2\underset{\mu}{\mu} t + 2\underset{\nu}{\nu} t^2 + \mu^2 t^2 + \dots$$

$$= \frac{273 . 0{\cdot}001028}{0{\cdot}0_4 770 . \rho_0^2} \; \frac{\left(1 + \frac{t}{273}\right)\left(1 + \frac{0{\cdot}0_5 3558}{0{\cdot}0_2 1028} t\right)\left(1 + 0{\cdot}0_2 1028\, t + 0{\cdot}0_5 1779\, t^2\right)^2}{}$$

$$\frac{1 + \left(\frac{2\nu}{\mu} + 2\mu\right) t + (6\nu + \mu^2)\, t^2 + \dots}{1 + 0{\cdot}0_2 657\, t + 0{\cdot}0_4 174\, t^2}$$

$0{\cdot}0240$

$\log \mu = 0{\cdot}0120 - 3$

$\log \nu = 0{\cdot}2502 - 6$

$\log \frac{\nu}{\mu} = 0{\cdot}2382 - 3$

$\frac{\nu}{\mu} = 0{\cdot}001731$

$\mu^2 = 0{\cdot}0_5 1057$

$\frac{1}{273} = \overset{4362}{5638} = 0{\cdot}0_2 3663$

$$\begin{array}{r} 0{\cdot}0_2 3462 \\ 0{\cdot}0_2 2056 \\ \hline 0{\cdot}0_2 5518 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{\cdot}0_4 10674 \\ 1057 \\ \hline 0{\cdot}0_4 11731 \end{array}$$

~~0·001028~~
~~356~~
~~0·001384~~

[illegible]

$$\begin{array}{r} 1{\cdot}1028 \\ 178 \\ \hline 1{\cdot}1206 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{\cdot}657 \\ 174 \\ \hline 1{\cdot}831 \end{array}$$

$$\frac{273 . 0{\cdot}001028}{0{\cdot}0_4 770 . \rho_0^2} \; . \; \frac{373 . 0{\cdot}001384 . (1{\cdot}1206)^2}{0{\cdot}0_4 770 . \rho_0^2 . 1{\cdot}831}$$

$$\begin{array}{r} 4362 \\ 0120 \\ \hline 4482 \\ 8865 \\ \hline 5617 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5717 \\ 1412 \\ 0494 \\ 0494 \\ \hline 8117 \\ 1492 \\ \hline 6625 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2627 \\ 8865 \\ \hline 1492 \end{array}$$

$$\underset{(0°)}{\frac{3645}{\rho_0^2}} \longleftrightarrow \underset{(100°)}{\frac{4600}{\rho_0^2}}$$

6563 000 mm
4 oo :760 = 8600 atm. ‖ 2691 oo :760 = 3000

$p + \frac{a}{v^2} = \frac{R\theta\sqrt{2}}{v - v_0}$ $\qquad \frac{R\sqrt{2}}{v_1 - v_0} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$ $\qquad a = \frac{\theta\alpha_1}{\beta_1\rho^2}$

$\beta = \frac{v - v_0}{pv - \frac{a}{v} + \frac{2av_0}{v^2}}$

jako dane R, β_0, ρ

$$\boxed{\begin{aligned} &= \frac{\frac{R\theta\sqrt{2}}{p + \frac{a}{v^2}}}{pv - \frac{a}{v} + \frac{2av_0}{v^2}} \cancel{+} \cancel{\frac{R\theta\sqrt{2}\,\rho}{p + \frac{\theta\alpha_1}{\beta_1}}} \\ &= \frac{R\theta\sqrt{2}}{\left(p + \frac{a}{v^2}\right)\left[p - a\left(\frac{1}{v^2} - \frac{2v_0}{v^3}\right)\right]} \end{aligned}}$$

$v_1 = v_0 + \frac{R\sqrt{2}\,\beta_1}{\alpha_1}$

$\neq \frac{\rho R\theta\sqrt{2}}{\left(p + \frac{a}{v^2}\right)^2} = \rho\frac{(v - v_0)^2}{R\theta\sqrt{2}}$

$\beta = \frac{1 - \frac{v_0}{v}}{p + \frac{2av_0}{v^3} - \frac{a}{v^2}}$

$v = v_0(1 + \delta)$

$p + \frac{a}{v_0^2(1+\delta)^2} = \frac{R\theta\sqrt{2}}{v_0\delta} = p + \frac{a}{v_0^2(1+2\delta)}$

$\frac{R\theta\sqrt{2}}{v_0 p}(1 + 2\delta) = \delta(1 + 2\delta) + \frac{a\delta}{v_0^2 p}$

W pierwszym przybliżeniu $\quad \delta = \frac{\frac{R\theta\sqrt{2}}{v_0 p}}{1 + \frac{a}{v_0^2 p} - \cancel{\frac{2\sqrt{2}\,R\theta}{p v_0}}} = \frac{1}{\frac{v_0\left(p + \frac{a}{v_0^2}\right)}{R\theta\sqrt{2}}}$

$p + \frac{a}{v_0^2} = \frac{R\theta\sqrt{2}}{v - v_0}$

$v = v_0 + \frac{R\theta\sqrt{2}}{p + \frac{a}{v_0^2}}$

$\beta = \frac{\rho\left(\frac{R\theta\sqrt{2}}{p + \frac{a}{v_0^2}}\right)^2}{R\theta\sqrt{2}} = \rho\frac{R\theta\sqrt{2}}{\left(p + \frac{a}{v_0^2}\right)^2} \neq \frac{\rho_0 R\theta\sqrt{2}}{\left(p + \frac{\theta\alpha_1}{\beta_1}\right)^2}$ $\qquad \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\left(\frac{\theta\alpha_1}{\beta_1}\right)^2}{\left(p + \frac{\theta\alpha_1}{\beta_1}\right)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{p\beta_1}{\theta\alpha_1}\right)^2}$

$\beta_1 = \frac{\rho_0 R\theta\sqrt{2}}{\left(\frac{\theta\alpha_1}{\beta_1}\right)^2}$

Pb : $\rho = 2{\cdot}76 . 10^{-6}$

$p = 11{\cdot}4$

$R = \dfrac{28}{207 . 273 . 0{\cdot}00125}$

$\alpha = 0{\cdot}0_4 29$

4409 − 6
1·0569
$\underline{1{\cdot}4472}$
0·9450 − 4
$\underline{1{\cdot}8494}$
0·0956 − 5
$\underline{2{\cdot}4362}$
0·5318 − 3
2·4682

2·3160
2·4362
$\underline{0972}$ − 3
1·8494

$\sqrt{295}$ 2·4698
1·2349 17·17

1·2594
$\underline{0{\cdot}0956}$ − 5
0·3550 − 4

0·000226

podługij mny. $0{\cdot}0_4 29 . 3 = 0{\cdot}000087$

$(C_2H_5)_2O$

29.2
58
16
74

$\alpha = 0·002016$

$\beta_{20} = 0·000173$

$\rho = 0·715$

$R = \frac{28}{74 . 273 . 0·001251}$

$\lg \beta \rho R =$

2380 -4
8543 -1
1·4472
0·5395-3
~~1~~·4026 ~~4~~
~~0~~·1369-4
2·4362
0·5731-~~2~~
~~1~~·4269 ~~4~~

1·8692
2·4362
0·0972 -3
~~1~~·4026 ~~4~~

$\sqrt{2772}$ 2672

1·4428
0·7214

5·265
6·265

0·7969
1369-4
0·8338-4

0·000682

podczas gdy [illegible] = 0·0020 !

Xylol

C_8H_{10}

~~46~~
106

$\rho_0 = 0·878$

$\beta_0 = 0·0_4734$

8657 -5
9435 -1
1·4472
0·2564 -3
1·5587
0·6977-5
2·4362
0·1339 -2
~~1~~·8661

2·0253
2·4362
0·0972 -3
1·5587

$\sqrt{74·5}$ 73·5

1·8722
0·9361

8·632
9·632

0·9837
6977 -5
0·6814 -4

0·00048

u [illegible] : 0·000951

β

Pb: 2·761. 10^{-6}

Szkło: 1·67 – 2·92. 10^{-6}

Cu 0·857 – 1·23. 10^{6}

NaCl 4·2 – 5·0 . 10^{-6}

$x = \beta \rho R \sqrt{2}$ przy danem β obliczyć α:

C_6H_6

9590 – 5
9445 – 1
0·1505
1·4472
5012 – 3
–1·4255
0·0757 – 4
2·4669
~~1·6088~~
0·5426 – 2

2·4362
1·8921
0972 – 3
1·4255

~~[illegible]~~

‖ 1·4574

28·66

$\sqrt{28·66}$

1·4728
0·7364
5·45
6·45

0·0757 – 4
8096
0·8853 – 4

0·000768 podczas gdy z mierzenia α = 0·00124

Hg $\beta = 0·00000374$
$\rho = 13·6$
$R = \frac{28}{200.273.0·001251}$

5729 – 6
1·1335
1505
1·4472
0·3041 – 3
–1·8344
0·4697 – 5
2·4362
0·9059 – 3
2·0941

2·4362
2·3010
0972 – 3
1·8344

124·2
$\sqrt{125·2}$
2·0976
1·0488

1119
12·19
1·0861
0·4697 – 5
0·5558 – 4

0·000 3596

podczas gdy z mierzenia α =
0·0001818

$\beta \cdot 10^6$

			Siedp.			
	10°	75°	84°			
Äthylenchlorid	67·8	111·4			([illegible])	
Amylalkohol	13·8	99·0				
	88·2	154	128°		(Amyl)	
Chloroform	0°	20°	40°	60°		
	101	128	162	204	([illegible])	61°
Perchloräthan C_2Cl_6	10°	58·5°	97·2			187°
	69·7	94·4	125		(DH)	
Toluol	10°	66	100			
	79·0	144·2	150·5		DH	110
Xylol	10°	65°	100·0			
	73·8	75·21	132·5			

$\alpha \qquad v_t = v_0(1 + at + bt^2 + ct^3)$

Amylalk.	$0\cdot0_2089001$	$0_5065729$	$0_7118458$	−15	+80	} Pierre
	$0_2089885$	$0_5068745$	$0_7010096$	81	132	
	$0_2091919$	$-0_5046143$	0_717533	13	132	Zander
CS_2	$0_2113980$	$0_5137065$	$0_7191225$	−34	60	[illegible]
$CHCl_3$	$0_2110715$	$0_5466473$	$-0_7174328$	0	63	Pierre
Toluol	0_21028	0_51779		0	100	[illegible]
Xylol	0_209506	0_51632		"		"

Pagliani & Palazzo: $\rho_t = \rho_0(1 + at + bt^2)$

	ρ_0	a	b	
Toluol	$0\cdot0_4770$	$0\cdot0_2657011$	$0\cdot0_4174$	} 0 − 99
Xylol	$0\cdot0_4734$	$0\cdot0_22204$	$0\cdot0_4644$	
Amylalk.	$0\cdot0_48165$	$0\cdot0_22913$	$0\cdot0_4590$	0 − 99
Äthylalk.	$0\cdot0_4970$	$0\cdot0_23177$	$0\cdot0_4550$	0 − 68·5

$v - v_0 = \frac{R\sqrt{2}\,.\,\beta}{\alpha}$

Benzol $\frac{\cancel{}}{0{\cdot}00125\,.\,273}\,.\,\frac{28}{78}\,.\,\frac{\sqrt{2}\,.\,0{\cdot}000091}{.\,0{\cdot}00124}$

		4472	3010
4472	8921	1505	4362
1523	4362	5729	0969
9590	0969	1706	2596
5585	1934	0937	0937
5186	5186	0769	
0399_{25}	1096		1194

$= \frac{28\,.\,1{\cdot}42\,.\,\cancel{0}{\cdot}91\,.\,10^{-1}}{78 \quad 1{\cdot}24\,.\,1{\cdot}25\,.\,2{\cdot}73}\;\cancel{} = 0{\cdot}1096$

Hg $\frac{}{0{\cdot}00125\,.\,273}\,\frac{28}{200}\,\frac{\sqrt{2}\,.\,0{\cdot}00000374}{0{\cdot}0001818} = 0{\cdot}01194$

$$a = \frac{v^2\,\theta\alpha}{\beta} = \frac{\theta\alpha}{\beta\rho^2}$$

$$\alpha = \frac{R\sqrt{2}\;v^2}{a(2\,v_0 - v)} = \frac{R\sqrt{2}}{\frac{\theta\alpha}{\beta}\left[\frac{1}{\rho} - 2\frac{R\sqrt{2}\beta}{\alpha}\right]} = \frac{1}{\frac{\theta\alpha}{\beta\rho\,R\sqrt{2}} - 2\theta} = \frac{1}{\theta\left[\frac{\alpha}{\beta\rho R\sqrt{2}} - 2\right]}$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta\rho\,R\sqrt{2}} - 2\alpha = \frac{1}{\theta}$$

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta\rho R\sqrt{2} = \frac{\beta\rho\,R\sqrt{2}}{\theta}$$

$$\alpha = \beta\rho R\sqrt{2}\left[1 \pm \underbrace{\sqrt{1 + \frac{1}{\beta\rho R\sqrt{2}.\theta}}}\right] \qquad (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2$$

$$\cancel{1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\beta\rho R\sqrt{2}.\theta} - \frac{1}{8}\frac{1}{(\beta\rho R\theta)^2 2}}$$

$$= \overset{x}{\widetilde{\beta\rho R\sqrt{2}}}\left[1 + \sqrt{\frac{1}{\beta\rho R\sqrt{2}\theta}}\sqrt{1 + \beta\rho R\sqrt{2}\theta}\right] \qquad \times\sqrt{\theta x}$$

$$\alpha = x\left[1 + \sqrt{\frac{1}{x\theta}}\,[1 + \theta x]^{\frac{1}{2}}\right] = x\left\{1 + \frac{1}{\sqrt{\theta x}}\left[1 + \frac{1}{2}\theta x - \frac{1}{8}\theta^2 x^2 + \cdots\right]\right\} =$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{x}{\theta}}\left\{1 + \sqrt{\theta x} + \frac{1}{2}\theta x - \frac{1}{8}\theta^2 x^2 + \cdots\right\}$$

Hg $\alpha = 0.000\,18\,18$

$\beta = 3.85 . 10^{-6}$

$$\beta = \frac{\alpha^2 \sqrt{2} \;\; \cancel{0}.000\,1251 . (273)^2 \;\; \mu^{200}}{28 . \cancel{0.000012507} . \cancel{273} \;\; \rho_\eta}$$

13.6

4362-4
2.2596
6958-2

3916-3
1505
0972-3
2.3010
9403-4
2.5807
3596-6 = 2.29 . 10^{-6}

1.1335
1.4472
2.5807

$$\beta = \frac{-\alpha^2 \theta}{\rho . R\sqrt{2}}$$

bei sehr hohen Drucken:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{R\sqrt{2}}{p v} \qquad p = \frac{R\theta\sqrt{2}}{v - v_0}$$

$$= \frac{R\sqrt{2}}{p v_0 + R\theta\sqrt{2}} = \frac{1}{\theta + p\frac{v_0}{R\sqrt{2}}}$$

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p} = \frac{R\theta\sqrt{2}}{p^2 v} = R\rho.\frac{\theta\sqrt{2}}{p^2}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_v = \frac{R\sqrt{2}}{v - v_0} = \frac{\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial \theta}}{\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{R\sqrt{2}}{p v - \frac{a}{v} + \frac{2 a v_0}{v^2}}$$

$$\frac{1.3.1.4.273}{(3000)^2.\cancel{\;}}$$

$$1.3.1.4.30.10^{-6}$$

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p} = \frac{v - v_0}{-(p v + \frac{a}{v}) + \frac{2a}{v^2}(v - v_0)} = \frac{v - v_0}{-p v + \frac{a}{v} - \frac{2 a v_0}{v^2}}$$

$$\alpha/_{p=0} = \cancel{\frac{R\sqrt{2}}{2 a v_0 \rho^2 - a\rho}} = \frac{R\sqrt{2}}{a(2\rho^2 v_0 - \rho)} \neq \frac{R\sqrt{2}}{a\rho}$$

$$\beta/_{p=0} = \cancel{\frac{1? v_0\rho}{a(\rho^2 - 2v_0\rho^3)}} = \cancel{1 - v_0\rho} = [illegible]$$

$$= \frac{\frac{R\theta\sqrt{2}}{a\rho^2}}{-a\rho} = -\frac{R\theta\sqrt{2}}{a^2\rho^3} \qquad \alpha^2 = \frac{2R^2}{a^2\rho^2}$$

$$\beta = -\frac{\alpha^2\theta}{\sqrt{2}R\rho}$$

$$R = \frac{10^6}{0.0012507 . 273}\frac{28}{78}$$

Benzol$_{20°}$: $\theta = 293$

$\alpha = 0.00124$

$-\beta = 0.000091 . 10^{-6}$

$\rho = 0.880$

0.6537 −4
−0.0703
0.5834 −4
= 0.000383
$\rho =$

0.1505
0.9445 −1
0.9753 −1
0.0703

0.0934 −3
0.1868 −6
~~0.1500~~
2.4669
0.8042 −4
1.8921
2.4362
0.0972 −3
~~0.2297−2~~ $\log R = $

p^{-}4255

0.9445 −1 0.2297 −2
1.4472 1.3917
1.3917 0.8380 −4

$\sqrt{0.000689} : 2$

0.000344ƨ

1.4225
−1.4472
0.9753 −1

$$p + \frac{a}{v^2} = \frac{R\theta\sqrt{2}}{v - v_0}$$

$$-\frac{2a}{v^3}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{R\sqrt{2}}{v-v_0} - \frac{R\theta\sqrt{2}}{(v-v_0)^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{R\sqrt{2}}{v-v_0} - \left(p + \frac{a}{v^2}\right)\frac{1}{v-v_0}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$-\frac{2a}{v^2}\alpha\,(v-v_0) = R\sqrt{2} - \left(p + \frac{a}{v^2}\right)v\,\alpha$$

$$\alpha = \frac{R\sqrt{2}}{pv + \frac{a}{v} + \frac{2av_0}{v^2}} \overset{p=0}{\neq} \frac{R\sqrt{2}}{a\rho}$$

$$\alpha = \frac{R\sqrt{2}}{a\rho} \qquad a\rho = \frac{R\theta\sqrt{2}}{\alpha}$$

~~$p=0$~~ ~~$a\rho^2 = \frac{R\theta\sqrt{2}}{v-v_0}$~~

$$1 - \frac{2a}{v^3}\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{R\theta\sqrt{2}}{(v-v_0)^2}\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{\left(p + \frac{a}{v^2}\right)}{v-v_0}\frac{\partial v}{\partial p}$$

$$\beta = \frac{1}{\frac{a}{2v^2} - \left(p + \frac{a}{v^2}\right)\left[1 + \frac{v}{v_0}\right]} = \frac{1}{-\frac{a}{2v^2} - p\left(1 - \frac{v}{v_0}\right) + \frac{a}{v_0 v}}$$

$$\neq \frac{1}{\frac{3a}{2v^2} - p\left(1 - \frac{v}{v_0}\right)}$$

$p=0)$ $$\beta = \frac{2}{3a\rho^2}$$

$$a\rho^2 = \frac{\alpha}{\beta}\theta$$

$$\beta = \frac{\sqrt{2}\,\alpha}{3R\theta\,\rho}$$

[illegible]

Gurwanoff Terpentinöl:

Wien Ber 103 p.873(1894)

$\eta_{20} = 0{\cdot}01461$ | $\log\frac{1}{\eta} =$ 1647 | 8353 | $\frac{1}{\eta} =$ 68·4 | → 34·2

$\eta_{50} = 0{\cdot}00968$ | 9859 | 0141 | 103·3 | 34·9 | 15

$\eta_{80} = 0{\cdot}00716$ | 8549 | 1451 | 139·7 | 36·4

2266

478
1788

1310

$\left(\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dt}\right)_{20^\circ} = -\eta\frac{d(\frac{1}{\eta})}{dt}$

34·2 : 30 = 1·14

1461
146
58
1665

$= -0{\cdot}0166_5$

$\frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial p}$ Cohen : 7° : 100 Atm. 0·00154 | 15°

300 0·00168

600 0·00168

0·001603

0·001592

20° ?

0·00155 extrap.

Quincke $\left(\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{20^\circ} =$ 0·00007793
20
→ 0·0000799

Wied. Ann. 19 p.401 (1883)

14 . 0·0183
~~74~~
0·0257 . 78
1799
2056
2005

$\alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3$
$3\gamma t^2$

Kopp $\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T} =$ 0·0009003
784
− 54
0·0009733

Lieb. Ann. 93 p.129 (1855)

$0{\cdot}0_5 19595 . 40$

$0{\cdot}0_4 7838$

$-0{\cdot}0_8 45 . 1200$
9
$0{\cdot}0_5 54$

$-\frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial p} =$ 9882
1903
1785
− 9025
~~2808~~
2760

$= -0{\cdot}0189$
$+ 0{\cdot}00171 = \frac{1}{2T}$
$-0{\cdot}0172$

podług doświadcz. $-0{\cdot}0166_5$

Hirn
40°–160°
Ann. chim. 10
p. 32 (1867)

$a = 0{\cdot}0_3 68661$
$b = 0{\cdot}0_5 50099$
$c = -0{\cdot}0_7 255863$
$d = 0{\cdot}0_{10} 69055$

König $\eta_{159^\circ} = 0{\cdot}001865$

Wied. Ann. 25 p.618 (1885)

CO_2 : $p = 1000$ atm.

$\frac{pv}{p_0v_0} = 1{\cdot}656$

0°) $\rho = \frac{p \cdot \rho_0}{p_0 \; 1{\cdot}656} = \frac{1000 . \; 0{\cdot}001965}{1{\cdot}656} = 1{\cdot}965 : 1{\cdot}656 = 1{\cdot}187$

309
143
11

$= 1{\cdot}187$

$\rho_{600} = 1{\cdot}19$ (Bahn)

~~ρ H. = 0·104 (Cailletet – Mathias)~~

$\rho_{kryt.} = 0{\cdot}45$

C_2H_4 : $\rho_{kryt} = 0{\cdot}21$

0°) $\underset{1000\,atm.}{\rho} = \frac{~~0{\cdot}000~~ \; 1{\cdot}258}{2{\cdot}321} =$

H_2O : $\rho_{kryt} = 0{\cdot}208 - 0{\cdot}429$

N_2 : $\rho_{kryt} = 0{\cdot}37 - 0{\cdot}44$

$\underset{3000\,atm}{\rho} = \frac{3{\cdot}752}{4{\cdot}497} =$

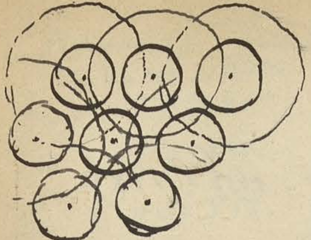
$\rho_{-196} = 0{\cdot}850$

$(C_2H_5)_2O$: $\rho_{kryt} = 0{\cdot}208 - 0{\cdot}2631$

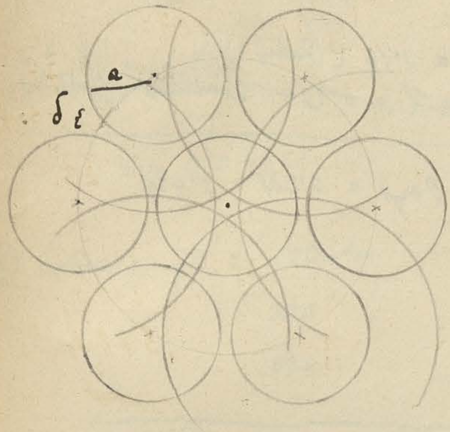
$\underbrace{t_{-100} \quad \rho_{-100} = 0{\cdot}852}$

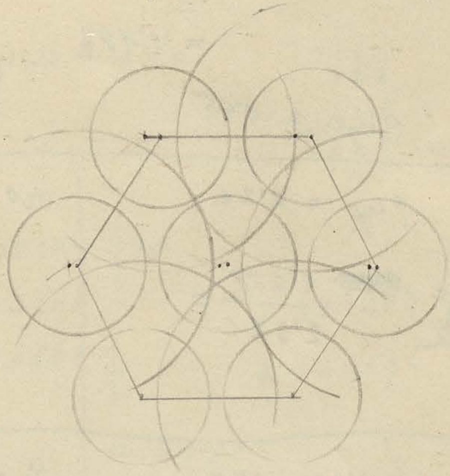
to pokazuje że przestrzeń w której

siły atrakcyjne przyrastają $= \sqrt[3]{4}$ razy



po zsunięciu równoległem





Przesunięcie może się posunąć tylko do pewnej granicy jeśli

$$(2a+\delta)\frac{\sqrt{3}}{2} < 2a$$

$$2a+\delta < \frac{4a}{\sqrt{3}}$$

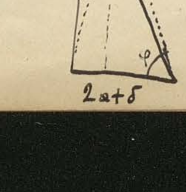
$$\delta < 2a\left[\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right] = 2a\left[\frac{2}{3}\sqrt{3}-1\right] = 0{'}31\,a$$

1'732 . 2
3'464 : 3
1'155

Poniżej może się to zdarzyć tylko przy szczególnych konstelacjach (ciało stałe)

Powyżej zdarza się to regularnie (ciecz)

Graniczny kąt ~~[illegible]~~ deformacji :



$$(2a+\delta)^2\sqrt{3} = (2a+\delta)\,4a\sin\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{(2a+\delta)\sqrt{3}}{4a} = \sin(\varphi_0+\varepsilon) = \sin\varphi_0\cos\varepsilon+\cos\varphi_0\sin\varepsilon$$

~~[illegible]~~ $\varphi_0 = 60°$ $\cos\varphi_0 = \frac{1}{2}$

~~[illegible]~~ $\frac{\delta}{2a}\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Hg 273 4·60815

~~0·01697~~

6636
− 4362
2274

1689 1697

2297
7703 | 5893

273
99
372

6636
− 5705
0931

1239 1223

0874
9126 | 8177

2284:99=

230

$\frac{1}{\eta_0} = \alpha + \beta t_0$

$\frac{1}{\eta_1} = \alpha + \beta t_1$

$\beta = \frac{\frac{1}{\eta_0} - \frac{1}{\eta_1}}{(t_0 - t_1)}$

$\lg \eta = -\lg(\alpha + \beta t)$

$\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dt} = -\frac{\beta}{\alpha + \beta t} = \beta \eta$

~~3617~~
~~2297~~
~~5914~~

0·003903

0·01697
1223
0·00474 :100
0·000047

1847
1697
150 : 21 =

$\left(\frac{d\eta}{dt}\right)_0 = 0·00390$

Ogólnie musi być: $\eta = f.(T, v)$

$$\frac{d\eta}{dT} = \left(\frac{\partial\eta}{\partial p}\right)_T \frac{\partial v}{\partial T} + \left(\frac{\partial\eta}{\partial T}\right)_v$$

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial T} = \frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dT} \mp \frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial T} = \frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dT} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial p}\frac{\alpha}{\beta}$$

$(C_2H_5)_2O$: $_{20°}$

$$\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dT} = -0{\cdot}0097 \qquad -0{\cdot}0100$$

$+$

$$\frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial p} = +0{\cdot}00853$$

$$\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial T}\right)_{v=const} = -0{\cdot}0012$$ zamiast $+0{\cdot}00171$ według kin. przypuszczeń

(C_6H_6):

$$0{\cdot}0142$$
$$0{\cdot}0126$$
$$\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial T}\right)_{v=const} = -0{\cdot}0016$$

w teoryi gazów $\eta = \frac{nm\lambda c}{3}$

zatem chyba λ zmniejsza się z wzrostem T?

Jak to możliwe? Jedynie tak że rozmiary powiększają się więcej podłużnieją się ze wzrostem T.
Chyba tak: że to co się porusza nie są pojedyncze drobiny wśród innych o niezależnych prędkościach lecz ~~grupy~~ skupienia drobinowe, te skupienia większe w niższej temp.

~~Lepiej~~ Albo też tak: że drobiny $(C_2H_5)_2O$, C_6H_6 z wzrostem temperatury objętość swoją powiększają, gdyż atomy wskutek większej energii kinet. więcej się oddalają od środka a zatem λ się zmniejsza z wzrostem T.

Jeśli tak, to Hg musiałby się zachowywać zupełnie inaczej.

Najlepiej: tutaj zamiast λ przychodzi $\lambda + \sigma$, zatem to będzie się zmniejszać ze wzrostem T jeśli $\lambda \ll \sigma$, ponieważ ~~[illegible]~~ zmniejszenie σ więcej może znaczyć niż powiększenie λ

$\psi\left(\frac{6}{v}\right) = \frac{\eta}{\rho}\frac{1}{\sqrt{3RT}}$ $R \sim \frac{1}{\mu}$

C_6H_6 C_2H_5OH

$$\begin{array}{r} 72 \\ 6 \\ \hline 78 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 \\ 6 \\ 16 \\ \hline 46 \end{array}$$

Kundt & Warburg CO_2 40·3 $\eta =$ 346 $\Delta = 8$

32·6   = 0·000338 M

zatem pro 1°

$\frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t} =$ 0·3 % = + 0·003 { są jednak wahania od + 0·0015 do + 0·0045

podobnie dla pary C_6H_6 Schumann : 19·0 $\eta =$ 0·0000 7915
70·1   0·000 1007
100°   0·000 1176
$\Big\}\ \frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t} = +0·00463$

Glycerina :

t=2·8	3·7	7·4	8·1	14·3	13·6	20·3	20·9	25·6	26·5
42·20	39·52	26·83	25·18	13·87	14·79	8·304	7·776	5·413	4·939
1·62|53	1·59|68	1·42|85	1·40|11	1·1700	1·14|20	0·91|91	0·89|08	0·7334	0·6936

$\frac{0·03}{0·9}$ $\frac{0·17}{3·7}$ $\frac{0·027}{0·7}$ $\frac{0·23}{5·5}$ $\frac{0·03}{0·9}$ $\frac{0·22}{6·}$ $\frac{0·03}{0·6}$ $\frac{0·16}{4·7}$ $\frac{0·04}{0·9}$

2304
5602
6622

3617
7404
6213

2041
6721

0·033 $\underline{0·046}$ 0·039 $\underline{0·042}$ 0·033 $\underline{0·037}$ 0·05 $\underline{0·034}$ 0·044

1·6253
$\underline{0·6936}$
0·9317 : 23·7 = 0·039
2207

2·8	8·1	14·3	20·3	26·5
1·6253	1·4011	1·1420	0·9191	0·6936

$\frac{0·2242}{5·3}$ $\frac{0·2591}{6·2}$ $\frac{0·2229}{6·0}$ $\frac{0·2155}{6·2}$

	350	413	348	354
	724	792	778	792
	626	621	570	562
	362	362	362	362
	0·0423	0·0418	0·0372	0·0365
	988	983	932	924
	0·0973	0·0962	0·0855	0·0839
$-\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dt}=$	5·4°	11·2°	17·3°	23·4°

$\frac{0·0848}{\underline{20°}}$

0·0848
$\underline{-0·0017}$
0·0831

β = 0·000025 (Quincke)

α = 0·0004853
$\underline{196}$
0·0005049

$\frac{0·0831 . 0·000025}{0·000505} = 0·0041 = \text{tout}. \frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dp}$

H_2O:

0°   10°   20°   30°   40°   50°

---

100   87   73·5   65·7   56·7   51·0   45·2   44·4   17·0

26·5   16·8   11·5   8·2

4232   2253   0607   9138

9396   8136   7076   6138

4837   4117   3531   3000

$\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dt} = 0·0\,385$ 258   225,   1995

---

47   33   26

14   7

100   73·2   56·2   45·1   37·1   31·2   26·7

$\frac{26·8}{86·6}$ $\frac{17·0}{64·7}$ 11·1

Compressibilität:

0°   20°

0·0000503   0·0000460

$\alpha = -0·00006$ 0·000205

17:23 : 7

$$\frac{\alpha}{\beta}\ \frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dp} = -\frac{0·000170\ .\ 0·00020}{0·000046} = 0·0007$$

$$\frac{4}{2\pi} = \frac{0·0017}{0·0024}$$

1211

Benzol: 10° 12° 20° 30 40°

$0{\cdot}0_2746$ 739 645 ~~1206~~ 561 ~~[illegible]~~ $\leftrightarrow$ 492

$\frac{10{\cdot}1}{695}$ $\frac{8{\cdot}4}{603}$ $\frac{16{\cdot}9}{526}$

~~[illegible]~~ $\frac{110}{704}$ $\frac{87}{605}$ ~~[illegible]~~

0043	9243	~~[illegible]~~	8388
8420	7803		7210
1623	1440		1178
145	6 139	8	131

$$\lg \eta = \lg A + \lg(t_0-t) - \lg(t-t_1)$$

$$\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dt} = \frac{-1}{t_0-t} - \frac{1}{t-t_1}$$

$$= -\left[\frac{1}{432} + \frac{1}{79}\right] = \boxed{\overset{\overset{23{\cdot}15}{127}}{0{\cdot}0150}}$$

$$\left(\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dt}\right)_{20} = 0{\cdot}0142$$

$$0{\cdot}080648 \,.\, 1200 \qquad 0_5\underline{1277}^{55}.40$$

$$\frac{7 \quad 1613}{0_4{\cdot}09678} \qquad 0_4 5110$$

5110

$\underline{117626}$

$0{\cdot}0_2123704$

$0_2\,116$

$\underline{9}$

$0_2\,125$

$$\frac{1}{\eta}\cdot\frac{d\eta}{dp} = 0{\cdot}000930$$

$$-\beta = 0{\cdot}000091$$

$$\alpha = 0{\cdot}00124$$

$$\frac{0{\cdot}00124 \,.\, 0{\cdot}000930}{0{\cdot}000091} = 0{\cdot}0126$$

$$\frac{-\,0{\cdot}0017}{0{\cdot}0109}$$

$$\frac{1}{2T} + \frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dp} = -\underline{0{\cdot}0109}$$ [illegible] $-\,0{\cdot}00142$ (Wijk.)

42·4

$\underline{31{\cdot}5}$

$$\frac{10{\cdot}9}{37.20} = \frac{10{\cdot}9}{740} \qquad \frac{\begin{matrix}0374\\-8692\end{matrix}}{.1682}\;\Big|\, -0{\cdot}00147 \ (\text{O.S.H.})$$

3645

1024

Åm : Wijk. 12° 20° 25° 30°

0·00278 258 245 233

$\frac{20}{8} = 2·5$ $\frac{13}{5} = 2·6$ $\frac{12}{5} = 2·4$

$\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\right)_{20°} = \frac{2·5}{258} = 0·0097$

$\frac{24}{246}$ $\frac{22·5}{223} = 0·01$ Thorpe, Rodger

$\frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dp} = 0·000730$ pro atm.

$-\beta = \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p} = -0·000173$

$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial t} = a + 2bt + 3ct^2$

~~400.2~~ $0_7 400512.$ 12000

801

$0_3 4806$

944

15132

$0·0_2 20882$ (Pinn) 48 94 1513 1655

27_{54} . 120

324

140

1480

$0·0_2 1944$ (Kopp)

$\alpha = 0·0020/16$

730.165 / 173

730.165 / 160

$\frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dp} = \frac{0·000730 . 0·00202}{0·000173} =$

8633

2054

1687

−2380

9307

~~171~~

8633 −4

2175 −3

0808 −6

− 2380 +4

853) 8428 −3

0·00753

− 171

+ 0·00582

696

171

=−0·00853

$\frac{1}{2T} = \frac{1}{586} =$ 2321 0·00171

$\frac{1}{2T} + \frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dp} =$ ~~0·01024~~ −0·00682

podczas gdy doświadcz. −0·0097 (Wijk.)

$\frac{·02}{19·1} = -0·001$ R.

$\frac{2·8}{20.13·1} = \frac{0·14}{13·1} = 0·0106$ (R.s.H.)

84

$(C_2H_5)_2O$: Amagat:

t = 13·0	$10^6\beta$ = 168	– 165
	(8·43–13·9)	(8·43–36·5 Atm)
13·5	170 –	166
13·7	" 167 –	166
	(4·9–7·7)	(4·9–19·8 Atm)
25·4	190	
63·0	300	– 293 (8·6–34·3)
78·5	367	– 363 (")
99·0	555	– 523
	(8·6–13·5)	(8·6–36·5 Atm)

Ausdehnungs Kraft. Grimaldi $(C_2H_5)_2O$ ↔ Amagat 0–50°

P =	9m Hg	17m	25m
0°	$0·0_2 1520$	$0_2 1475$	$0_2 1449$
60°	$0_2 2141$	$0_2 2087$	2032
100°	$0_2 2794$	2743	2679

1 Atm..	500	3000
$0·0_2 1700$	$0·0_2 1118$	$0·0_3 558$

C_2H_5OH / 0–40°

$0_2 1109$	$0_2 0866$	$0_3 529$

CS_2 0–50°

$0_2 1212$	$0_2 0940$	$0_3 581$

~~[illegible] C_6H_6~~

~~5–76°~~

~~0–10°~~

~~$0·0_2 12185$~~

~~11319~~

~~11561~~

~~12384~~

~~13599~~

~~12417~~

Compressibilität $\beta = \beta_0 (1 + at + bt^2)$ Pagliani & Palazzo 1-4 Atm

	β_0	a	b
C_2H_5OH	$0{\cdot}0_4\,970$	$0{\cdot}0_2\,3177$	$0{\cdot}0_4\,550$

C_6H_6 :	$10^6 \cdot \beta =$	87·1	111	126·4
	$t =$	15·4°	50·1	78·8

---

v. Röntgen:	83·0	91·7
	5·95	17·90

Amagat:	90	187
	16°	99·3

Alkohol $\beta 10^6 =$ 101 202 8·5 - 37·3 Atm

Amagat $t =$ 14·0 99·4

Barus:	150-200	150-300	180-400 At
$t =$ 28°	86	85	81
65°	110	109	100
100°	168	144	132
185°	320	274	245
310°	4200	2220	1530

Röntgen $10^6 \beta =$ 99·7 110·2

$t =$ 1·85° 17·5°

Glycerin: Quincke $10^6 \beta =$ 25·09

20·53°

Zandolt & Börnstein ~~###~~ $v = v_0(1 + at + bt^2 + ct^3)$

					ϑ $^{\text{fe}}$ al. sch. 0-100°
		a	b		
Glycerin (Emo)		$0{\cdot}0004853$	$0{\cdot}0_5\,04895$		$0{\cdot}0_2\,05342$
$(C_2H_5)_2O$	(Pierre) −15 +38°	$0{\cdot}0_2\,151324$	$0{\cdot}0_5\,235918$	$0{\cdot}0_7\,400512$	$0{\cdot}0_2\,214967$
	(Kopp) 0 − 33°	$0_2\,148026$	$0_5\,350316$	$0_7\,27007$	$0_2\,210065$
C_2H_5OH	Pierre	$0_2\,104863$	$0_5\,175099$	$0_8\,13452$	
	Recknagel −39 +27	$0_2\,1033$	$0_5\,145$		
	Kopp (0-80°)	$0_2\,104139$	$06{\cdot}7836$	$0_7\,17618$	
	Recknagel +27 +46	$0_2\,1012$	$0_5\,220$		
C_6H_6	Kopp ~~1~~ 1+81°	$0_2\,117626$	$0_5\,127755$	$0_7\,080648$	$0_2\,138466$
	Luginin 0+80°	$0_2\,116$	$0_5\,2226$	~~8~~	$0_2\,138$

$$\eta_t = \frac{\eta_0}{1 + at + bt^2}$$

	η_0	a	b	
C_2H_5OH	$0{\cdot}01843$	$0{\cdot}020856$		0 − 10° Pagliani Battelli

Glycerin: (Schöttner

t =	2·8	3·7	7·4	8·1	14·3	13·6	20·3	20·9	25·6 · 26·5
	42·20	39·52	26·83	25·18	13·87	14·79	8·304	7·776	5·413 · 4·939

Benzol Wijkander:

10°	12°	20	30	40	50	60
0·80746	739	645	561	492	433	389

Alkohol Wijkander ↕ 25°

0·01482	1257	1138	↘ 1034	↘ 856	↘ 715

0.

Äther Wijk.

0·00278	258	↓ 245	↓ 233

$$\frac{\eta}{\rho} = \sqrt{3RT}\ \psi\left(\frac{b}{v}\right)$$

przy ciśnieniu atmosferycznem

$$\frac{a}{v_0^2} = \frac{RT}{v_0}\chi\left(\frac{b}{v_0}\right)$$

$$\chi\left(\frac{b}{v}\right) = -\frac{\alpha}{\beta R \rho} \quad \Bigg| \quad \frac{a}{v_0^2} = -\frac{RT}{v}\frac{\alpha}{\beta R \rho} = -\frac{\alpha_0 T}{\beta_0}$$

$$p = \frac{RT}{v}\chi\left(\frac{b}{v}\right) - \frac{a}{v^2}$$

$$= -\frac{\alpha T}{\beta} + \frac{\alpha_0 T}{\beta_0}\left(\frac{v_0}{v}\right)^2$$

$$p = T\left[\frac{\alpha_0}{\beta_0}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 - \frac{\alpha}{\beta}\right]$$

10°	20°	30°	40°	50°	60°
746	645	561	492	433	389
873	810	749	692	636₅	590

63 61 57 55 46

Pod założeniem V. d. W. - Boltzm.

b = rzeczywista objętość drobin (1 gr.)

v = objętość gazu (1 gr.)

$$p + \frac{a}{v^2} = \frac{c^2}{3v}\,\varphi\left(\frac{b}{v}\right)$$

$$= \frac{RT}{v}\,\varphi\left(\frac{b}{v}\right)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{v}\,\varphi\left(\frac{b}{v}\right) \qquad \varphi\left(\frac{b}{v}\right) = \frac{v}{R}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$$

$$\frac{a}{v^2} = \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p\right] \qquad = \frac{\alpha}{\kappa\rho R}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\sigma = \frac{\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)}{\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)} = \frac{\alpha}{\kappa}$$

$$\eta = nmc\,\psi\left(\frac{b}{v}\right)$$

$$= \rho c\,\psi\left(\frac{b}{v}\right) \qquad c = \sqrt{3RT}$$

$$= \rho\sqrt{3RT}\,\psi\left(\frac{b}{v}\right)$$

jeśli zatem dwie ciecze mają równe $\varphi\left(\frac{b}{v}\right)$, to także $\psi\left(\frac{b}{v}\right)$ powinny być równe

Porównać wartości dla ψ dwóch cieczy w równ. stp. ...

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT} = -\alpha$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p} = \beta$$

$$\log\eta = \log\rho + \frac{1}{2}\log T + \log\psi\left(\frac{b}{v}\right) + \log\sqrt{3R}$$

$$\frac{1}{\eta}\left(\frac{d\eta}{dT}\right)_p = \frac{1}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_p + \frac{1}{2}\frac{1}{T} - \frac{\frac{b}{v}\frac{\psi'}{v}}{\psi}\left(\frac{dv}{dT}\right)_p$$

$$\frac{1}{\eta}\left(\frac{d\eta}{dp}\right)_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dp}\right)_T - \frac{\frac{\psi'}{v}\frac{b}{v}}{\psi}\left(\frac{dv}{dp}\right)_T$$

$$\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dT} = -\alpha + \frac{1}{2}\frac{1}{T} + \left[\frac{1}{\eta}\left(\frac{d\eta}{dp}\right)_T - \beta\right]\frac{\left(\frac{dv}{dT}\right)}{\left(\frac{dv}{dp}\right)} \frac{\alpha}{-\beta}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{T} - \frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{\eta}\left(\frac{d\eta}{dp}\right)_T$$

więc tak samo jak Prace p. 127

16'5

p39

$$p + \frac{a}{v^2} = \frac{RT}{v}\,\chi\left(\frac{b}{v}\right)$$

[dla bardzo wielkich ciśnień: $p = \frac{RT}{v}\,\chi\left(\frac{b}{v}\right)$]

~~$dp = -RT \frac{b}{v^3} \chi' \, dv$~~

~~$\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = K = \frac{v}{RTb\chi'}$~~

~~$\mathcal{D} = \log RT + \lg \chi$~~

~~$\theta = \frac{dT}{T} - \frac{\chi'}{\chi}\frac{b}{v^2}\,dv$~~

~~$\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{\chi v}{\chi' b T} = \alpha$~~

Ogólnie:

$$\frac{v}{R}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{v} = \chi\left(\frac{b}{v}\right) = \frac{\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T}}{\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}} \cdot \frac{1}{R\rho}$$

~~$K = \frac{\frac{v}{b}}{\frac{p}{\chi}\chi'} = \frac{\chi}{\chi' \cdot \frac{b}{v}} \frac{1}{p}$~~

$$= -\frac{\alpha}{\beta R\rho}$$

ogólne zredukowane równanie

~~$\pi + 1 = \vartheta\,\chi\left(\quad\right)$~~

$\frac{v}{b} = \omega$

$\frac{p b^2}{a} = \pi$

$\frac{RTb}{a} = \vartheta$

$$\frac{pv^2}{a} + 1 = \frac{RTv}{a}\,\chi\left(\frac{b}{v}\right)$$

$$\frac{p\omega^2}{a} b^2 + 1 = \frac{RT\omega b}{a}\,\chi\left(\frac{b}{v}\right)$$

$$\pi\omega^2 + 1 = \vartheta\omega\,\chi\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

V. d. W.: $\chi = \frac{1}{1-\frac{1}{\omega}}$

$$= \frac{\vartheta\omega^2}{\omega - 1}$$

$\pi = \frac{\vartheta}{\omega-1} - \frac{1}{\omega^2}$ Inna forma niż zwykle bo wartości $\omega\,\pi\,\vartheta$ nieco inaczej określone

$$\pi + \frac{1}{\omega^2} = \frac{\vartheta}{\omega}\,\chi\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

Verdampfungswärme

$(C_2H_5)_2O$	−3·7	88·5	34·83	120·9		Ramsay & Young
				62·5		
	94·4	89·25	84·5			
N_2O	36·4	35	20	0	−20	Cailletet & Mathias
	0	8·87	43·25	59·50	66·90	
CS_2	0		46·1			
	90·00		83·81			
	89·50					

~~Regnault~~ wirklichen: $(C_2H_5)_2O$ $r = 93·50 - 0·1082\,t - 0·00050033\,t^2$

$CHCl_3$ $67·00 - 0·08519\,t - 0·0001444\,t^2$

CS_2 $89·5 - 0·06520\,t - 0·0010976\,t^2$
$+ 0·0000034245\,t^3$

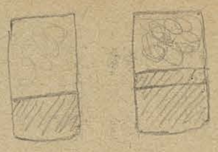
Griffiths & Marshall (C_6H_6)

	form	exp
50·014	99·14	99·14
40·015	100·72	100·71
30·066	102·30	102·30
19·947	103·90	103·82

form: $107·05 - 0·1581\,\theta$

Ad Reingamm

$$\log(1-\beta f) = \log\frac{pf}{p\vartheta} - \frac{2UM}{RT}$$



$$v = xs + (1-x)6 = \cancel{(x+dx)} = \frac{V}{m} \quad \frac{V}{m+dm} = v + (s-6)\,dx$$

$$-\frac{V}{m^2}\,dm = (s-6)\,dx$$

$$= -v\,\frac{dm}{m}$$

$$\begin{array}{r|l} d. & fl \\ \hline \cancel{dm}\,mx & (1-x)m \\ (m+dm)(x+dx) & (m+dm)\,(1-x-dx) \\ \hline x\,dm + m\,dx + dm\,dx & \vdots\ (1-x)\,dm - m\,dx - dm\,dx \end{array}$$

$$d : fl = -\frac{v\,dm}{s-6} + x\,dm \quad : \frac{v\,dm}{s-6} + (1-x)\,dm$$

$$= -v + x(s-6) : v + (1-x)(s-6)$$

$$= -6 \quad : \cancel{xs} + \cancel{6} - \cancel{x6} + s - \cancel{6} - \cancel{xs} + \cancel{x6}$$

$$d : fl = -\rho d : \rho fl$$

83

~~Spores~~ Pr. R. S. 89, 544 (1914)

Studies in Brownian Movement Shaxby & E. E. Roberts
J.H.

Bacterial
Spores cease to move when in air-water-interface

diminution of surface energy draws them into the surface

surface viscosity Rayleigh PRS 1890 47, 48,

---

p. 370 B A Keen & A. W Porter

On the Diffn of Light by Particles comparable with the wave length

th. vosulphate of soda + weak acid = sulphur particles. (Hilger spectrophotometer)

G.F. Davidson Experiments on the flow of viscous liquids through orifices 89 p 91 (1913)

v decreasing with increasing rate of distortion! Olive oil heavy

$v = 15 - 9 = \frac{1}{p}$

[illegible] e e Absolutwert [illegible] o Fehlers grösser ist als y: $P_1(y) = \int_0^y W_1(x)\,dx = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_0^y e^{-\alpha x^2}dx$	$< y$ $1 - P_1(y)$
[illegible] e v 2 [illegible] ..... $P_2(y) = \left[P_1(y)\right]^2$	
[illegible] e 9 e n mal [illegible] e v $\underline{\underline{n \ldots > y}}$: $P_n(y) = \left[P_1(y)\right]^n$ $\quad P_n(0) = 0 \quad P_n(\infty) = 1$	[illegible] < y: $\left[1 - P_1(y)\right]^n$

Jeśli się tworzy grupy po m i bierze się (każdym razem) największą liczbę z poszczególnych grup m wyników, (następnie z tych największych tworzy się przeciętną:

Chodzi wówczas o prawdopodob. maksymalnego odchylenia (w m próbach) y ... y+dy

Prawdop. ażeby maksymalne (w m próbach) odchylenie leżało w obrębie y ... y+dy = $W_m(y)\,dy$ =

$$W_m(y)\,dy = -\frac{d\,P_m(y)}{dy}\,dy = m\left[P_1(y)\right]^{m-1}\frac{dP_1}{dy}\,dy$$

Przeciętne ~~abs~~ maksymalne odchylenie:

$$|\overline{y}_m| = \int_0^\infty y\cdot dP_m = \cancel{y P_m - \int_0^\infty P_m\,dy} \quad \cancel{= -\int_0^\infty P_m\,dy} = m\int_0^\infty y\left[P_1(y)\right]^{m-1}dP_1$$

$$= m\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\right)\int_0^\infty \underbrace{y\,e^{-\alpha y^2}dy\left[P_1(y)\right]^{m-1}}.$$

$$= \cancel{-\frac{e^{-\alpha y^2}}{2\alpha}\left[P_1(y)\right]^{m-1}}\Bigg|_0^\infty + \frac{m-1}{\sqrt{\alpha\pi}}\int_0^\infty e^{-2\alpha y^2}\left[P_1(y)\right]^{m-2}dy$$

$$\bar{y} = \frac{2m(m-1)}{\pi} \int_0^\infty e^{-2\alpha y^2} \left[P_{,(y)}\right]^{m-2} dy$$

$$P_{,(y)} = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_0^y \underbrace{e^{-\alpha x^2}}\, dx$$

$$\int_0^y \left[1 - \alpha x^2 + \frac{\alpha^2 x^4}{2} - \right] dx = y - \alpha\frac{y^3}{3} + \frac{\alpha^2 y^5}{2!5} - \frac{\alpha^3 y^7}{3!\,7} \dots$$

$$\int_0^\infty e^{-2\alpha y^2} y^{m-2} \underbrace{\left[1 - \frac{\alpha y^2}{3} + \frac{\alpha^2 y^4}{2!\,5}\right]^{m-2}}_{\lim_{n=\infty} \,\cdot\, e^{-\frac{m\alpha y^2}{3}}} dy \qquad \lim \left[1-\rho\right]^m \cdot \left[1-\rho\right]^{\frac{1}{\rho} m\rho} = e^{-m\rho}$$

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\infty y^{m-2} e^{-\alpha y^2 \left(2 + \frac{m}{3}\right)} dy = \int_0^\infty y^m e^{-\frac{\alpha}{3} y^2} dy$$

$$\left[\int_0^y e^{-x^2} dx\right]^n = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dq \left[\cdot \int_0^\alpha e^{-x^2} dx\right]^n \cos q(x-\alpha) .\, d\alpha \,]$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos qy \cos q\alpha \; dq \; d\alpha \left[\int_0^\alpha e^{-x^2} dx\right]^n$$

$$\int_0^\infty dP_m = P_m\Big|_0^\infty = 1 = 2m\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\alpha y^2}dy\left[\int_0^y e^{-\alpha x^2}dx\right]^{m-1}\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\right)^{m-1}$$

$$= m\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\right)^m\int_0^\infty e^{-\alpha y^2}dy\left[\int_0^y e^{-\alpha x^2}dx\right]^{m-1}$$

~~$[P_1(y)]^m = P_1(0) + \frac{y}{1!} m P_1^{m-1}(y) \frac{dP_1}{dy} + \frac{y^2}{2!} m$~~

~~$\int_0^\infty e^{-2\alpha y^2} P_1(y)\, dy =$~~ $\bar{y} = m\int_0^\infty y\left[P_1(y)\right]^{m-1} dP_1 =$

$$|\bar{y}_m| = \int_0^\infty y\; d\left\{\left[2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_0^y e^{-\alpha x^2}dx\right]^m\right\} = m\left[2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\right]^m\int_0^\infty y\, e^{-\alpha y^2}dy\left[\int_0^y e^{-\alpha x^2}dx\right]^{m-1}$$

W warstwie h

normalna liczba (drobin na jednostkę powierzchni) niech będzie ν

chwilowo odczytana liczba : n

Jaka ~~[illegible]~~ najprawdop. liczba po upływie czasu t ?

Trzeba obliczyć, wiele z materyi (roztworu), zawartej w h, w ciągu czasu t przez dyfuzyę wyjdzie na zewnątrz; również wiele nowego roztworu (o średniej koncentracyi ν) musiało wpłynąć z powrotem

Jeśli ~~[illegible]~~ ~~ilość~~ objętość roztworu wydyfundowanego w czasie t (w porównaniu z ~~[illegible]~~ objętością całą warstwy h) nazwiemy α, stąd liczba średnio częstek pozostająca będzie nα (patrz str. 9).

wówczas liczba ~~przeciętn.~~ (średnio po czasie t) będzie : $n(1-\alpha) + \nu\alpha$

Wyc. n.p. w szeregu Svedberga ~~[illegible]~~ zmiany przeciętne po ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ intervalach dwu liczb.

z		śr	t.zm.
0:	0020122	1	+1
1:	2320111 3110 21	$\frac{18}{13}$	$+\frac{5}{13}$
2:	0043153	$\frac{16}{7}$	$+\frac{2}{7}$
3:	21131	$\frac{8}{5}$	$-\frac{7}{5}$
4:	1		−3

0:	0201313	$\frac{10}{7}$	$+\frac{10}{7}$
1:	0 2 3.2 1 1.3 1 2.5 1 0.2	$\frac{23}{13}$	$+\frac{10}{13}$
2:	0011113	1	−1
3:	4011	$\frac{6}{4}$	$-1\frac{1}{2}$

Chcąc zatem oznaczyć ~~prz~~ średnią zmienność ogólną, t. zn. $\sqrt{\overline{\Delta^2}}$ $\sqrt{\text{przeciętnego kwadratu różnicy po sobie}}$

w okresie t następujących obserwacyj, trzeba by oznaczyć

prawdop. pojedy~~ncz~~ych liczb n

i dla każdej z nich utworzyć $\sqrt{\ldots}$

Różnica jest ~~$\alpha(\frac{n}{t})$~~ $\alpha(n'-n)$

z prawdop. $P(n')$

?

zatem $\sum \alpha^2 n$

Zatem w razie dużych liczb (To samo postępowanie dla małych liczb ν)

$$\sum_n P(n) \sum_{n'} \alpha^2 (n'-n)^2 P(n') = \alpha^2 \iint$$

$$= \alpha^2 \underbrace{\sum n'^2 P(n') + \sum n^2 P(n)}_{2[\overline{n^2} - (\bar{n})^2]} - 2 \sum n P(n) \ldots$$

$$= 2\alpha^2 \nu^2 \left[\overline{(1+\delta)^2} - 1\right] = 2\alpha^2 \nu^2 \overline{\delta^2}$$

$$\sqrt{\overline{\Delta_t^2}} = \alpha_t \nu \sqrt{2\overline{\delta^2}}$$

Procentowa średnia zmienność $\frac{\sqrt{\overline{\Delta_t^2}}}{\nu} = \alpha_t \sqrt{2\overline{\delta^2}}$ Patrz str. 22

W razie małych liczb n trzeba inaczej postąpić:

Trzeba rozważyć prawdop., iżby ~~z~~ liczba n przeszła na liczbę n'

Może się to stać albo tak że wszystkie n cząstki pozostaną a przybędzie jeszcze (n' − n)

albo " " (n − 1) cząstek " " " (n' − n + 1)

albo " " (n − 2) " " " " (n' − n + 2)

⋮

" " " 0 " " " " n'

Prawdop. ubycia m cząstek, jeżeli jest początkowo obecnych n

Prawdop. ubycia ~~jednej~~ cząstek zawartych między 0 h ~~znajdującej się dξ w odległości [illegible]~~

$$P = \frac{2}{h}\int_0^h dx \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}} d\xi \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\cancel{4}\pi Dt}}$$

$$= \underbrace{x\int_{-\infty}^{-x}\cdots\Big|_0^h + \int_0^h x\, e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\,dx}$$

$$= h\int_{-\infty}^{-h} e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}} d\xi - 2Dt \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\Big|_0^h$$

$$= h\int_{-\infty}^{-h} e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}} d\xi - 2Dt\left\{e^{-\frac{h^2}{4Dt}} - 1\right\}$$

$$\frac{\xi}{2\sqrt{Dt}} = y$$
$$d\xi = 2\,dy\sqrt{Dt}$$

$$P_t = \frac{\text{[illegible]}}{\sqrt{\pi}}\left\{2\int_{-\infty}^{-\frac{h}{\sqrt{4Dt}}} e^{-y^2}dy + \frac{2\sqrt{Dt}}{h}\left[1 - e^{-\frac{h^2}{4Dt}}\right]\right\}$$

$t = \infty \quad \lim P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\;\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$

$t = 0 \quad \lim P = 0$

$D = 0 \quad \lim P_t = 0$

$D = \infty \quad \lim P_t = 1$

Jeżeli w owej przestrzeni jedna cząstka była obecna, prawdop. opuszczenia przestrzeni przez nią w czasie t jest właśnie owo P_t

Jeżeli było ich n, wówczas wszystkie są wzajemnie niezależne, więc prawdop. opuszczenia przez jedną, dwie, trzy ... oznaczone jest P_t, P_t^2, P_t^3 ...

Prawdop. opuszczenia przez m nieoznaczonych, nieopuszczenia przez wszystkie inne

(jeżeli liczba n dana)

$$P_t^m \binom{n}{m} (1-P_t)^{n-m}$$

Prawdop. aby cząstka zawarta jakkolwiek między 0 i h, nie opuściła owej przestrzeni:

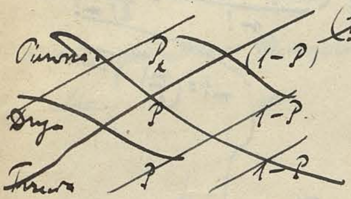
$$1 - P_t$$

Jeżeli jest n cząstek, wówczas prawdop. aby żadna nie opuściła = prawdop. aby równocześnie żadna nie opuściła =

$$(1-P_t)^n$$

W całości pewnem jest, że albo żadna nie opuści, albo jedna, albo dwie (jakiekolwiek), albo trzy, itd.

~~$1 = (1-P_t)^n + \binom{n}{1} P_t + \binom{n}{2} P_t^2 + \cdots \binom{n}{n} P_t^n$~~



$$1 = \underbrace{(1-P)^n + nP(1-P)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} P^2 (1-P)^{n-2} + \cdots \binom{n}{n} P^n}_{}$$

$$= \left[1 - P + P\right]^n$$ stimmt

Przeciętna liczba tych (cząstek) które w danym czasie opuszczą owej przestrzeni:

$$\Delta n = 0.(1-P)^n + 1.\binom{n}{1} P (1-P)^{n-1} + 2\binom{n}{2} P^2 (1-P)^{n-2} . — \quad + n\binom{n}{n} P^n$$

$$(1-P+Px)^n = (1-P)^n + nxP(1-P)^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 P^2 (1-P)^{n-2} \cdots —$$

$$\Delta n = \left[\frac{\partial}{\partial x}(1-P+Px)^n\right]_{x=1} = n(1-P+Px)^{n-1}.P = \underline{\underline{nP}}$$ (jeżeli początkowa liczba = n)

Prawdop. pobytu n cząstek $= \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!}$

zatem $\overset{\text{(przeciwnie)}}{\text{prawdop.}}$ opuszczenia przez m cząstek, bez względu na początkową ilość:

$$W = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!} P^m (1-P)^{n-m} \binom{n}{m}$$

$$= e^{-\nu}\left(\frac{P}{1-P}\right)^m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\nu^n(1-P)^n}{n!}\binom{n}{m}$$

~~[illegible]~~

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1.\,2.\,3\,\dots m}$$

$$\cancel{\frac{a^m}{m!} + \frac{a^{m+1}}{m+1!} + \frac{a^{m+2}}{2,\,m+2!}}$$

$$\binom{m+1}{m} = \frac{\overset{(m+1)}{m}\dots 2}{1\dots m}$$

$$\binom{m+2}{m} = \frac{\overset{(m+2)}{m}\dots 3}{m!}$$

$$\frac{a^m}{m!} + \frac{m+1}{1}\frac{a^{m+1}}{m+1!} + \frac{(m+2)(m+1)}{1.\,2}\frac{a^{m+2}}{m+2!} + \dots\dots\Big]$$

$$\binom{m+k}{m} = \frac{(m+k)\dots k+1}{m!} = \frac{(m+k)!}{k!\,m!}$$

$$m! = \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2m\pi}$$

$$= \frac{a^m}{m!}\left[1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2!} + \dots\right] = \frac{a^m}{m!} e^a$$

$$W = e^{-\nu}\left(\frac{P}{1-P}\right)^m \frac{\left[\nu(1-P)\right]^m}{m!} e^{\nu(1-P)} = \frac{\nu^m P^m}{m!} e^{-\nu P} = \underline{\underline{\frac{(\nu P)^m}{m!} e^{-\nu P}}}$$

Średnia liczba opuszczających, bez względu na początk. liczbę:

$$\Delta M = e^{-\nu P}\sum_{1}^{\infty} m\frac{(\nu P)^m}{m!} = e^{-\nu P}\sum\frac{(\nu P)^m}{m-1!} = \nu P$$

0 nie wchodzi w rachuby

dla dużych m:

$$W = \frac{(\nu P)^m e^m e^{-\nu P}}{m^m\sqrt{2m\pi}}$$

$$= \left(\frac{\nu P}{m}\right)^m \frac{e^{m-\nu P}}{\sqrt{2m\pi}}$$

~~[illegible]~~ Próba czy $\sum_m W = 1$

$$= e^{-\nu P} \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\nu P)^m}{m!}}_{=1+\nu P+\frac{(\nu P)^2}{2!}+\dots\ = e^{\nu P}} = 1 \quad \boxed{\text{Stimmt}}$$

Prawdop. przybycia m cząstek musi być taki sam w ~~[illegible]~~ stanie równowagi termodynam. jak prawdop. ubycia, zatem

Prawdopodobieństwo przybycia m' cząstek (jeśli normalna liczba = ν):

$$W_m = \frac{(\nu P)^{m'}}{m'!} e^{-\nu P}$$

~~[illegible]~~ ~~początkowo~~ Prawdop. ażeby żadna zmiana nie nastąpiła = równie wiele ubyło, ile przybyło

~~[illegible]~~ $P(0) = \sum_{m=0}^{\infty} W_m^2$? Nieprawda.

= albo początkowo ~~n~~ cząstek, żadna nie przybyła, żadna nie ubyła

~~albo~~ " 1 " 1 "

2 " 2 "

\- - - - - -

↓ ↙ ↙

prawdop.

1). $\frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!}(1-P)^n(1-P)^n = \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!}(1-P)^{2n}$

2). $\frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!}\binom{n}{1}^2\left[P(1-P)^{n-1}\right]^2 = \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!}\binom{n}{1}^2 P^2(1-P)^{2n-2}$

3). — $= \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!}\binom{n}{2}^2 P^4(1-P)^{4n-4}$

$$P(0) = \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!}\Big[\underbrace{\binom{n}{0}^2(1-P)^{2n} + \binom{n}{1}^2 P^2(1-P)^{2n-2} + \binom{n}{2}^2 P^4(1-P)^{4n-4}}_{\cancel{(1-P)^{2n}}\ \cancel{(1+\dots)^2}} \dots\Big]$$

Prawdop. liczby początk. n, potem n+1

$$= \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} \sum{}' \left\{ \binom{n}{0}\binom{n}{1} P (1-P)^n (1-P)^{n-1} + \binom{n}{1}\binom{n}{2} P (1-P)^{n-1} P^2 (1-P)^{n-2} + \dots \right.$$

$$+ \dots$$

$$= \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} \sum{}' \left\{ \binom{n}{0}\binom{n}{1} P (1-P)^{2n-1} + \binom{n}{1}\binom{n}{2} P^3 (1-P)^{2n-3} + \dots \binom{n}{n}\binom{n}{n+1} P^{2n+1} (1-P) \right.$$

~~[illegible]~~

Prawdop. liczby początkowo n, potem n (niezmienione)

$$P(0) = \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} \Big[(1-P)^n e^{-\nu P} + \binom{n}{1} P (1-P)^{n-1} \frac{\nu P}{1!} e^{-\nu P} +$$

$$+ \binom{n}{2} P^2 (1-P)^{n-2} \frac{(\nu P)^2}{2!} e^{-\nu P} + \dots \Big]$$

$$= e^{-\nu}\nu^n e^{-\nu P} \sum{}' \Big[(1-P)^n + \frac{n}{(1!)^2} (\nu P^2)(1-P)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(1.2)^2} (\nu P^2)^2 (1-P)^{n-2} +$$

$$+ \frac{n!}{(n!)^2} (\nu P^2)^n \Big]$$

$$= e^{-\nu(1+P)} \nu^n (1-P)^n \left[1 + \frac{n}{(1!)^2} \frac{\nu P^2}{1-P} + \frac{n(n-1)}{(2!)^2} \left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^2 + \dots \frac{n!}{(n!)^2} \left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^n \right]$$

Jeśli początkowo było n, prawdopod. aby potem było (n+1):

~~$P_n(n+1) = \sum\left\{\binom{n}{0}\binom{n+1}{1}(1-P)^n P(1-P)^n + \binom{n}{1}\binom{n+1}{2}P(1-P)^{n-1}P^2(1-P)^{n-1} + \dots \binom{n}{n}\binom{n+1}{n+1}P^n P^{n+1}\right\}$~~

~~$= \left\{\underbrace{\binom{n}{0}\binom{n+1}{1}}_{=\frac{(n+1)}{1}}P(1-P)^{2n} + \underbrace{\binom{n}{1}\binom{n+1}{2}}_{=\frac{n^2(n+1)}{1.2}}P^3(1-P)^{2n-2} + \dots \underbrace{\binom{n}{n}\binom{n+1}{n+1}}_{\frac{n^2(n-1)^2(n+1)}{(1.2)^2.3}}P^{2n+1}\right\}$~~

~~$\binom{n}{k}\binom{n+1}{k+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1.2.3\dots k}\cdot\frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2.3\dots k(k+1)} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}^2$~~

~~Albo także może wpierw przybyć 1 potem nie ubyć żadna~~ n n+1

~~2 ubyć ~~po~~ 1~~

~~— — —~~

~~[illegible]~~: może nie ubyć żadna i przybyć jedna

ubyć 1 2

2 3

$P_n(+1) =$

$$\binom{n}{0}(1-P)^n e^{-\nu P} + \binom{n}{1}P(1-P)^{n-1}\frac{\nu P}{1!}e^{-\nu P} + \binom{n}{2}P^2(1-P)^{n-2}\frac{(\nu P)^2}{2!}e^{-\nu P} + \dots\dots \infty$$

$$= e^{-\nu P}(1-P)^n\left\{1 + \binom{n}{1}\frac{\nu P^2}{1!(1-P)} + \binom{n}{2}\frac{1}{2!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^2 + \dots\dots \infty\right.$$

Który z tych dwóch sposobów jest słuszny?

Wyobraźmy sobie w danej chwili $t=0$ cząstki zawarte w warstwie h zaznaczone barwą czerwoną, wszystkie inne białą: liczba czerwonych $= n$

Patrząc znów po upływie czasu t zobaczymy, że niektóre (m) z owych czerwonych wyszły z warstwy w ciecz otaczającą; wyjść może ich co najwyżej n; natomiast niektóre białe weszły (w liczbie m'), tak że liczba pozostająca będzie: $n' = n - m + m'$

(dowolnie wielkie)

Prawdop. wyjścia czerwonych (m) zależy zatem (od początkowej ich liczby (n), natomiast prawdop. wejścia białych (m') nie zależy od n (ani od m). Zatem prawdop. aby ~~=~~ $n' = n$, będzie:

$$P(0) = \binom{n}{0}(1-P)^n e^{-\nu P} + \binom{n}{1} P(1-P)^{n-1} \frac{\nu P}{1!} e^{-\nu P} + \binom{n}{2} P^2 (1-P)^{n-2} \frac{(\nu P)^2}{2!} e^{-\nu P} + \dots$$

$$\dots\dots + \binom{n}{n} P^n \frac{(\nu P)^n}{n!} e^{-\nu P}$$

$$= (1-P)^n e^{-\nu P}\left[\binom{n}{0} + \frac{\binom{n}{1}}{1!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right) + \frac{\binom{n}{2}}{2!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^2 + \frac{\binom{n}{3}}{3!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^3 + \dots \frac{\binom{n}{n}}{n!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^n\right]$$

Prawdop. ubytku jednej cząstki:

$$m' = m-1$$

$$P(-1) = \left(\cancel{\binom{n}{0}(1-P)}\right)^n \binom{n}{1} P(1-P)^{n-1} e^{-\nu P} + \binom{n}{2} P^2 (1-P)^{n-2} \frac{\nu P}{1!} e^{-\nu P} + \binom{n}{3} P^3 (1-P)^{n-3} \frac{(\nu P)^2}{2!} e^{-\nu P} +$$

$$\dots + \binom{n}{n} P^n \frac{(\nu P)^{n-1}}{n-1!} e^{-\nu P}$$

$$= \cancel{P}(1-P)^n e^{-\nu P}\left[\binom{n}{1}\frac{P}{1-P} + \frac{\binom{n}{2}}{1!}\frac{\nu P^3}{(1-P)^2} + \frac{\binom{n}{3}}{2!}\frac{\nu^2 P^5}{(1-P)^3} + \dots\right.$$

$$= P(1-P)^{n-1} e^{-\nu P}\left[\binom{n}{1} + \frac{\binom{n}{2}}{1!}\frac{\nu P^2}{1-P} + \frac{\binom{n}{3}}{2!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^2 + \dots \frac{\binom{n}{n}}{n-1!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^{n-1}\right]$$

$$P(-2) = P^2(1-P)^{n-2} e^{-\nu P}\left[\binom{n}{2} + \frac{\binom{n}{3}}{1!}\,\frac{\nu P^2}{1-P} + \frac{\binom{n}{4}}{2!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^2 + \sim \quad \frac{\binom{n}{n}}{n-2!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^{n-2}\right]$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$P(-n) = P^n e^{-\nu P}\,\frac{\binom{n}{n}}{0!} = e^{-\nu P} P^n$$

Prawdop. przybytku jednej cząstki

$$P(+1) = \binom{n}{0}(1-P)^n \frac{\nu P}{1!} e^{-\nu P} + \binom{n}{1} P (1-P)^{n-1} \frac{(\nu P)^2}{2!} e^{-\nu P} + \ldots \qquad \binom{n}{n} P^n \frac{(\nu P)^{n+1} e^{-\nu P}}{n+1!}$$

$$= \cancel{(1-P)^n e^{-\nu P}}$$

$$= (\nu P)(1-P)^n e^{-\nu P}\left[\frac{\binom{n}{0}}{1!} + \frac{\binom{n}{1}}{2!}\,\frac{\nu P^2}{1-P} + \frac{\binom{n}{2}}{3!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^2 + \cdots \quad \frac{\binom{n}{n}}{n+1!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^n\right]$$

$$P(+2) = \binom{n}{0}(1-P)^n \frac{(\nu P)^2}{2!} e^{-\nu P} + \binom{n}{1} P (1-P)^{n-1} \frac{(\nu P)^3}{3!} e^{-\nu P} + \cdots$$

$$= (\nu P)^2 (1-P)^n e^{-\nu P}\left[\frac{\binom{n}{0}}{2!} + \frac{\binom{n}{1}}{3!}\,\frac{\nu P^2}{1-P} + \cdots \qquad \frac{\binom{n}{n}}{n+2!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^n\right]$$

Próba : $P(-n) + \cdots P(-1) + P(0) + P(1) + \cdots =$

$$= \binom{n}{0}(1-P)^n e^{-\nu P}\Big[1 + \underbrace{\frac{\nu P}{1!} + \frac{(\nu P)^2}{2!} + \cdots \infty}_{e^{\nu P}}\Big] + \binom{n}{1} P (1-P)^{n-1} e^{-\nu P}\Big[\underbrace{\cancel{1}\frac{\nu P}{1!} + \frac{(\nu P)^2}{2!} + \cdots}_{e^{\nu P}}\Big]$$

$$+ \cdots \qquad =$$

$$= \binom{n}{0}(1-P)^n + \binom{n}{1} P (1-P)^{n-1} + \binom{n}{2} P^2 (1-P)^{n-2} + \cdots = \cancel{1+1-P}\,(1-P+P)^n = 1$$

Ogólnie dla przybytku k cząstek:

$$P(+k) = \frac{(\nu P)^k (1-P)^n e^{-\nu P}}{k!}\left[\binom{n}{0} + \frac{\binom{n}{1}}{k+1}\,\frac{\nu P^2}{1-P} + \frac{\binom{n}{2}}{(k+1)(k+2)}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^2 + \dots\ \frac{\binom{n}{n}}{(k+1)\dots(k+n)}\left(\frac{\nu P^{2}}{1-P}\right)\right]$$

dla ubytku k cząstek:

$$P(-k) = P^k(1-P)^{n-k}\, e^{-\nu P}\left[\binom{n}{k} + \frac{\binom{n}{k+1}}{1!}\,\frac{\nu P^2}{1-P} + \frac{\binom{n}{k+2}}{2!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^2 + \dots\ \frac{\binom{n}{n}}{n-k!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^{n-k}\right]$$

Lepiej odwrotnie uporządkować:

$$P(+k) = \frac{(\nu P)^k(\nu P^2)^n}{(k+n)!}\, e^{-\nu P}\left[\binom{n}{n} + (k+n)\binom{n}{n-1}\frac{1-P}{\nu P^2} + (k+n)(k+n-1)\binom{n}{n-2}\left(\frac{1-P}{\nu P^2}\right)^2 + \dots\right.$$

$$= \frac{\nu^{k+n} P^{k+2n} e^{-\nu P}}{(k+n)!}\left[\binom{n}{0} + (k+n)\binom{n}{1}\frac{1-P}{\nu P^2} + (k+n)(k+n-1)\binom{n}{2}\left(\frac{1-P}{\nu P^2}\right)^2 + \dots\right]$$

$$P(-k) = \frac{\nu^{n-k} P^{2n-k} e^{-\nu P}}{(n-k)!}\left[\binom{n}{0} + \right.$$

W razie dostatecznie dużych ~~[illegible]~~ lim P=1 (dyfuzja szybka)

$$P(+k) = \frac{\nu^{k+n} e^{-\nu}}{k+n!\ \cancel{(k+n)^{k+n}}}\,\frac{e^{k+n}}{\cancel{\sqrt{(k+n)}}} = \left(\frac{\nu}{k+n}\right)^{k+n} \cancel{e^{-\nu+k+n}}_{k>n}\ 2 \quad = \frac{\nu^{k+n} e^{-\nu}}{(k+n)!}$$

stimmt

~~$P(-k) = e^{-\nu}\binom{n}{k}$ [illegible] stimmt~~

dla dostatecznie małych P (dyfuzja powolna)

$$P(+k) = \lim_{P=0}\frac{(\nu P)^k e^{-nP} e^{-\nu P}}{k!} = \underbrace{\lim_{P=0}\frac{(\nu P)^k}{k!}}_{\text{w razie dużych } n \neq \nu,\ \text{a nie zbyt dużych } k} \quad \Big|\quad P(-k) = \lim P^k\binom{n}{k}\ ?$$

są to wartości identyczne

Dalszy ciąg z strony (5):

$$\bar{y} = \frac{2m(m-1)}{\pi}\int_0^\infty e^{-2\alpha y^2}dy\left[2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_0^y e^{-\alpha x^2}dx\right]^{m-2} = \int_0^\infty y\,dP_m \quad \Big\| \quad P_m = \underbrace{\left[2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_0^y e^{-\alpha x^2}dx\right]^m}_{= \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{y\sqrt{\alpha}} e^{-x^2}dx\right]^m}$$

$$\bar{y}\sqrt{\alpha} = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \cancel{\int_0^\infty y\,dy\int_0^y e^{-\alpha}}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \int_0^\infty y\cdot d\left[\int_0^y e^{-x^2}dx\right]^m = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \frac{m}{\sqrt{\alpha}}\underbrace{\int_0^\infty e^{-y^2}y\,dy\left[\int_0^y e^{-x^2}dx\right]^{m-1}}$$

$$= \cancel{-\frac{e^{-y^2}}{2}} + \frac{1}{2}\int (m-1)\,e^{-2y^2}\left[\int_0^y e^{-x^2}dx\right]^{m-2}$$

$$= \frac{2^{m-1}\,m(m-1)}{(\sqrt{\pi})^m\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty e^{-2y^2}\left[\int_0^y e^{-x^2}dx\right]^{m-2}dy$$

Maximum

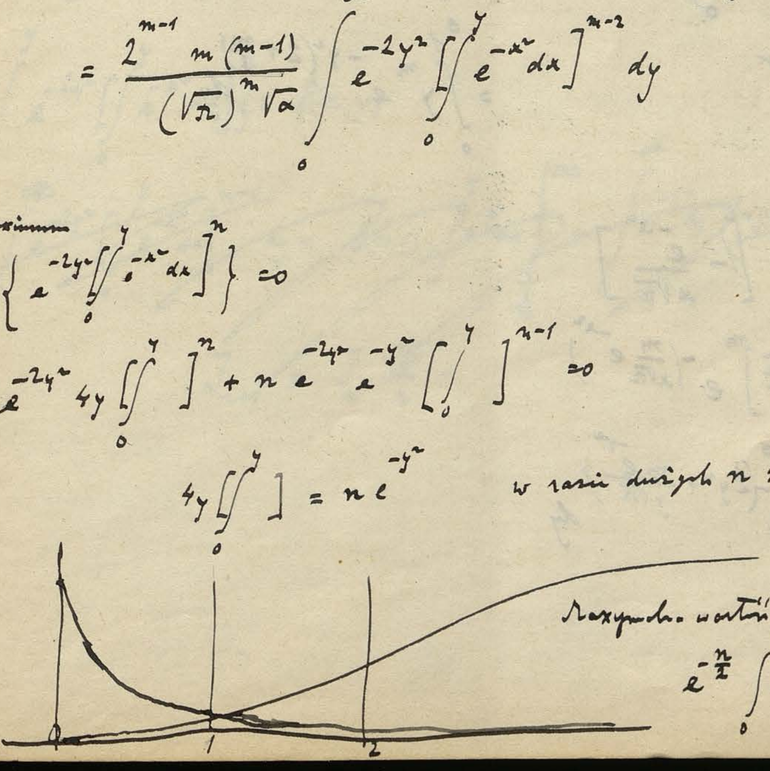
$$d\left\{e^{-2y^2}\left[\int_0^y e^{-x^2}dx\right]^n\right\} = 0$$

$$-e^{-2y^2}4y\left[\int_0^y\right]^n + n\,e^{-2y^2}e^{-y^2}\left[\int_0^y\right]^{n-1} = 0$$

$$4y\left[\int_0^y\right] = n\,e^{-y^2}$$

w razie dużych n: $4y^2 = n$

$y = \frac{\sqrt{n}}{2}$



Najwyższa wartość:

$$e^{-\frac{n}{2}}\int_0^{\frac{\sqrt{n}}{2}} e^{-x^2}dx = e^{-\frac{n}{2}}\int_0^{\frac{n}{2}} e^{-z}\frac{dz}{\sqrt{z}}$$

~~$\int_0^y e^{-x^2}dx = z$~~

~~$e^{-y^2}dy = dz$~~

~~$y^2 = -\lg\left(\frac{dz}{dy}\right)$~~

~~$y = -\sqrt{\lg\left(\frac{dz}{dy}\right)}$~~

~~$m\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} z^{m-1}\,dz\,\sqrt{\lg\left(\frac{dz}{dy}\right)}$~~

~~$z = \alpha y$~~

$$\int_0^y e^{-x^2}dx = \int_0^y\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}\cdot\right)dx$$

$$= y-\frac{y^3}{3}\cdots$$

$$= y\left(1-\frac{y^2}{3}\cdots\right)$$

$$\left(1-\frac{y^2}{3}\right)^m = e^{-\text{[illegible]}\frac{my^2}{3}}$$

~~$\int z^{m-1}\,dz\,\sqrt{\lg\,dz}$~~

$$\int_0^\infty e^{-2y^2}\left[\int_0^y e^{-x^2}dx\right]^{m\,\text{[illegible]}}dy = \int_0^1 + \int_1^\infty$$

~~$\left[\int_0^y e^{-x^2}dx\right]^n = z$~~

~~$\int_0^y e^{-x^2}dx = \sqrt[n]{z}$~~

$$\int_0^1 e^{-2y^2}\cdots\cdots$$

$$= \int_0^1 e^{-2y^2}\,y^{m\,\text{[illegible]}}\,e^{-\frac{my^2}{3}}dy$$

$$= \int_0^1 y^m e^{-y^2\left(2+\frac{m}{3}\right)}dy$$

~~$\int_1^\infty e$~~

$$\int_0^x e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[1-\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\right]$$

$$\left[\int_0^x e^{-x^2}dx\right]^m = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]^m e^{-\left(\frac{m}{x\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\right)}$$

$$\int_1^\infty = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]^m \int_1^\infty e^{-\left(2y^2+\frac{m\,e^{-y^2}}{y\sqrt{\pi}}\right)}dy$$

~~Dalszy ciąg ze strony (16):~~

~~W razie powolnej dyfuzji (lim P = 0) :~~

~~przestrzeń zmienności liczby~~ n :

$$\Delta n = \sum_{k=-\infty}^{+k=+\infty} k\,\mathcal{P}(k) = 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(\nu P)^k}{k!} = 2\sum_{0}^{\infty}\frac{(\nu P)^k}{k!}$$

$$\int_0^\infty e^{-(x+\alpha)^2}dx = f(\alpha)$$

$$\mathcal{P}(+k) = \frac{(\nu P)^k}{k!} \qquad \mathcal{P}(-k) = \binom{n}{k}P^k$$

$$2\int_0^\infty (x+\alpha)\,e^{-(x+\alpha)^2}dx = f'(\alpha) =$$

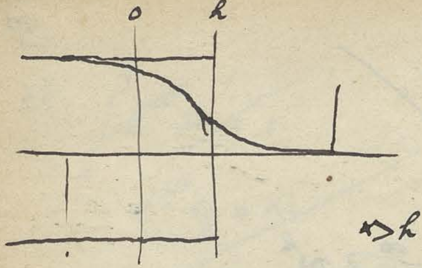
$$\sum P = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P^k + \sum_0^\infty P^k\frac{\nu^k}{k!}$$

$$= \binom{n}{n}P^n + \binom{n}{n-1}P^{n-1} + \binom{n}{n-2}P^{n-2} + \cdots \binom{n}{0}P^0 + \frac{P^0\nu^0}{0!} + \frac{P\nu}{1!} + \frac{P^2\nu^2}{2!} + \cdots$$

$$\int_0^y e^{-2y^2}\left[\int_0^y e^{-x^2}dx\right]^n dy = f(n,y)$$

$$\int_0^\infty e^{-2y^2}\left[\int_0^y e^{-x^2}dx\right]^{n+1} dy = f(n,y)\cdot\int_0^y e^{-x^2}dx\,\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-y^2}\frac{d}{dy}f(n,y)$$

$$J_{n+1} = J_n\frac{\sqrt{2}}{2} -$$



~~$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = D$~~ $\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$x<0$

u

$\int_0^h e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4Dt}} d\xi$

$\xi - x = z$

$\int_{-x}^{h-x} = \int_{x}^{h+x}$

$x>h$

$$u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi D t}} \int_0^h e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}}^{\frac{x-h}{2\sqrt{Dt}}} e^{-z^2} dz$$

$x<h$

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \int_0 + \int_0^{h-x} \dots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} + \int_0^{\frac{h-x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-z^2} dz \right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-1}{2\sqrt{\pi D t}} \left[e^{-\frac{(x-h)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \right]_{x=h} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \left[1 - e^{-\frac{h^2}{4Dt}} \right]$$

co przedyfundowało od początku czasu:

$$\alpha = 2D \int \frac{\partial u}{\partial x} dt \quad = 1 - \frac{1}{h}\int_0^h u \, dx$$

$$= 1 - \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_0^h dx \left[\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-z^2} dz + \int^{\frac{h-x}{2\dots}} \right]}$$

$$h\int_0^{\frac{h}{2\dots}} - \int_0^h x e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx + \cancel{\int_0^{h-x}} - \int_0^{h-x} x e^{-}$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^{\frac{h}{2\sqrt{Dt}}} e^{-z^2} dz + \frac{2\sqrt{Dt}}{h} \left(1 - e^{-\frac{h^2}{4Dt}} \right) \right\}$$

$$\int \frac{\partial u}{\partial x}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{2\sqrt{Dt}}\, e^{-\frac{h^2}{4Dt}}\,dt$$

$$\frac{h}{2\sqrt{Dt}} = z$$

$$\sqrt{t} = \frac{h}{2\sqrt{D}}\,\frac{1}{z}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{h}{2D}\int_\infty^{\frac{h}{2\sqrt{Dt}}} \frac{e^{-z^2}dz}{z^2}$$

$$-\frac{h}{4\sqrt{Dt^3}}\,dt = dz$$

$$-\frac{dt}{2t} = \frac{dz}{z}$$

$$\int \frac{e^{-z^2}dz}{z^2} = -\frac{e^{-z^2}}{z} - 2\int e^{-z^2}dz$$

$$= \frac{2h}{2D\sqrt{\pi}}\left\{\frac{e^{-\frac{h^2}{4Dt}}}{\frac{h}{2\sqrt{Dt}}} + \int_\infty^{\frac{h}{2\sqrt{Dt}}} e^{-z^2}dz\right\} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi D}}$$

$$\frac{x-\xi}{2\sqrt{Dt}} = z \qquad d\xi = -dz\cdot 2\sqrt{Dt}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-1}{\sqrt{\pi Dt}}\int_0^h \frac{x-\xi}{4Dt}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}\,d\xi = \frac{+1}{\sqrt{\pi Dt}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}}^{\frac{x-h}{2\sqrt{Dt}}} z\, e^{-z^2}dz$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\, e^{-z^2}\Big|_{\frac{x-h}{2\sqrt{Dt}}}^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\left[e^{-\frac{x^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(x-h)^2}{4Dt}}\right]$$

$$\frac{h}{2\sqrt{Dt}} = z$$

$$t = \frac{h^2}{4Dz^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=h} = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\left[e^{-\frac{h^2}{4Dt}} - 1\right]$$

$$dt = -\frac{h^2}{2Dz^3}\,dz$$

$$D\int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}\,dt = D\int_\infty^{\frac{h}{2\sqrt{Dt}}} \frac{-z}{h\sqrt{\pi}}\left\{e^{-z^2} - 1\right\}\frac{h^2}{2Dz^3}\,dz = \frac{h}{2D\sqrt{\pi}}\int\left[\frac{e^{-z^2}dz}{z^2} - \frac{dz}{z^2}\right]$$

$$= \frac{h\,D}{2D\sqrt{\pi}}\left[\frac{1-e^{-z^2}}{z} - 2\int_\infty^z e^{-z^2}dz\right]_{z=\frac{h}{2\sqrt{Dt}}} = \left[1-e^{-\frac{h^2}{4Dt}}\right]\frac{\sqrt{tD}}{\sqrt{\pi}} + \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{h}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-z^2}dz$$

jeśli podzielić przez $\frac{h}{2}$, dostanie się procentową dyfuzję, zgodnie z pojedynczą stroną i ze st. (8)

Rachunek str. 7 wymaga następujących poprawek:

1). W razie małych n :

$$\overline{\Delta_t^2} = 2\alpha^2\left(\overline{n^2} - \overline{n}^2\right) = 2\alpha^2\left(\overline{n^2} - \nu^2\right)$$

$$\overline{n}^2 \downarrow = \nu^2$$

$$\frac{n-\nu}{\nu} = \delta$$

$$\overline{\left(n^2 - 2\nu n + \nu^2\right)} = \nu^2\overline{\delta^2}$$

$$\overline{n^2} - \nu^2 = \nu^2\overline{\delta^2}$$

$$\overline{\Delta_t^2} = 2\alpha^2\nu^2\overline{\delta^2}$$

$$= 2\alpha^2\nu$$

zaś procentowa zmienność $\dfrac{\sqrt{\overline{\Delta_t^2}}}{\nu} = \alpha\sqrt{\dfrac{2}{\nu}}$

więc w razie zupełnej każdorazowej [illegible] : $= \sqrt{\frac{2}{\nu}} = \sqrt{2}\sqrt{\overline{\delta^2}}$

2. W tem jest jednak następująca wątpliwość:

Jako zmianę liczby cząstek przyjęliśmy $(n'-n)\alpha$

Tymczasem udowodniono str. 9 tylko że: ~~średnia~~ przeciętna liczba uchodzących cząstek wynosi: $\underline{n\alpha}$; rzeczywista, każdorazowa liczba może być większa lub mniejsza, co na średni kwadrat różnic może wpłynąć.

Spróbujmy natomiast obliczyć przeciętną wartość różnic bezwzględnych

$\overline{|\Delta_t|}$ w tym razie wspomniany błąd pozostaje bez wpływu

Takie nieprawda!

$$\overline{|\Delta_t|} = \sum_0^\infty\sum \left|(n'-n)\right| P(n)\,P(n') = 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} k\,P(n)\,P(n+k) \qquad P(n) = \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} P(n)\sum_{k=0}^{\infty} k\,P(n+k)$$

$$\sum_0^\infty k\,P(n+k) = \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}\left[1\frac{\nu}{n+1} + 2\frac{\nu^2}{(n+1)(n+2)} + 3\frac{\nu^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right]$$

$$\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^3}{(n+1)(n+3)} + \cdots = f(x)$$

$$x^n f = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \cdots .$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^n f(x)\right] = x^n + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots = x^n + x^n f$$

$$n x^{n-1} f + x^n \frac{df}{dx} = x^n + x^n f$$

$$\underline{\frac{df}{dx} + \left(\frac{n}{x} - 1\right) f = 1}$$

$$\frac{\nu^n f(\nu)}{n!} = e^{\nu} - \left[1 + \frac{\nu}{1!} + \frac{\nu^2}{2!} + \cdots \frac{\nu^n}{n!}\right]$$

$$\sum_0^\infty k\,P(n+k) = 1 - e^{-\nu}\left[1 + \frac{\nu}{1!} + \frac{\nu^2}{2!} + \cdots \frac{\nu^n}{n!}\right]$$

Inny sposób układu:

0 0

+1 0 01

$$\overline{|\Delta_t|} = \sum_{k=0}^\infty k \sum_{n=0}^\infty P_{(n)}\, P(n+k)$$

k=0 0 0 11 22 33 44

k=1 01 12 23
10 21 32

k=2 02 13 24
20 31 42

k=3 03 14 25
30 41 52

k=4 04 15 26
40 51 62

$\cancel{\frac{9}{8!} + \frac{1}{4!5!}}$ [illegible]

$$\overline{|\Delta|} = 2e^{-2a} S$$

$$S = 1\frac{\nu}{1} + 2\frac{\nu^2}{2!} + 3\frac{\nu^3}{3!} + 4\frac{\nu^4}{4!} + \cdot$$

$$+\left(\frac{\nu}{1!}\right)^2\left[1\frac{\nu}{2} + 2\frac{\nu^2}{2.3} + 3\frac{\nu^3}{2.3.4} + \right.$$

$$+\left(\frac{\nu^2}{2!}\right)^2\left[1\frac{\nu}{3} + 2\frac{\nu^3}{3.4} + 3\frac{\nu^3}{3.4.5} + \cdot\right.$$

$$= \nu + \frac{\nu^2}{1!} + \frac{\nu^3}{2!} + \frac{\nu^4}{3!} + \cdots$$

$$+\frac{\nu}{1!}\left[\frac{\nu^2}{2!} + 2\frac{\nu^3}{3!} + 3\frac{\nu^4}{4!} + \cdots\right]$$

$$+\frac{\nu^2}{2!}\left[\frac{\nu^3}{3!} + 2\frac{\nu^4}{4!} + 3\frac{\nu^5}{5!} + \cdots\right]$$

$$+\frac{\nu^3}{3!}\left[\frac{\nu^4}{4!} + 2\frac{\nu^5}{5!} + 3\frac{\nu^6}{6!} + \cdots\right]$$

$$+ \cdots$$

$$= \nu + \frac{\nu^2}{1!} + \nu^3\left[\frac{3}{3!} + \frac{1}{1!\,2!}\right]$$

$$+\nu^4\left[\frac{4}{4!} + \frac{2}{1!\,3!}\right] + \nu^5\left[\frac{5}{5!} + \frac{3}{1!\,4!} + \frac{1}{2!\,3!}\right] +$$

$$+\nu^6\left[\frac{6}{6!} + \frac{4}{1!\,5!} + \frac{2}{2!\,4!}\right] + \nu^7\underbrace{\left[\frac{7}{7!} + \frac{5}{1!6!} + \frac{3}{2!\,5!} + \frac{1}{3!4!}\right]}$$

$$+ \cdots$$

$$\nu^9\left[\frac{9}{9!} + \frac{7}{1!\,8!} + \frac{5}{2!\,7!} + \frac{3}{3!6!} + \frac{1}{4!5!}\right]$$

$$\cdots$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\,x^k$$

$$\cancel{\frac{8}{8!} + \frac{6}{1!\,7!} + \frac{4}{2!\,6!} + \frac{2}{3!\,5!} = \frac{8}{3.5!} = \frac{1}{3!\,1.3.5}}$$

$$n = -\frac{1}{2} \qquad \frac{1.3.5\cdots(2k+1)}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k = \frac{(2k+1)!}{(k!)^2}\,\frac{x^k}{2^{2k}}$$

$$S = \sum_0^\infty \frac{\nu^n}{n!}\left[\frac{\nu^{n+1}}{n+1!} + 2\frac{\nu^{n+2}}{n+2!} + 3\frac{\nu^{n+3}}{n+3!} + 4\frac{\nu^{n+4}}{n+4!} \cdots\right] = \frac{x^{2n+1}}{n!}\left[\frac{1}{n+1!} + 2\frac{x}{n+2!} + 3\frac{x^2}{n+3!} + - \right]$$

$$= \frac{x^{2n+1}}{n!}\,\frac{d}{dx}\left[\underbrace{\frac{x}{n+1!} + \frac{x^2}{n+2!} + \frac{x^3}{n+3!} -}_{\underbrace{x^{-n}\left[e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - - \frac{x^n}{n!}\right)\right]}_{e^x x^{-n} - x^{-n} - x^{-n+1} - \frac{x^{-n+2}}{2!} - - - \frac{x^0}{n!}}}\right]$$

$$= \frac{x^{2n+1}}{n!}\left\{e^x x^{-n} - n e^x x^{-n-1} + n x^{-n-1} + (n-1)x^{-n} + \frac{(n-2)}{2!}x^{-n+1} \;\ldots\; + \frac{1}{(n-1)!}\right\}$$

$$= \frac{1}{n!}\left\{e^x x^{n+1} - n e^x x^n + n x^n + \frac{(n-1)}{1!}x^{n+1} + \frac{n-2}{2!}x^{n+2} + - - \frac{1}{n-1!}x^{2n+1}\right\}$$

~~[illegible] $= 2e^{\nu}$~~

Wrzeni drugi ν:

$$W(\delta)\,d\delta = \cancel{[illegible]} = \cancel{[illegible]}\;\sqrt{\frac{\nu}{2\pi}}\,e^{-\nu\frac{\delta^2}{2}}\,d\delta$$

$$\overline{|\Delta t|} = \nu\,\overline{|\delta' - \delta|\,P(\delta)\,P(\delta')} = 2\nu\,\frac{\nu}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\delta .\, e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}} \underbrace{\int_\delta^\infty (\delta' - \delta)\,e^{-\frac{\nu\delta'^2}{2}}\,d\delta'}_{\underbrace{\cancel{\frac{1}{\nu}e^{-\nu\frac{\delta'^2}{2}}\Big|_\infty^\delta - \frac{\delta}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\nu}}}}_{\left[\cancel{\frac{1}{\nu}} - \frac{\delta}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\nu}}\right]e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}}\,d\delta =}}$$

$$= \cancel{\frac{\nu^2}{2\pi}}$$

$$= \frac{\nu^2}{\pi}\left\{\cancel{\frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{2\pi}{\nu}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\nu}}\,\frac{1}{\nu}}\right.$$

$$\int_x^\infty (x'-x)\, e^{-\frac{\nu x'^2}{2}}\, dx' = \frac{1}{\nu} e^{-\frac{\nu x'^2}{2}}\Big|_\infty^x - x \int_x^\infty e^{-\frac{\nu x'^2}{2}} dx'$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\nu x^2}{2}} dx \left\{ \frac{1}{\nu} e^{-\frac{\nu x^2}{2}} - x \int_x^\infty e^{-\frac{\nu x'^2}{2}} dx' \right\} = \frac{1}{\nu}\int_{-\infty} e^{-\nu x^2} dx - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\frac{\nu x^2}{2}} dx \int_x^\infty e^{-\frac{\nu x'^2}{2}} dx'}_{\cancel{+\frac{1}{\nu} e^{-\frac{\nu x^2}{2}} \int_x^\infty \dots \Big|_{-\infty}^{+\infty}} + \frac{1}{\nu}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\nu x^2}{2}} e^{-\frac{\nu x^2}{2}} dx}$$

$$= \frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{\pi}{\nu}} + \frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}$$

$$= \frac{2}{\nu}\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}$$

$$\overline{|\Delta_t|} = 2\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}$$

$$\cdot\, \overline{|\delta|} = 2\sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \int_0^\infty \delta e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}} d\delta = 2\sqrt{\frac{\nu}{2\pi}}\ \frac{1}{\nu} = \sqrt{\frac{2}{\nu\pi}}$$

Więc procentowa zmienność ~~jest~~ Δ_t jest $\boxed{\alpha\sqrt{2}}$ razy większa niż przeciętne [illegible]

Jeśli n wielka liczba, czy nie można uprościć ?

$$P(m) = \sum_{n=} \frac{e^{-\nu} \nu^n}{n!}\ \frac{e^{-n} n^m}{m!}$$

$$= \cancel{\sum \frac{e^{-\nu} e^{n} \nu^{n}}{n^n \sqrt{2n\pi}} \cdot \frac{e^{-n} n^m}{m!}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}} d\delta \cdot e^{-\nu(1+\delta)} \frac{\nu^m (1+\delta)^m}{m!}$$

$$\cancel{n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}}$$

$$\cancel{\frac{e^{-\nu} e^n \nu^n}{n^n \sqrt{2n\pi}}}$$

$$\cancel{\left(\frac{n}{\nu}\right)^n = \left(1 + \frac{n-\nu}{\nu}\right)^n} = e^{\frac{n-\nu}{\nu}\cdot n}$$

?

Jeśli się objętość v uważa za część objętości: V

Jeżeli normalnie na V przypada ν, niech przypadkowo przypadnie n,

a z tychże niech na v przypadkowo przypadnie m $\qquad v = \beta V$

$$\cancel{P(m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} \cdot \frac{e^{-\beta n}(\beta n)^m}{m!}}$$ ~~powinno być~~ $\cancel{\frac{e^{-\beta\nu}(\beta\nu)^m}{m!}}$

$$\cancel{= \frac{e^{-\nu}\beta^m}{m!} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\nu e^{-\beta}]^n n^m}{n!}}_{0 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{2^m\alpha^2}{2!} + \frac{3^m\cdot\alpha^3}{3!} + \frac{4^m\alpha^4}{4!} + \cdots}} \qquad \cancel{= \frac{e^{-\nu}\beta^m}{m!} \cdot e^{\nu(1-\beta)}\nu^m}$$

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} \beta^m \binom{n}{m} (1-\beta)^{n-m} = e^{-\nu}\left[\frac{\beta}{1-\beta}\right]^m \sum \frac{\nu^n}{n!}\binom{n}{m}(1-\beta)^n$$

$$= e^{-\nu}\left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)^m \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} \frac{[\nu(1-\beta)]^n}{n!}}_{=} \qquad \text{powinno być} = \frac{e^{-\beta\nu}(\beta\nu)^m}{m!}$$

$$\overset{?}{=} e^{-\nu}\frac{\beta^m}{(1-\beta)^m} \cdot \frac{[(1-\beta)\nu]^m e^{\nu(1-\beta)}}{m!}$$

czy

$$\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} \frac{x^n}{n!} \overset{?}{=} \frac{e^x x^m}{m!}$$

$$= \cancel{1} = \frac{m!}{m!\,m!}\frac{x^m}{1} + \frac{(m+1)!}{m!\,1!}\frac{x^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{(m+2)!}{m!\,2!}\cdot\frac{x^{m+2}}{(m+2)!} + \cdots$$

$$= \cancel{\frac{x^m}{m!} + \frac{x^{m+1}}{1!}} \frac{x^m}{m!}\left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right] = \frac{x^m e^x}{m!}$$

stimmt!

Patrz to samo str. 10

Przykłady:

Prawdop. opuszczenia m cząstek, bez względu na początkową liczbę

ruchy pojedyńczych cząstek są niezależne, przybywanie i opuszczanie są zupełnie niezależne

$$W(-m) = \frac{(\nu P)^m}{m!} e^{-\nu P}$$

Prawdop. przybycia m' cząstek

$$W(+m') = \frac{(\nu P)^{m'}}{m'!} e^{-\nu P}$$

Spowoduje to $\overset{\text{przybytek}}{\text{zmianę}}$ $(m'-m)$

Średni kwadrat różnicy będzie zatem

$$\overline{\Delta_t^2} = \sum_0^\infty \sum_0^{\infty}{}' (m'-m)^2 \frac{(\nu P)^{m+m'} e^{-2\nu P}}{m!\, m'!}$$

$$= 2\left[\sum_m{}' \frac{(\nu P)^m e^{-2\nu P}}{m!} \sum_{m'} \frac{m'^2 (\nu P)^{m'}}{m'!} \cancel{\pm} - \sum \frac{m(\nu P)^m}{m!} e^{-2\nu P} \sum \frac{m'(\nu P)^{m'}}{m'!}\right]$$

$$= 2 e^{-2\nu P} \left\{ \sum_0^\infty{}' \frac{x^m}{m!} \sum \frac{m^2 x^m}{m!} - \left(\sum \frac{m x^m}{m!}\right)^2 \right\}$$

$$\sum_0^\infty{}' \frac{x^m}{m!} = e^x \qquad \sum \frac{m^2 x^m}{m!} = \sum_1^\infty \frac{m x^m}{(m-1)!} = \sum_0^\infty \frac{(m+1) x^{m+1}}{m!} = x \frac{d}{dx}(x e^x)$$

$$= x e^x + x^2 e^x$$

$$= e^x x (1+x)$$

$$\left.\begin{array}{l} x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots \\ \quad + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \dots \end{array}\right\} = x + 2x^2 + \frac{3x^3}{2!} + \frac{4x^4}{3!} + \dots$$

$$\frac{1}{m!} + \frac{1}{m+1!} = \frac{1}{m!}\left(1 + \frac{1}{m+1}\right) = \frac{1}{m!}\frac{m+2}{m+1} = \frac{m+2}{m+1!}$$

$$\sum_0^\infty \frac{n^2 x^n}{n!} = x(1+x)e^x$$

$$\sum_1^\infty \frac{n x^n}{n!} = \sum \frac{x^n}{(n-1)!} = x e^x$$

(To jest ostatecznie rozwiązanie!)

$$\overline{\Delta_t^2} = 2e^{-2x}\left\{e^x x(1+x)e^x - (xe^x)^2\right\} = 2\left\{x+x^2-x^2\right\} = 2x = \underline{\underline{2\nu P}}$$

Procentowa „średnia" różnica:

$$\frac{\sqrt{\overline{\Delta_t^2}}}{\nu} = \sqrt{\frac{2P}{\nu}}$$

Procentowe średnie odchylenie:

$$\sqrt{\overline{\delta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\nu}}$$

zatem procentowa średnia różnica większa od procent. średniego odchylenia w stosunku $\sqrt{2P} : 1$

(więc różnica w porównaniu z poprzednim wynikiem występuje w $\sqrt{P}$ zamiast P!)

---

1 2 0.0 2 2.0 1 2.1 2 3.1 1 2.1 2 1.0 0 0.2 2 0.1 3 4.0 0 1.2 1 1.2 (Sondy)

9	0	
11	1	11
11	2	44
2	3	18
1	4	16

89 : 31 = 2.87
270
22

$17^2 = 289$
119
$16^2 = 256$

$\sqrt{2.87} = 1.694$

$\nu = 1.55$

$$\Delta P = \frac{\overline{\Delta_t}}{2\nu} = \frac{1.694}{3.1} = 0.55$$

Dalszy ciąg str. 17

$$\bar{y} = \int \frac{2^{m-1}\, m(m-1)}{(\sqrt{\pi})^m \sqrt{\alpha}} \int_0^\infty e^{-2x^2} dx \left[\int_0^x e^{-\cancel{2}z^2} dz\right]^{m-2}$$

$$(\bar{y})^2 = \left[\quad\right]^2 \int_0^\infty \underbrace{e^{-2(x^2+y^2)} dx\, dy \left[\int_0^x \cdot \int_0^y\right]^{m-2}}$$

$$\int_0^\infty e^{-2r^2} r\, dr\, d\varphi \left[\int_0^{r\sin\varphi} e^{-z^2} dz \cdot \int_0^{r\cos\varphi} e^{-z^2} dz\right]^{m-2}$$

~~$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r\sin\varphi} e^{-z^2} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r\cos\varphi} e^{-z^2} dz$~~

~~$(\bar{y})^2 = \left[\quad\right]^2 \int_0^\infty e^{-2r^2} r\, dr$~~

$$= \frac{1}{2}\int e^{-2r^2} d\varphi \left[\quad\right]^{m-2} \Big|_0^\infty$$

$$-\frac{1}{2}\int e^{-2r^2} d\varphi\, dr (m-2) \left[\int_0^{r\sin\varphi} \int_0^{r\cos\varphi}\right]^{m-3} \left[e^{-r^2\sin^2\varphi} \sin\varphi \int_0^{r\cos\varphi} + e^{-r^2\cos^2\varphi} \cos\varphi\right]$$

?

$$I_n = \int_0^\infty [f(x)]^2 dx \left[\int_0^x f(z) dz\right]^n$$

$$= \left\{\int f dx \cdot f(x) \left[\int_0^x f dz\right]^n\right\}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty dx \int_0^x f dx \left\{f'(x) \left[\int_0^x\right]^n + n[f(x)]^2 \left[\int_0^x\right]^{n-1}\right\}$$

$$= \left\{\left[\int_0^x f dz\right]^{n+1} f(x)\right\}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty dx\, f'(x) \left[\int_0^x f dz\right]^{n+1} - n\underbrace{\int_0^\infty dx\, [f(x)]^2 \left[\int_0^x \cdots\right]^n}_{I_n}$$

$$= f(x) \frac{\left[\int_0^x\right]^{n+1}}{n+1}\Big|_0^\infty - \frac{1}{n+1} \overset{0}{\int_0^\infty} dx\, f'(x) \left[\int_0^x f dz\right]^{n+1}$$

(bezpośrednio)

Pod warunkiem:

1). $\cancel{1 = m\left[2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\right]^n \int_0^\infty}$ $\quad 1 = m\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right]^m \int_0^\infty f(x)\,dx \left[\int_0^x f(z)\,dz\right]^{m-1}$

$$1 = (n+1)\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right]^{n+1} \int_0^\infty f(x)\,dz \left[\int_0^x f(z)\,dz\right]^n$$

$$J_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^\infty dx\, f'(x) \left[\int_0^x f(z)\,dz\right]^{n+1}$$

2). $f'(x) = -2x\,f(x)$

$$\cancel{+\int_0^\infty x\,f(x)\,dx\left[\int_0^x f\ldots\right]^{n+1} = x\left[\int_0^x f\,dz\right]^{n+2}\Big|_0^\infty}$$

$$= +\frac{2}{n+1}\int_0^\infty x.\,dx.\,f(x)\left[\int_0^x f(z)\,dz\right]^{n+1}$$

$$\cancel{J_n = -\frac{n}{n+1}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]^{n+1} + 2\int_0^\infty x\,f(x)\,dx\left[\int_0^x f(z)\,dz\right]^{n+1}} -$$

$$P_m = \left[2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_0^y e^{-\alpha x^2}\,dx\right]^m = \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{y\sqrt{\alpha}} e^{-x^2}\,dx\right]^m$$

Inna próba:

$$|\overline{y_m}| = \int_0^\infty y\;dP_m$$

$$\sqrt{\alpha}\,|\overline{y_m}| = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \int_0^\infty y\;d\left[\int_0^y e^{-z^2}\,dz\right]^m = m\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \int_0^\infty y\,e^{-y^2}\,dy\left[\int_0^y e^{-z^2}\,dz\right]^{m-1}$$

$$\int_0^Y y\;dP_m = y\,P_m\Big|_0^Y - \int_0^Y P_m\,dy$$

$$\int_0^Y dy\left[\int_0^y e^{-z^2}\,dz\right]^m$$

$$J_n = \int_0^{Y} dy \left[\int_0^y e^{-\alpha z^2} dz\right]^n = \frac{1}{(\sqrt{\alpha})^{n+1}} \int_0^{Y\sqrt{\alpha}} dy \int_0^y e^{-z^2} dz = J_{n(\alpha)}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = -\int_0^{Y} dy\; n \left[\int_0^y e^{-\alpha z^2} dz\right]^{n-1} \int_0^y z^2 e^{-\alpha z^2} dz = -\frac{n}{(\sqrt{\alpha})^{n+3}} \int_0^{Y\sqrt{\alpha}} dy \left[\int_0^y e^{-z^2} dz\right]^{n-1} \int_0^y z^2 e^{-z^2} dz$$

$$\int_0^y z^2 e^{-z^2} dz = -\frac{z e^{-z^2}}{2}\Big|_0^y + \frac{1}{2}\int_0^y e^{-z^2} dz \qquad ?$$

$$\bar{y} = \frac{2^{m-1}\, m(m-1)}{\sqrt{\alpha}\,(\sqrt{\pi})^m} \left\{ \underbrace{\int_0^\infty e^{-x^2} dx \left[\int_0^x \right]^{m-2}}_{= \frac{(\sqrt{\pi})^{m-1}}{(m-1)(\sqrt{2})^{m-1}}} - \int_0^\infty \frac{x^2}{1} e^{-x^2} dx \left[\int \right]^{m-2} + \int \frac{x^4}{2!} e^{-x^2} dx \left[\quad\right] - \int \frac{x^6}{3!} '' - \right\}$$

$$\int_0^\infty x^{2k} e^{-x^2} dx \left[\int_0^x e^{-z^2} dz\right]^n = -\frac{x^{2k-1}}{2} \cdot e^{-x^2} \cdot \left[\int_0^x \right]^n + \frac{1}{2}\int e^{-x^2} (2k-1)\, x^{2k-2} \left[\quad\right]^n + \frac{n}{2}\int e^{-2x^2} x^{2k-1} \left[\quad\right]^{n-1} dx$$

$$\int_0^\infty x^k e^{-mx^2} dx \left[\int_0^x e^{-y^2} dy\right]^n = -\frac{x^{k-1} \cdot \left[\int_0^x \right]^n \cdot e^{-mx^2}}{2m}\Bigg|_0^\infty + \frac{1}{2m}\int e^{-mx^2} (k-1)\, x^{k-2} \left[\int \right]^n + \frac{n}{2m}\int e^{-mx^2} x^{k-1} \cdot e^{-x^2} \left[\quad\right]^{n-1}$$

100

$$J(k,m,n) = \frac{k-1}{2m} J(k-2,m,n) + \frac{n}{2m} J(k-1,m+1,n-1)$$

Chodzi o wartości $J(1,1,n)$ lub $J(0,2,n)$

$$\lim_{m=\infty} J(k,m,n) = 0; \quad \lim_{n=\infty} J(k,m,n) = 0; \quad \lim_{k=\infty} J(k,m,n) = \infty$$

$$\lim_{m=0} J(k,m,n) \qquad \lim_{n=0} J(k,m,n) = \text{znane}$$

$$J(k-1,m+1,n-1) = \frac{k-2}{2(m+1)} J(k-3,m+1,n-1) + \frac{n-1}{2(m+1)} J(k-2,m+2,n-2)$$?

$$\left[\int_0^y e^{-x^2}dx\right]^n = f(0) + \frac{y}{1} f'(0) + \frac{y^2}{2!} f''(0) + \cdots$$

$$f' = n e^{-y^2} [\;]^{n-1}$$

$$f'' = n(n-1) e^{-2y^2} [\;]^{n-2} - 2ny e^{-y^2} [\;]^{n-1}$$

$$f''' = n(n-1)(n-2) e^{-3y^2} [\;]^{n-3} \qquad x = e^{-y^2}$$

$$\lg x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdot -$$

$$|\bar{y}_1| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_0^\infty y\, e^{-y^2} dy}_{\frac{1}{2} e^{-y^2}\Big|_\infty^0} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}}$$

$$|\bar{y}_2| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\; 2\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \underbrace{\int_0^\infty y\, e^{-y^2} dy \int_0^y e^{-y^2} dy}_{\cancel{\frac{1}{2} e^{-y^2} \int_0^y \Big|_\infty^0} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^\infty e^{-2y^2} dy}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha\pi}}$$

$$|\bar{y}_3| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\; 3\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \underbrace{\int_0^\infty y\, e^{-y^2} dy \left[\int_0^y \quad\right]^2}$$

$$\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^\infty e^{-2y^2} dy \int_0^y e^{-z^2} dz}$$

$$\underbrace{\int_0^y e^{-2y^2} dy \cdot \int_0^y e^{-z^2} dz}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\quad \frac{\sqrt{\pi}}{2}}\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-y^2} dy \int_0^y e^{-2y^2} dy$$

$\cancel{\int e^{-y^2} dy \int_0^y e^{-2y^2} dy}$

$\cancel{\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}}$ $\cancel{\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{3}}}$ $\cancel{\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}}$

$\cancel{2\sin^2\varphi = 1 - \cos 2\varphi}$

$\cancel{\frac{2}{3} = 1 - \cos 2\varphi}$

~~[illegible]~~

$\cancel{\cos 2\varphi = \frac{1}{3}}$

$$\int_0^\infty e^{-2y^2}\left[y - \frac{y^3}{3.1!} + \frac{y^5}{5.2!} - \frac{y^7}{7.3!} \cdots - \right]dy =$$

$$= y\int_0^\infty e^{-y^2}\left[\frac{y}{2} - \frac{y^3}{3.4.1!} + \frac{y^5}{5.8.2!} - \frac{y^7}{7.16.3!} - \right]dy$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha y^2}dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad \int_0^\infty y\, e^{-\alpha y^2}dy = \frac{e^{-\alpha y^2}}{2\alpha}\Big|_\infty^0 = \frac{1}{2\alpha}$$

$$\int_0^\infty y^3 e^{-\alpha y^2}dy = \frac{1}{2\alpha^2}$$

$$\int y^5 e^{-\alpha y^2}dy = \frac{2}{2\alpha^3}$$

$$\int y^7 \quad = \frac{2.3}{2\alpha^4} \qquad \int y^{2k+1}e^{-\alpha y^2}dy = \frac{k!}{2\alpha^{k+1}}$$

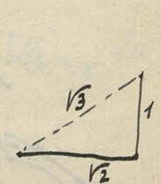
$$\int_0^\infty y^{2k+1}e^{-y^2}dy = \frac{k!}{2}$$

$$|\bar{y}_3| = 3\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^3\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\;\frac{1}{4}\left\{\underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1!}{3.4.1!} + \frac{2!}{5.8.2!} - \frac{3!}{7.16.3!}\cdots -}_{}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdots$$

$\frac{1}{2} = x^2$

$$x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5} - \frac{x^8}{7} \quad = f(x) = x^6\left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} - -\right]$$



$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \cdots = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = x\int\frac{dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x$$

$$|\bar{y}_3| = \frac{3.2}{\sqrt{\alpha\pi^3}}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi^3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$W(x, x_0)_\tau \, dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \left[e^{-\frac{(x-x_0+\mu 3t)^2}{4Dt}} + \beta \, e^{-\frac{(x+\mu Pt)^2}{4Dt}} \right] dx$$

$$+ e^{-\frac{(x+x_0+\mu Pt)^2}{4Dt}}$$

β oznaczyć z warunku:

$$\int_{x=0}^{\infty} W(x, x_0)_\tau \, dx = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x=0}^{\infty} e^{-\left[x-x_0+\mu\frac{P\sqrt{t}}{2\sqrt{D}}\right]^2} dx + \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\left[x+\mu\frac{P\sqrt{t}}{2\sqrt{D}}\right]^2} dx = 1$$

$$\cancel{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} \underbrace{\int_{-x_0+\frac{\mu P\sqrt{t}}{2\sqrt{D}}}^{\infty} e^{-y^2} dy}_{} \left(+ \int \dots \right. + \beta \int_{\mu\frac{P\sqrt{t}}{2\sqrt{D}}}^{\infty} = \sqrt{\pi}$$

$$\underbrace{\cancel{\sqrt{\pi}} - \int_{x_0-\mu\frac{P}{2}\frac{\sqrt{t}}{D}}^{\infty} + \int_{x_0+\mu\frac{P}{2}\frac{\sqrt{t}}{D}}^{\infty}}_{x_0+\dots} + \beta \int_{\mu\frac{P\sqrt{t}}{2\sqrt{D}}}^{\infty} = \cancel{\sqrt{\pi}}$$

$$\int_{x_0 \boxed{+\mu\frac{P}{2}\frac{\sqrt{t}}{D}} \varepsilon}$$

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-y^2} dy = 2\varepsilon \, e^{-x_0^2}$$

$$\cancel{e^{-x_0 2y}} \qquad \cancel{e^{-(x_0-\varepsilon)^2}}$$

Może jednak wystarczy przyjąć:

$$W(x,x_0)_\tau = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\left[e^{-\frac{[x-x_0+\mu P t]^2}{4Dt}} + e^{-\frac{[x+x_0-\mu P t]^2}{4Dt}}\right]$$

gdyż stąd warunek $\int_0^\infty W = 1$ spełniony

$$W(x,x_0)_{2\tau} = \frac{1}{4\pi D t}\int_0^\infty \underbrace{\left[e^{-\frac{(\alpha-x_0+\mu P\tau)^2}{4D\tau}} + e^{-\frac{(\alpha+x_0-\mu P\tau)^2}{4D\tau}}\right]\left[e^{-\frac{(x-\alpha+\mu P\tau)^2}{4D\tau}} + e^{-\frac{(x+\alpha-\mu P\tau)^2}{4D\tau}}\right]} d\alpha$$

$$= \frac{1}{4\pi D t}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4D\tau}\left[2\alpha^2 + 2\alpha(x+x_0) + 2(\mu P\tau)^2 + 2\mu P\tau(x+x_0) + (x^2+x_0^2)\right]} d\alpha$$

$$+ e^{-\frac{1}{4D\tau}\left[2\alpha^2+2\alpha(x_0-x-2\mu P t) + 2(\mu P\tau)^2 + 2\mu P\tau(x-x_0) + x^2+x_0^2\right]} d\alpha$$

$$+ e^{-\frac{1}{4D\tau}\left[2\alpha^2+2\alpha(x-x_0) + 2(\mu P\tau)^2 - 2\mu P\tau(x+x_0) + x^2+x_0^2\right]} d\alpha$$

$$+ e^{-\frac{1}{4D\tau}\left[2\alpha^2+2\alpha(x+x_0 - 2\mu P\tau) + 2(\mu P\tau)^2 - 2\mu P\tau(x+x_0) + e^2+x_0^2\right]} d\alpha$$

$$W(x,x_0)_{2\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\alpha,x_0)_\tau\, W(x,\alpha)_\tau\, d\alpha$$

$$W(x,x_0)_{3\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} W(\alpha,x_0)_\tau\, W(x,\alpha)_{2\tau}\, d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta\,.\,W(\beta,x_0)_\tau \int W(\alpha,\beta)_\tau\, W(x,\alpha)_\tau\, d\alpha$$

$$W(x,x_0)_{4\tau} = \int W(\gamma,x_0)_\tau\, W(x,\gamma)_{3\tau}\, d\gamma = \int W(\gamma,x_0)_\tau\, d\gamma \int W(\beta,\gamma)_\tau\, d\beta \int W(\alpha,\beta)_\tau\, W(x,\alpha)_\tau\, d\alpha$$

Dalszy ciąg str. 29

Czy nie da się ów wzór otrzymany wyprowadzić także z [illegible] wzorów str. 16

Prawdop. przybytku k (przy danej liczbie n)

$$P(+k) = \frac{e^{-\nu P}(\nu P)^k(\nu P^2)^n}{(k+n)!}\left[\binom{n}{0} + (k+n)\binom{n}{1}\frac{1-P}{\nu P^2} + (k+n)(k+n-1)\binom{n}{2}\left(\frac{1-P}{\nu P^2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + (k+n)\dots(k+1)\binom{n}{n}\left(\frac{1-P}{\nu P^2}\right)^n\right]$$

$$P(+k) = e^{-\nu P}(\nu P)^k(1-P)^n\left[\frac{\binom{n}{0}}{k!} + \frac{\binom{n}{1}}{k+1!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^1 + \frac{\binom{n}{2}}{k+2!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^2 + \dots \quad \frac{\binom{n}{n}}{k+n!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^n\right]$$

$$P(-k) = e^{-\nu P}P^k(1-P)^{n-k}\left[\binom{n}{k} + \frac{\binom{n}{k+1}}{1!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^1 + \frac{\binom{n}{k+2}}{2!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^2 + \dots \quad \frac{\binom{n}{n}}{n-k!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^{n-k}\right]$$

$$\overline{\Delta^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!}\sum_{k=-n}^{+\infty}{}' k^2 P(\pm k)$$

Lepiej może wyrazić $P(\pm k)$ inaczej

Prawdop. że liczba n przejdzie na liczbę $m = n+k$ będzie:

$$P(m) = P(n+k) = e^{-\nu P}(\nu P)^{m-n}(1-P)^n\left[\frac{\binom{n}{0}}{m-n!} + \frac{\binom{n}{1}}{(m-n+1)!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^1 + \frac{\binom{n}{2}}{m-n+2!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^2 + \dots \frac{\binom{n}{n}}{m!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^n\right]$$

$m = n-k$

$$P(m) = P(n-k) = e^{-\nu P}P^{n-m}(1-P)^m\left[\binom{n}{n-m} + \frac{\binom{n}{n-m+1}}{1!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^1 + \frac{\binom{n}{n-m+2}}{2!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^2 + - \frac{\binom{n}{n}}{m!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^m\right]$$

$$\Delta^2 = 2\nu P = e^{-\nu(1+P)}\boxed{e^{\nu(1+P)}\,2\nu P}$$
$$= 2\nu P\left\{1 + \nu(1+P) + \frac{\nu^2(1+P)^2}{2} + \dots\right]$$
$$= 2\nu P + 2\nu^2 P + 2\nu^2 P^2 + \nu^3 P + 2\nu^3 P^2 + \nu^3 P^3 + \dots$$

$$P(+k) = e^{-\nu P}\left[\frac{\binom{n}{0}}{k!}(\nu P)^k(1-P)^n + \frac{\binom{n}{1}}{k+1!}(\nu P)^{k+1}P(1-P)^{n-1} + \frac{\binom{n}{2}}{k+2!}(\nu P)^{k+2}P^2(1-P)^{n-2} \cdots\cdots \frac{\binom{n}{n}}{k+n!}(\nu P)^{k+n}P^n\right]$$

$$P(-k) = e^{-\nu P}\left[\binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k} + \frac{\binom{n}{k+1}P^k}{1!}\nu P^2(1-P)^{n-k+1} + \cdots \frac{\binom{n}{n}}{n-k!}P^k(\nu P^2)^{n-k}\right]$$

$$\Delta^2 = e^{-\nu}\cdot e^{-\nu P}\Big\{\overset{k=1}{[\nu P]} + \overset{k=2}{\frac{2^2}{2!}}[\nu P]^2 + \frac{3^2}{3!}[\nu P]^3 + \frac{4^2}{4!}[\nu P]^4 \cdots\cdots \infty\Big\}\ \boxed{n=0}$$

$$\boxed{n=1}\quad + \frac{\nu}{1!}\Big\{\overset{k=-1}{P} + \overset{k=0}{\times} + \overset{\boxed{k=+1}}{\frac{1}{1!}(\nu P)(1-P)} + \frac{1}{2!}(\nu P)^2P +$$

$$\boxed{k=+2}\quad + \frac{2^2}{2!}(\nu P)^2(1-P) + \frac{2^2}{3!}(\nu P)^3P \qquad \cancel{k=3}$$

$$\boxed{k=3}\quad + \frac{3^2}{3!}(\nu P)^3(1-P) + \frac{3^2}{4!}(\nu P)^4P + \cdots\cdots\Big\}$$

$$\boxed{n=2}\quad + \frac{\nu^2}{2!}\Big\{\overset{k=-2}{2^2P^2} + \overset{k=1}{2P(1-P)} + \nu P^2 . P$$

$$\boxed{k=+1}\quad + (\nu P)(1-P)^2 + \frac{2}{2!}(\nu P)^2P(1-P) + \frac{1}{3!}(\nu P)^3P^2$$

$$\boxed{k=2}\quad + \frac{2^2}{2!}(\nu P)^2(1-P)^2 + \frac{2^2.2}{3!}(\nu P)^3P(1-P) + \frac{2^2.}{4!}(\nu P)^4P^2$$

$$\boxed{k=3}\quad + \frac{3^2}{3!}(\nu P)^3(1-P)^2 + \frac{3^2.3}{4!}(\nu P)^4P(1-P) + \frac{3^2}{5!}(\nu P)^5P^2\Big\}$$

$$+ \cdots\cdots$$

$$\boxed{n=3}\quad + \frac{\nu^3}{3!}\Big\{\overset{k=-3}{3^2.P^3} + \overset{k=-2}{2^2.3P^2(1-P)} + 2^2.P^2\nu P^2$$

$$\boxed{k=-1}\quad + 3P(1-P)^2 + 3\frac{P}{1!}\nu P^2(1-P) + \frac{1}{2!}P(\nu P^2)^2$$

$$\boxed{k=+1}\quad + \nu P(1-P)^3 + \frac{3}{2!}(\nu P)^2P(1-P)^2 + \frac{3}{3!}(\nu P)^3P^2(1-P) + \frac{1}{4!}(\nu P)^4P^3$$

$$\boxed{k=+2}\quad + \frac{2^2}{2!}(\nu P)^2(1-P)^3 + \frac{2^2.3}{3!}(\nu P)^3P(1-P)^2 + \frac{2^2.3}{4!}(\nu P)^4P^2(1-P) + \frac{2^2.1}{5!}(\nu P)^5P^3$$

Nasuwa się stąd 2 zadania:

1). Jaki jest średni kwadrat przybytku lub ubytku dla danej liczby początkowej n ?

Potem z tego przejść do ogólnego średniego kwadratu

2). Jakie jest bezwzględne prawdop. danego przybytku ±+k lub ubytku −k, bez względu na początkową liczbę n ? Stąd przejść do średniego kwadratu.

Jako podstawę mamy wzory:

$$P(+k) = e^{-\nu P}\left[\binom{n}{0}(1-P)^{n}\frac{(\nu P)^{k}}{k!} + \binom{n}{1}(1-P)^{n-1}P\frac{(\nu P)^{k+1}}{k+1!} + \dots \quad \binom{n}{n}\cdot P^{n}\frac{(\nu P)^{n+k}}{n+k!}\right]$$

$$P(-k) = e^{-\nu P}\left[\binom{n}{k}P^{k}(1-P)^{n-k} + \binom{n}{k+1}\frac{P^{k+1}(\nu P)(1-P)^{n-k-1}}{1!} + \binom{n}{k+2}P^{k+2}\frac{(\nu P)^{2}(1-P)^{n-k-2}}{2!} + \dots \right.$$

$$\left. + \dots \quad \binom{n}{n}P^{n}\frac{(\nu P)^{n-k}}{n-k!}\right]$$

$$P(+k) = e^{-\nu P}\sum_{m=0}^{m=n}{}'\binom{n}{m}(1-P)^{n-m}P^{m}\frac{(\nu P)^{k+m}}{(k+m)!}$$

$$P(-k) = e^{-\nu P}\sum_{m=k}^{m=n}{}'\binom{n}{m}(1-P)^{n-m}P^{m}\frac{(\nu P)^{m-k}}{(m-k)!}$$

$$\lim_{t=\infty} P(+k) = e^{-\nu}\frac{\nu^{n+k}}{n+k!}$$

$$\lim P(-k) = e^{-\nu}\frac{\nu^{n-k}}{n-k!}$$

Zadanie (1)

$$(1)\quad \bar{\Delta}^{2}(n) = e^{-\nu P}\left\{ n^{2} P^{n} + (n-1)^{2}\left[\binom{n}{n-1}(1-P)P^{n-1} + \binom{n}{n}\frac{P^{n}(\nu P)}{1!}\right] + \right.$$

$$+ (n-2)^{2}\left[\binom{n}{n-2}(1-P)^{2}P^{n-2} + \binom{n}{n-1}(1-P)P^{n-1}\frac{(\nu P)}{1!} + \binom{n}{n}P^{n}\frac{(\nu P)^{2}}{2!}\right] +$$

$$+ (n-3)^{2}\left[\binom{n}{n-3}(1-P)^{3}P^{n-3} + \binom{n}{n-2}(1-P)^{2}P^{n-2}\frac{(\nu P)}{1!} + \binom{n}{n-1}(1-P)P^{n-1}\frac{(\nu P)^{2}}{2!} + \binom{n}{n}P^{n}\frac{(\nu P)^{3}}{3!}\right]$$

$$+1\left[\binom{n}{1}P(1-P)^{n-1}+\binom{n}{2}P^2(\nu P)\frac{(1-P)^{n-2}}{1!}+\binom{n}{3}P^3(\nu P)^2\frac{(1-P)^{n-3}}{2!}+\cdots\cdots\binom{n}{n}\frac{P^n(\nu P)^{n-1}}{(n-1)!}\right]$$

$$+0$$

$$+1\ \cancel{\left[\binom{n}{0}P(1-P)^{n-1}+\binom{n}{2}P^2(\nu P)(1-P)\right.}$$

$$+1\left[\binom{n}{0}(1-P)^n\frac{\nu P}{1!}+\binom{n}{1}(1-P)^{n-1}\frac{P(\nu P)^2}{2!}+\binom{n}{2}(1-P)^{n-2}\frac{P^2(\nu P)^3}{3!}+\cdots\binom{n}{n}P^n\frac{(\nu P)^{n+1}}{n+1!}\right]$$

$$+2^2\left[\binom{n}{0}(1-P)^n\frac{(\nu P)^2}{2!}+\binom{n}{1}(1-P)^{n-1}P\frac{(\nu P)^3}{3!}+\binom{n}{2}(1-P)^{n-2}P^2\frac{(\nu P)^4}{4!}+\cdots\binom{n}{n}P^n\frac{(\nu P)^{n+2}}{n+2!}\right]$$

$$+3^2\left[\binom{n}{0}(1-P)^n\frac{(\nu P)^3}{3!}+\binom{n}{1}(1-P)^{n-1}P\frac{(\nu P)^4}{4!}+\binom{n}{2}(1-P)^{n-2}P^2\frac{(\nu P)^5}{5!}+\cdots\binom{n}{n}P^n\frac{(\nu P)^{n+3}}{n+3!}\right]$$

$$+\cdots\qquad\cdots$$

$$=e^{-\nu P}\left\{\left[n^2P^n+(n-1)^2\binom{n}{n-1}(1-P)P^{n-1}+(n-2)^2\binom{n}{n-2}(1-P)^2P^{n-2}+\cdots+1^2\binom{n}{1}P(1-P)^{n-1}\right]\right.$$

$$+\frac{\nu P}{1!}\left[(n-1)^2\binom{n}{n}P^n+(n-2)^2\binom{n}{n-1}(1-P)P^{n-1}+(n-3)^2\binom{n}{n-2}(1-P)^2P^{n-2}+\ldots+1^2\binom{n}{2}P^2(1-P)^{n-2}\right.$$

$$\left.+0^2\binom{n}{1}P(1-P)^{n-1}\qquad+1^2\binom{n}{0}\cancel{P}(1-P)^n\right]$$

$$+\frac{(\nu P)^2}{2!}\left[(n-2)^2\binom{n}{n}P^n+(n-3)^2\binom{n}{n-1}(1-P)P^{n-1}+(n-4)^2\binom{n}{n-2}(1-P)^2P^{n-2}+.\qquad+1^2\binom{n}{3}P^3(1-P)^{n-3}\right.$$

$$\left.+0^2\cdots\ +1^2\binom{n}{1}(1-P)^{n-1}P+2^2\binom{n}{0}\cancel{P}(1-P)^n\right]$$

$$+\frac{(\nu P)^3}{3!}\left[(n-3)^2\binom{n}{n}P^n+\cdots\cdots\right.$$

$$=e^{-\nu P}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\nu P)^m}{m!}\sum_{i=0}^{i=n}(n-m-i)^2\binom{n}{n-i}P^{n-i}(1-P)^i$$

$$\sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{n-i} P^{n-i} (1-P)^{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-P)^{i} P^{n-i} = (1-P+P)^{n} = 1$$

$$(1-P+xP)^{n} = \sum \binom{n}{n-i} (xP)^{n-i} (1-P)^{i}$$

$$\frac{(1-P+xP)^{n}}{x^{m}} = \sum \binom{n}{n-i} x^{n-m-i} P^{n-i} (1-P)^{i}$$

$$x \frac{d}{dx}\left[\qquad\right] = \sum \binom{n}{n-i} (n-m-i)\, x^{n-m-i} P^{n-i} (1-P)^{i}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\left[x \frac{d}{dx}\left[\frac{(1-P+xP)^{n}}{x^{m}}\right]\right]\Bigg|_{x=1}} = \sum \binom{n}{n-i} (n-m-i)^{2} P^{n-i} (1-P)^{i}$$

$$= \frac{d}{dx}\left[x\left[\frac{nP(1-P+xP)^{n-1}}{x^{m}} - \frac{m(1-P+xP)^{n}}{x^{m+1}}\right]\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{nP(1-P+xP)^{n-1}}{x^{m-1}} - \frac{m(1-P+xP)^{n}}{x^{m}}\right]$$

$$= \frac{n(n-1)P^{2}(1-P+xP)^{n-2}}{x^{m-1}} - \frac{n(m-1)P(1-P+xP)^{n-1}}{x^{m}} - \frac{mnP(1-P+xP)^{n-1}}{x^{m}} + \frac{m^{2}(1-P+xP)^{n}}{x^{m+1}} =$$

$$= n(n-1)P^{2} - n(m-1)P - nmP + m^{2} = n(n-1)P^{2} - n(2m-1)P + m^{2}$$

$$\Delta^{2}(m) = e^{-\nu P} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\nu P)^{m}}{m!} \left[n(n-1)P^{2} + nP - 2mnP + m^{2}\right]$$

$$= e^{-\nu P}\left\{\left[n(n-1)P^{2} + nP\right] e^{\nu P} - 2nP \underbrace{\sum \frac{(\nu P)^{m}}{m-1!}}_{\nu P\, e^{\nu P}} + \underbrace{\sum \frac{m(\nu P)^{m}}{m-1!}}_{\left[\nu P + (\nu P)^{2}\right] e^{\nu P}}\right\}$$

$$1+\frac{\nu P}{1!}+\frac{(\nu P)^2}{2!}+\dots \qquad = e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots$$

$$0+\frac{\nu P}{1!}+2\frac{(\nu P)^2}{2!}+3\frac{(\nu P)^3}{3!}\dots = \nu P e^{\nu P} = xe^x = \cancel{0+1\cdot\frac{x}{1!}+2x}$$

$$\cancel{0+\frac{\nu P}{1!}}+$$

$$0+\frac{x}{1!}+2^2\frac{x^2}{2!}+3^2\frac{x^3}{3!} \qquad = x\frac{d}{dx}(xe^x) = e^x(x+x^2)$$

$$\Delta^2_{(n)} = n(n-1)P^2+nP-2nP\,\nu P+\nu P+(\nu P)^2$$

$$= P^2(n^2-n-2n\nu+\nu^2)+(n+\nu)P = \underline{\underline{P^2[(n-\nu)^2-n]+(n+\nu)P}}$$

Ogólny Δ^2:

$$\Delta^2 = \sum_0^\infty \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!}\Delta^2_{(n)}$$

$$= e^{-\nu}\left\{[P^2\nu^2+P\nu]\underbrace{\sum_0^\infty\frac{\nu^n}{n!}}_{e^\nu} + [P-P^2-2P^2\nu]\underbrace{\sum_0^\infty n\frac{\nu^n}{n!}}_{\nu e^\nu} + P^2\underbrace{\sum_0^\infty n^2\frac{\nu^n}{n!}}_{(\nu+\nu^2)e^\nu}\right\}$$

$$= \cancel{P^2\nu^2}+P\nu+P\nu-\cancel{P^2\nu}-\cancel{2P^2\nu^2}+\cancel{P^2\nu}+\cancel{P^2\nu^2} = \underline{\underline{\underline{2P\nu}}} \qquad \boxed{\text{To samo co str. 29}}$$

Dla jakiego n średni kwadrat zmiany jest minimum?

$$\frac{d}{dn}\left[P^2(n^2-n-2n\nu+\nu^2)+(n+\nu)P\right]=0$$

$$P^2(2n-1-2\nu)+P \qquad =0$$

$$n = \frac{P^2(1+2\nu)-P}{2P^2} = \underline{\underline{\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2P}}}$$

w razie ścisłej dyspersji (bo $P=1$) minimum zmienności dla $\underline{n=\nu}$ co przez się zrozumiałe
inaczej ~~dla~~ minimum dla ~~[illegible]~~ mniejszych n

Graniczne wypadki:

Dla powolnej dyfuzji (bierze lim P=0)

$$\overline{\Delta^2}(n) = (n+\nu)P$$

Dla szybkiej dyfuzji (lim P=1)

$$\overline{\Delta^2}(n) = (n-\nu)^2+\nu$$

Jak wybrać wielkość P ?

$$n+\nu \geqq 2(n-\nu)^2 - 2n$$

$$3n+\nu \geqq 2(n-\nu)^2$$

Istnieje maximum ~~maximum~~ ~~minimum~~ $\overline{\Delta^2}_{(n)}$ dla :

$$2P\left((n-\nu)^2-n\right) + n+\nu = 0$$

dla dużych n, ν może to być wartości mniejsza $0<P<1$

$$P = \frac{n+\nu}{2\left[(n-\nu)^2-n\right]} = \cancel{\frac{n+\nu}{2\left[(n+\nu)^2-4n\nu-n\right]}}$$

wartość w owym punkcie:

$$\overline{\Delta^2}_{(n)}\max = \frac{n+\nu}{2\left[(n-\nu)^2-n\right]}\left\{n+\nu+\frac{n+\nu}{2}\right\} = \frac{3(n+\nu)^2}{4\left[(n-\nu)^2-n\right]}$$

---

zadání (2):

$$\overline{P}(+K) = \cancel{\left[e^{-\nu P}\right]^2}$$

$$= e^{-\nu P} e^{-\nu} \left[\frac{(\nu P)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu^n}{n!} \binom{n}{0} (1-P)^n + \frac{P(\nu P)^{k+1}}{k+1!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu^n}{n!} \binom{n}{1} (1-P)^{n-1} + \right.$$

$$\left. + \cdot \frac{P^2 (\nu P)^{k+2}}{k+2!} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\nu^n}{n!} \binom{n}{2} (1-P)^{n-2} \quad \ldots\ldots \right]$$

$$\sum_{n=i} \frac{\nu^n}{n!} \binom{n}{i} (1-P)^{n-i} = \sum_{n=i}^{\infty} \frac{\nu^n}{n!} \cdot \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} (1-P)^{n-i}$$

$$= \frac{1}{i!} \sum_{n=i}^{\infty} \frac{\nu^n}{n-i!} (1-P)^{n-i} = \frac{\nu^i}{i!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu^n}{n!} (1-P)^n$$

$$= \frac{\nu^i}{i!} e^{\nu(1-P)}$$

$$\overline{P}(+K) = e^{-\nu(1+P)} e^{\nu(1-P)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^n (\nu P)^{k+n}}{(k+n)!} \cdot \frac{\nu^n}{n!} \right.$$

$$= e^{-2\nu P} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu P)^{k+n}}{(k+n)!} \frac{(\nu P)^n}{n!}$$

$$\frac{(\nu P)^k}{k!} + \frac{(\nu P)^{k+2}}{k+1!} + \frac{(\nu P)^{k+4}}{2!\,k+2!} + \frac{(\nu P)^{k+6}}{3!\,k+3!} + \cdots$$

$$= \frac{(\nu P)^k}{k!} \left[1 + \frac{(\nu P)^2}{1!(k+1)} + \frac{(\nu P)^4}{2!\,(k+1)(k+2)} + \cdots \right.$$

$$\bar{P}(-k) = e^{-\nu} e^{-\nu P} \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} \frac{\nu^n}{n!} \sum_{m=k}^{m=n} \binom{n}{m} (1-P)^{n-m} P^m \frac{(\nu P)^{m-k}}{(m-k)!}}_{S}$$

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

$$S = \frac{\nu^k}{k!} \binom{k}{k} P^k \cancel{(1-P)^0}$$

$$+ \frac{\nu^{k+1}}{k+1!} \left[\binom{k+1}{k} P^k (1-P)^1 + \binom{k+1}{k+1} P^{k+1} \frac{\nu P}{1!} \cancel{(1-P)^0} \right]$$

$$+ \frac{\nu^{k+2}}{k+2!} \left[\binom{k+2}{k} P^k (1-P)^2 + \binom{k+2}{k+1} P^{k+1} \frac{\nu P (1-P)}{1!} + \binom{k+2}{k+2} P^{k+2} \frac{(\nu P)^2}{2!} \right]$$

$$+ \frac{\nu^{k+3}}{k+3!} \left[\binom{k+3}{k} P^k (1-P)^3 + \binom{k+3}{k+1} P^{k+1} \frac{\nu P (1-P)^2}{1!} + \binom{k+3}{k+2} P^{k+2} \frac{(\nu P)^2 (1-P)}{2!} + \binom{k+3}{k+3} P^{k+3} \frac{(\nu P)^3}{3!} \right]$$

$$S = P^k \left[\frac{\nu^k}{k!} + \frac{\nu^{k+1}}{k!} (1-P) + \frac{\nu^{k+2}}{k!} \frac{(1-P)^2}{2!} + \frac{\nu^{k+3}}{k!} \frac{(1-P)^3}{3!} + \cdots \right]$$

$$+ \nu P \frac{P^{k+1}}{1!} \left[\frac{\nu^{k+1}}{k+1!} + \frac{\nu^{k+2}}{k+1!} \frac{1-P}{1!} + \frac{\nu^{k+3}}{k+1!} \frac{(1-P)^2}{2!} + \frac{\nu^{k+4}}{k+1!} \frac{(1-P)^3}{3!} + \cdots \right]$$

$$+ \frac{(\nu P)^2 P^{k+2}}{2!} \left[\frac{\nu^{k+2}}{k+2!} + \frac{\nu^{k+3}}{k+2!} \frac{1-P}{1!} + \cdots \right]$$

$$= \frac{P^k \nu^k}{k!} \left[1 + \frac{\nu (1-P)}{1!} + \frac{\nu^2 (1-P)^2}{2!} + \cdots \right]$$

$$+ \frac{P^{k+1} \nu^{k+1} (\nu P)}{1!\; k+1!} \left[1 + \frac{\nu (1-P)}{1!} + \frac{\nu^2 (1-P)^2}{2!} \cdots \right]$$

$$+ \frac{P^{k+2} \nu^{k+2} (\nu P)^2}{2!\; k+2!} \left[1 + \cdots \right]$$

$$\bar{P}(-k) = \underbrace{e^{-\nu(1+P)}\, e^{\nu(1-P)}}_{e^{-2\nu P}} \left[\frac{(\nu P)^k}{k!} + \frac{(\nu P)^{k+2}}{1!\, k+1!} + \frac{(\nu P)^{k+4}}{2!\, k+2!} + \cdots \right] = \bar{P}(+k)$$

więc ten sam wzór ważny dla ~~[illegible]~~ przybytku i ubytku $\pm k$; są te przypadki równie prawdopodobne

Zatem jeśli chodzi o średni kwadrat różnicy:

$$\bar{\Delta^2} = e^{-2\nu P} \sum_{k=\cancel{0}}^{\infty}{}' k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu P)^{k+n}}{(k+n)!} \frac{(\nu P)^n}{n!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}{}' \cancel{\left(\frac{x^{k+n}}{k+n!} \cdot \frac{x^n}{n!} \right) = e^x \cdot e^x}$$

$$k=0 \qquad e^a . e^{ax} =$$

$$1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \frac{a^4}{4!} + \frac{a^5}{5!} + \cdots$$

$$k=1 \qquad \frac{ax}{1!} + \frac{a.ax}{1!\,1!} + \frac{a^2 ax}{2!\,1!} + \frac{a^3 ax}{3!\,1!} + \frac{a^4 . ax}{4!\,1!} + \frac{a^5 . ax}{5!\,1!}$$

$$k=2 \qquad \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{a}{1!}\frac{(ax)^2}{2!} + \frac{a^2}{2!}\frac{(ax)^2}{2!} + \frac{a^3}{3!}\frac{(ax)^2}{2!} + \frac{a^4 (ax)^2}{4!\,2!} + \frac{a^5 . (ax)^2}{5!\,2!}$$

$$\frac{(ax)^3}{3!} + \frac{a}{1!}\frac{(ax)^3}{3!} + \frac{a^2}{2!}\frac{(ax)^3}{3!} + \frac{a^3}{3!}\frac{(ax)^3}{3!} + \frac{a^4}{4!}\frac{(ax)^3}{3!} + \frac{a^5}{5!}\frac{(ax)^3}{3!}$$

$$\cancel{e^{\nu P} . e^{\nu P x} = \left[1 + \frac{\nu P}{1!} + \frac{(\nu P)^2}{2!} + \cdots \right]} \left[1 + \cancel{\frac{\nu P x}{1!} + \frac{(\nu P x)^2}{2!}} + \cdots \right]$$

$$= \sum_0^{\infty} \frac{(\nu P)^k}{k!} \left[0 . \frac{(\nu P)^k}{k!} + 1 . \frac{(\nu P)^{k+1}}{k+1!} + 2^2 \frac{(\nu P)^{k+2}}{k+2!} + \cdots \right]$$

$$\left[\frac{(\nu P)^0}{0!} k^2 + \cdots + 1 . \frac{(\nu P)^{k-1}}{k-1!} + \right.$$

$$= \cancel{\Sigma}$$

$$k^2 \frac{\alpha^0}{0!} + (k-1)^2 \frac{\alpha}{1!} + (k-2)^2 \frac{\alpha^2}{2!} + \cdots 2^2 \frac{\alpha^{k-2}}{k-2!} + 1 . \frac{\alpha^{k-1}}{k-1} + 0 . \frac{\alpha^k}{k!} + 1 . \frac{\alpha^{k+1}}{k+1!} + \cdots$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x\alpha}}{x^k} \right) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x^k} + \frac{\alpha}{1!\, x^{k-1}} + \frac{\alpha^2}{2!\, x^{k-2}} + \frac{\alpha^3}{3!\, x^{k-3}} + \cdots \frac{\alpha^{k-1}}{x(k-1)!} + \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{x\alpha^{k+1}}{k+1!} + \frac{x^2 \alpha^{k+2}}{k+2!} \right]$$

$$= -\frac{k}{x^{k+1}} - \frac{(k-1)\alpha}{1!\, x^k} - \cdots \qquad - \frac{\alpha^{k-1}}{x^2 (k-1)!} + 0 + \frac{\alpha^{k+1}}{k+1!} + \frac{2x\alpha^{k+2}}{k+2!}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\underbrace{x \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{\alpha x}}{x^k} \right)} \right]_{x=1} = k^2 + (k-1)^2 \frac{\alpha}{1!} + \frac{(k-2)^2 \alpha^2}{2!} + \cdots \qquad + 1^2 \frac{\alpha^{k-1}}{k-1!} + 0 + 1 . \frac{\alpha^{k+1}}{k+1!} + 2^2 \frac{\alpha^{k+2}}{k+2!} + \cdots$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha e^{\alpha x}}{x^{k-1}} - \frac{k e^{\alpha x}}{x^k} \right) = \frac{\alpha^2 e^{\alpha x}}{x^{k-1}} - \frac{\alpha(k-1) e^{\alpha x}}{x^k} - \frac{k\alpha e^{\alpha x}}{x^k} + \frac{k^2 e^{\alpha x}}{x^{k+1}} = e^{\alpha} \left[\alpha^2 - 2\alpha k + \alpha + k^2 \right]$$

$$\overline{\Delta^2} = e^{-\nu P}\left\{\left[(\nu P)^2+\nu P\right]\underbrace{\sum\frac{(\nu P)^k}{k!}}_{e^{\nu P}} - 2(\nu P)\underbrace{\sum\frac{(\nu P)^k}{k!}\cdot k}_{\nu P\, e^{\nu P}} + \underbrace{\sum\frac{(\nu P)^k}{k!}k^2}_{\left[\nu P+(\nu P)^2\right]e^{\nu P}}\right\}$$

$$\overline{\Delta^2} = 2\nu P$$

To samo co str. 43

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\left[\int_0^x e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}d\xi + \int_0^{h-x} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}d\xi\right]$$

$$\frac{x-\xi}{2\sqrt{Dt}} = z$$

$$d\xi = dz\,.\,2\sqrt{Dt}$$

$$\frac{1}{h}\int_0^h u\,dx = \frac{1}{2h\sqrt{\pi Dt}}\int = \frac{-1}{h\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}}^{0} e^{-z^2}dz + \int_{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}}$$

(str. 20)

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\left[\int_0^x e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}d\xi + \int_x^h e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}d\xi\right]$$

$$\frac{x-\xi}{2\sqrt{Dt}} = z \qquad \frac{\xi-x}{2\sqrt{Dt}} = z$$

$$d\xi = -dz\,.\,2\sqrt{Dt} \qquad d\xi = dz\,2\sqrt{Dt}$$

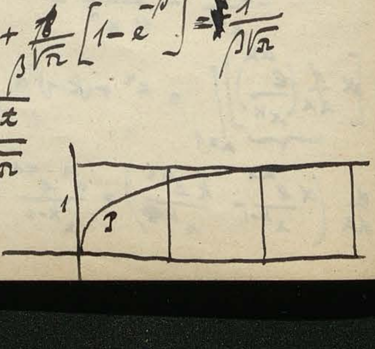
$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-z^2}dz + \int_0^{\frac{h-x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-z^2}dz\right]$$

dla krótkich t (dużych β)

$$\lim_{t=0} P_t = \frac{e^{-\beta^2}}{\beta\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}}\left[1-e^{-\beta^2}\right] = \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{2\sqrt{Dt}}{h\sqrt{\pi}}$$

$$\lim_{t=0}\frac{dP}{dt} = \infty$$



$$\frac{1}{h}\int_0^h u\,dx \equiv \frac{1}{h\sqrt{\pi}}\left[\int_0^h dx\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-y^2}dy + \int_0^h dx\int_0^{\frac{h-x}{4\sqrt{Dt}}} e^{-y^2}dy\right]$$

$$2\left\{x\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-y^2}dy\Big|_0^h - \int_0^h \frac{x\,e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\,dx}{2\sqrt{Dt}}\right\} + \cancel{x\int_0^{\frac{h-x}{2\sqrt{Dt}}}\Big|_0^h + \int_0^h x\,e^{-\frac{(h-x)^2}{4Dt}}\frac{dx}{2\sqrt{Dt}}}$$

$h-x$

$$= \frac{2}{h\sqrt{\pi}}\left\{h\int_0^{\frac{h}{2\sqrt{Dt}}} e^{-y^2}dy + \cancel{\frac{2}{2\sqrt{Dt}}}\sqrt{Dt}\,e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\Big|_0^h +\right.$$

$$\alpha = 1 \bullet \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^{\frac{h}{4Dt}} e^{-y^2}dy + \frac{\sqrt{Dt}}{h}\left[e^{-\frac{h^2}{4Dt}} - 1\right]\right\}$$

podczas gdy str. (8) mieliśmy

$$P_t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\frac{h}{2Dt}} e^{-y^2}dy + \frac{\sqrt{Dt}}{h}\left[1 - e^{-\frac{h^2}{4Dt}}\right]\right\}$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^{\frac{h}{\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{Dt}}{h}\left[1 - e^{-\frac{h^2}{4Dt}}\right]\right\}$$

więc identyczny rezultat
ze (str. 8) i str. (21)

$$\underbrace{\alpha_t = P_t = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{h}{2\sqrt{Dt}}} e^{-y^2}dy + \frac{2\sqrt{Dt}}{h\sqrt{\pi}}\left[1 - e^{-\frac{h^2}{4Dt}}\right]}$$

Oznaczając dla skrócenia $\frac{h}{2\sqrt{Dt}} = \beta$

$$\alpha_t = P_t = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\beta} e^{-y^2}dy + \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}}\left[1 - e^{-\beta^2}\right]$$

Trzeba wykreślić tablicę $P_t = f_n(\beta)$
i z niej odwrotnie wyznaczać β jako funkcję P; stąd mamy D !!

dla małych β (dużych t):

$$\mp 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\beta - \frac{\beta^3}{3!}\right) + \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}}\left(\beta^2 - \frac{\beta^4}{2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\beta - \frac{\beta^3}{6}\right]$$

$$P(+k) = e^{-2\nu P} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu P)^{k+n}}{k+n!} \frac{(\nu P)^{n}}{n!}$$

~~Jakie będzie to prawdop. jeśli ν wielka liczba, $\frac{k}{\nu}$ mało~~

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^{n} \sqrt{2n\pi}$$

νP dla skrócenia = β

$$k+n! = \left(\frac{k+n}{e}\right)^{k+n} \sqrt{2(k+n)\pi}$$

$$\lim k+n! = \left(\frac{n}{e}\right)^{k+n} e^{k} \sqrt{2n\pi}$$

$$\lim P(+k) = [illegible]\ e^{-2\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\beta}{k+n}\right)^{k+n} \left(\frac{\beta}{n}\right)^{n} e^{k+2n} \frac{1}{2\pi\sqrt{n(k+n)}}$$

$$\frac{k}{n} = \varepsilon$$

$$(k+n)^{k+n} = \left[n(1+\varepsilon)\right]^{n+n\varepsilon}$$

$$= n^{n}\, [illegible]\, n^{k} \underbrace{(1+\varepsilon)^{n(1+\varepsilon)}}$$

$$\lim (1+\varepsilon)^{n} = e^{k}$$

$$\lim P(+k) = \frac{e^{-2\beta}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{k+2n}\, e^{k+2n}}{n^{k+2n}\, e^{k}} \frac{1}{n}$$

$$= [illegible]\ e^{-2\beta}\ [illegible]\ \beta^{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[e\beta]}{n^{2n+1}}$$

Jakie prawdop., żeby w czasie t liczba cząstek wzrosła przeciętnie

$n = \nu(1+\delta)$ przeszło na

$n' = \nu(1+\delta') = n+k$?

$$\delta = \frac{n-\nu}{\nu}$$

$$\delta' = \frac{n+k-\nu}{\nu}$$

Chodzi o wzór str. 40 :

$$P(+k) = e^{-\nu P} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (1-P)^{n-m} P^{m} \frac{(\nu P)^{k+m}}{k+m!}$$

Jeśli n wielka liczba, (k dużo jednak) $\frac{k}{n}$ mało, P dostatecznie mało

$$= e^{-\nu P} (\nu P)^{k} (1-P)^{n} \left[\frac{1}{k!} + \frac{n}{k+1!} \frac{\nu P^{2}}{1-P} + \frac{n(n-1)}{k+2!\,.\,2!} \left(\frac{\nu P^{2}}{1-P}\right)^{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{k+3!\ \ 3!} \left(\frac{\nu P^{2}}{1-P}\right)^{3} + \cdots \right.$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{k+m!\quad m!}\left(\frac{\nu P}{1-P}\right)^{m} = \binom{n}{m}\left(\frac{e}{m}\right)^{k+m}\frac{e^{-k}}{\sqrt{2m\pi}}$$

$$= \binom{n}{m}\frac{e^{m}}{m^{k+m}}\frac{1}{\sqrt{2m\pi}}$$

może lepiej tak:

$$\cancel{k+m\,!} = \cancel{[\nu + (k+m-\nu)]!} = \cancel{\left(\frac{\nu}{e}\right)^{k+m}} \cancel{e^{m}} = \left(\frac{\nu}{e}\right)^{k+m} e^{k+m-\nu}\sqrt{2\nu\pi}$$

$$= \frac{\nu^{k+m}}{} e^{-\nu}\sqrt{2\nu\pi}$$

$$\underline{n = \nu(1+\delta)}$$

$$n+k-\nu = \nu\delta'$$

$$k = \nu(1+\delta') - \nu(1+\delta)$$

$$\underline{k = \nu(\delta'-\delta)}$$

$$\binom{n}{m}\frac{1}{k+m!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^{m} = \binom{n}{m}\frac{1}{\nu^{k+m}}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^{m}\frac{e^{\nu}}{\sqrt{2\nu\pi}}$$

$$= \binom{n}{m}\left(\frac{P^2}{1-P}\right)^{m}\frac{e^{\nu}}{\nu^{k}\sqrt{2\nu\pi}}$$

$$P(+k) = e^{-\nu P}\,\cancel{}\,(\nu P)^{k}(1-P)^{n}\frac{e^{\nu}}{\nu^{k}\sqrt{2\nu\pi}}\Big[\qquad \cancel{m}\quad \frac{m}{k} = \varepsilon$$

$$(k+m)! = \cancel{[\nu+(k+m-\nu)]!} \cancel{= \nu}\,[k(1+\tfrac{m}{k})]! = \left[\frac{k(1+\varepsilon)}{e}\right]^{k(1+\varepsilon)}\sqrt{2k\pi(1+\varepsilon)}$$

$$\binom{n}{m}\frac{1}{k+m!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^{m} = \binom{n}{m}\left(\frac{e}{k}\right)^{k}\left[\frac{\nu P^2}{e(1-P)}\right]^{m}\frac{1}{\sqrt{2k\pi}}\quad \cancel{= \left(\frac{k}{e}\right)^{k} e^{m}\sqrt{2k\pi}}\ \ldots\ \ldots$$

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x^{m} = (1+x)^{n} \text{ dla } x \text{ małego} = e^{nx}$$

$$P(+k) = e^{-\nu P}(\nu P)^{k}\,\cancel{}\,e^{-nP}\left(\frac{e}{k}\right)^{k}\frac{1}{\sqrt{2k\pi}}\,e^{\frac{n\nu P^2}{e(1-P)}}$$

Dalszy ciąg str. 43

Analogia z wzorem (13) mojej pracy str. 425 „Einige Beispiele Br. Mol. B. unter Einfluss äuss. Kräfte"

$$\overline{(x-x_0)^2} = \overline{x^2} + x_0^2 - 2x_0\bar{x}$$

$$= \frac{D}{\beta}\left[1-e^{-2\beta t}\right] + \underbrace{x_0^2 e^{-2\beta t} + x_0^2 - 2x_0^2 e^{-\beta t}}_{x_0^2\left[1-e^{-\beta t}\right]^2}$$

$$= \underset{=\xi^2}{\frac{D}{\beta}}\left[1-e^{-2\beta t}\right] + x_0^2\left[1-e^{-\beta t}\right]^2$$

dla krótkich $t =$

$$= 2\xi^2\beta t + x_0^2(\beta t)^2$$

Średnie oddalenie $= \nu = \overline{(\nu\delta)^2}$ odpowiada tutaj ξ^2

Mamy tam przybliżenie w razie wielkich ν

$$\overline{\Delta_{(n)}^2} = 2\nu P + P^2\underbrace{(n-\nu)^2}_{x_0}$$

$$= 2\xi^2 P + P^2 x_0^2$$

Średnie oddalenie od wartości przeciętnej:

$$n-\nu = n-n_0+n_0-\nu$$

$$\overline{(n-\nu)^2} = \overline{\Delta_n^2} + 2(n_0-\nu)\overline{\Delta_n} + (n_0-\nu)^2 =$$

$$= P^2\left[(n-\nu)^2 - n\right] + (n+\nu)P - 2(n-\nu)^2 P + (n-\nu)^2 =$$

$$= (n-\nu)^2(P-1)^2 + (n+\nu)P - nP^2$$

zgadza się, o ile $P \doteq \beta t$

tymczasem mamy (str. 48) $\lim P \doteq \frac{2\sqrt{Dt}}{h\sqrt{\pi}}$

Dokładniej:

po upływie bardzo długiego czasu:

$$\overline{(x-x_0)^2} = \frac{D}{\beta} + x_0^2 \qquad \Big\| \quad \overline{\Delta_{(n)}^2} = (n-\nu)^2 + \nu$$

istotnie $n-\nu$ odpowiada x_0

" ν " $\xi^2 = \frac{D}{\beta}$

Analogia nie może jednak w żadnym razie być zupełna, gdyż w pierwszym wzorze występują tylko funkcye exponencyalne czasu, a w wzorze str. 43 występuje P, a zatem całki Laplace'a.

Do str. 40

Inne proste zadanie:

Jaki jest *przeciętny* przybytek lub ubytek dla danej liczby początkowej n?

Rachunek byłby zupełnie analogiczny tylko:

$$\overline{\Delta(1)} = e^{-\nu P} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\nu P)^m}{m!} \underbrace{\sum_{i=0}^{i=n} -(n-m-i)\binom{n}{n-i} P^{n-i} (1-P)^i}_{= x \frac{d}{dx}\left[\frac{(1-P+xP)^n}{x^m}\right]\Big|_{x=1}}$$ (str. 42)

$$= -nP + m$$

$$= -e^{-\nu P}\left[nP\, e^{\nu P} - \nu P e^{\nu P}\right] = ~~[illegible]~~ (\nu - n) P$$

Więc przeciętny przybytek (w razie $\nu > n$): $\overline{\Delta n} = (\nu - n) P$

ubytek (. . . . . . $n > \nu$) $\overline{\Delta n} = (n - \nu) P$ ~~w razie stanu początkowego abnormalnego ($n > \nu$)~~

zatem przeciętna liczba $\overline{N}$ zmienia się w sposób:

$$\overline{N} = n + (\nu - n)\underset{\downarrow}{P_{(t)}} = \nu + (n - \nu)(1 - P_{(t)})$$

funkcja rosnąca z czasem według wzoru str. 49

lub też: odchylenie od normalnej liczby ν zmienia się według wzoru

$$\overline{N} = (n - \nu)(1 - P_t)$$

to odpowiada wzorowi (11) p. 425: $\overline{x} = x_0 e^{-\beta t}$

$$\overline{x - x_0} = x_0 (1 - e^{-\beta t})$$

$$\int e^{-z^2\alpha}dz = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int z^2 e^{-z^2\alpha}dz = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

$$\alpha = \frac{1}{2\xi^2}$$

$$n = \nu + N_0$$

$$n \pm k = \nu + N_k$$

$$k = N_k - (n-\nu)$$

$$\overline{k^2} = \overline{\Delta_n^2} = \overline{N_k^2} - 2(n-\nu)\underset{\substack{\downarrow\\(n-\nu)(1-P)}}{\overline{N_k}} + (n-\nu)^2 = P^2[(n-\nu)^2 - n] + (n+\nu)P$$

$$\overline{N_k^2} = P^2[(n-\nu)^2 - n] + (n+\nu)P - (n-\nu)^2 + 2(n-\nu)^2(1-P)$$

$$= \cancel{P^2[(n-\nu)^2-n]} = (n-\nu)^2[P^2 - 1 + 2(1-P)] + (n+\nu)P - nP^2$$

$$= (n-\nu)^2[P^2 - 2P + 1] + (n+\nu)P - nP^2$$

$$= (n-\nu)^2[1-P]^2 + \underbrace{nP(1-P) + \nu P}_{\text{nie zgadza się, bo } \xi^2 = \nu}$$

Porównać z (13)

$$\overline{x^2} = x_0^2 e^{-2\beta t} + \xi^2(1 - e^{-2\beta t})$$

więc analogia jest bardzo niezupełna. Analogia tylko dla tak dużych n, ν że wytęgamy kwadratowe człon

---

Także w tym sensie, że przyjmując Ob. prawdop. $W(\xi)$ posiada punkt osobliwy dla $t=0$, podczas gdy

$\lim_{t=0} P(\pm k) = 0$ Jednak $\lim_{t=0}\frac{dP}{dt} = \infty$! patrz następne strony!

Z wzorów na $\overline{N}$ i $\overline{N^2}$ ~~wynika że w razie bardzo dużych n, ν~~

~~odchylenia procentowe w razie wielkich ν (i stanu początk. nieco anormalnego) zmieniają się~~

Obliczmy $\overline{\overline{(x-x_0)^2}}$ z jakiegokolwiek początk.

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\xi}e^{-\frac{x_0^2}{2\xi^2}}dx_0\,\overline{\Delta^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\xi}\left\{(1-e^{-\beta t})^2\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}x_0^2 e^{-\frac{x_0^2}{2\xi^2}}dx_0}_{\sqrt{2\pi}\,\xi^3} + \xi^2(1-e^{-2\beta t})\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x_0^2}{2\xi^2}}dx_0}_{\sqrt{2\pi}\,\xi}\right\}$$

$$\overline{\overline{(x-x_0)^2}} = \xi^2\left[(1-e^{-\beta t})^2 + 1 - e^{-2\beta t}\right] = 2\xi^2\left[1 - e^{-\beta t}\right]$$

Kiedy stan uważa się anormalny? Jeśli wtedy $\lim_{t=\infty} \overline{N_k^2} = \nu$ będzie tymczasem co wtedy

~~W razie dużych~~ ν . $(n-\nu)^2 = \lim_{t=0} \overline{N_k^2}$ /...

$(n-\nu)^2$ ..... ν

$(n+\nu)(n-\nu)$ ..... ν

więc ~~jeśli~~ w razie dużych ν wystarczy aby $n = \nu \pm 1$ i już będzie to stan anormalny

więc w praktyce w razie dużych ν zawsze mamy do czynienia ze stanami anormalnymi, tak że tylko wyrazy kwadratowe wchodzą w rachubę w pierwszym stadyum, (a wyrazy liniowe w końcowem)

Zatem w razie dużych ν odbywa się zanikanie przybliżenie (tem dokładniej, im większa różnica początkowa $(n-\nu)$) w sposób:

$$N = (n-\nu)\left[1-P\right]$$

to znaczy:

$$\delta = \delta_{t=0}(1-P)$$

$$\frac{d\delta}{\cancel{dt}} = -\delta_0 \frac{dP_t}{dt}\,dt$$

Jeśli wprowadzimy pojęcie „czasu powrotu" T, można wyrazić z tego prawdop. pewnego odchylenia:

$$W(\delta)\,d\delta = \sqrt{\frac{2}{\nu\pi}}\, e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}}\,d\delta = \frac{|dt|}{T} = \frac{d\delta}{\delta_0 \frac{dP}{dt} . T}$$

$$T = \sqrt{\frac{\nu\pi}{2}}\, \frac{e^{\frac{\nu\delta^2}{2}}}{\delta \frac{dP}{dt}} \qquad = -\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\beta^2}\left[1-e^{-\beta^2}\right]$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{d\beta}\frac{d\beta}{dt} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\beta^2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\beta^2}\left[1-e^{-\beta^2}\right] + \frac{2e^{-\beta^2}}{\sqrt{\pi}} = \cancel{-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{h}{\beta^3} + e^{-\beta^2}\left[2-\frac{2}{\beta}-\frac{2}{\beta^2}\right]\right\}}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{h}{4\sqrt{Dt^3}} \qquad \lim_{t=0}\frac{dP}{dt} = \lim \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{h}{4\sqrt{Dt^3}}\left\{\frac{2Dt}{h^2} + \cancel{e^{-\frac{h^2}{4Dt}}\left[2-\ldots\right]}\right\} = \infty!$$

więc byłoby $T=0$, co w związku z tem że $\lim_{t=0}\frac{dN}{dt} = \infty$

Niezgodności te pochodzą oczywiście prawdopodobnie z niezgodności wzorów Ruarka dla $t=0$

W rzeczywistości jednak 1). wzór dla r. R nie jest ważny dla lim (przedziałów skończonej długości)

2). wzór dla N nie musi być ważny dla lim $t=0$

bo N może się zmieniać tylko o liczby całkowite, z których najmniejsza $=1$

a $P(+k)$ nie ma punktu osobliwego dla $t=0$; jest $\lim\limits_{t=0} P(+k) = 0$

znowu jednak będzie $\lim\limits_{t=0} \left.\frac{dP(+k)}{dt}\right| = \infty$

dla $k=1$ podczas gdy dla ~~[illegible]~~ $k>1$ $\lim \frac{dP(+k)}{dt} = 0$

czy to nie jest absurd?

W razie danego n porównać prawdop. ~~[illegible]~~ przybytku z prawdop. ubytku liczby n

Prawdop. przybytku będzie na mocy str. 40 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(+k)$

$$P(+) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\nu P} \sum_{m=0}^{m=n} \binom{n}{m} (1-P)^{n-m} P^m \frac{(\nu P)^{k+m}}{(k+m)!}$$

$$P(-) = \sum_{k=1}^{n} e^{-\nu P} \sum_{m=k}^{m=n} \binom{n}{m} (1-P)^{n-m} P^m \frac{(\nu P)^{m-k}}{(m-k)!}$$

$$P(+) = e^{-\nu P} \sum_{m=0}^{m=n} \binom{n}{m} P^m (1-P)^{n-m} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\nu P)^{k+m}}{(k+m)!}}_{e^{\nu P} - \underbrace{\sum_{i=0}^{i=m} \frac{(\nu P)^i}{i!}}_{= \sum_{k=0}^{k=m} \frac{(\nu P)^{m-k}}{m-k!}}} \Bigg\} = 1 - e^{-\nu P} \sum \binom{n}{m} P^m (1-P)^{n-m} \sum (\nu P)^{m-k}$$

(str. 40)

$$P(-) = e^{-\nu P}\Big\{ P^n + \Big[\binom{n}{n-1} P^{n-1}(1-P)\Big] * \; + \Big[\binom{n}{n-2} P^{n-2}(1-P)^2 + \binom{n}{n-1} P^{n-1}(1-P)\frac{\nu P}{1!} + \binom{n}{n} P^n \frac{(\nu P)^2}{2!}\Big]$$

$$+ \binom{n}{n} P^n \frac{\nu P}{1!}\Big]$$

$$+\Big[\binom{n}{n-3} P^{n-3}(1-P)^3 + \binom{n}{n-2} P^{n-2}(1-P)^2 \frac{\nu P}{1!} + \binom{n}{n-1} P^{n-1}(1-P)\frac{(\nu P)^2}{2!} + \binom{n}{n} P^n \frac{(\nu P)^3}{3!}\Big]$$

$$+ \dots$$

$$+\Big[\binom{n}{1} P (1-P)^{n-1} + \binom{n}{2} P^2 (\nu P) \frac{(1-P)^{n-2}}{1!} + \binom{n}{3} P^3 (\nu P)^2 \frac{(1-P)^{n-3}}{2!} + \dots - \binom{n}{n} P^n \frac{(\nu P)^{n-1}}{(n-1)!}\Big]\Big\}$$

$$= e^{-\nu P}\Big\{\Big[P^n + \binom{n}{n-1} P^{n-1}(1-P) + \binom{n}{n-2} P^{n-2}(1-P)^2 + \dots \binom{n}{1} P (1-P)^{n-1}\Big] +$$

$$+ \frac{\nu P}{1!}\Big[\binom{n}{n} P^n + \binom{n}{n-1} P^{n-1}(1-P) + \binom{n}{n-2} P^{n-2}(1-P)^2 + - \binom{n}{2} P^2 (1-P)^{n-2}\Big] +$$

$$+ \frac{(\nu P)^2}{2!}\Big[\binom{n}{n} P^n + \binom{n}{n-1} P^{n-1}(1-P) + \dots \quad \binom{n}{3} P^3 (1-P)^{n-3}\Big] +$$

$$\dots \quad \dots$$

$$+ \frac{(\nu P)^{n-1}}{(n-1)!}\binom{n}{n} P^n$$

$$P(+) = 1 - e^{-\nu P}\Big\{\binom{n}{0}(1-P)^n$$

$$+ \binom{n}{1} P (1-P)^{n-1}\Big[\frac{\nu P}{1!} + 1\Big]$$

$$+ \binom{n}{2} P^2 (1-P)^{n-2}\Big[\frac{(\nu P)^2}{2!} + \frac{\nu P}{1!} + 1\Big]$$

$$+ \dots$$

$$+ \binom{n}{n} P^n \Big[\frac{(\nu P)^n}{n!} + \frac{(\nu P)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{\nu P}{1!} + 1\Big]\Big\}$$

$$P(0) = e^{-\nu P}\Big\{\binom{n}{0}(1-P)^n + \binom{n}{1}(1-P)^{n-1}\frac{\nu P^2}{1!} + \binom{n}{2}(1-P)^{n-2}\frac{(\nu P^2)^2}{2!} + \dots \binom{n}{n}\frac{(\nu P^2)^n}{n!}\Big\}$$

$$\lim_{P=0} P(-) = 0$$

$$\lim_{P=0} P(+) = 0$$

$$\lim P(-) = \lim\Big\{\binom{n}{1} P + \Big[\binom{n}{2} ~~\cancel{-\binom{n-1}{1}}~~\Big] P^2\Big\}$$

$$= \lim P(+1)$$

$$= \lim P(+1)$$

$$\lim P(+) = \lim\Big\{\nu P \dots$$

więc byłaby istotnie różnica między $P(-)$ $P(+)$ już dla najmniejszych t, ponieważ

$$\lim_{t=0} \frac{dP}{dt} = \infty$$

$$\lim P(0) = (1-\nu P)(1-nP)$$

$$= 1-(n+\nu)P$$

Cały problem sprowadza się zatem do wzorów dla przybytku lub ubytku jednej cząstki, gdzie dla bardzo krótkich czasów, gdzie lim $P = 0$, będzie

$$\lim P(+1) = \nu P \qquad \lim P(0) = 1-(n+\nu)P$$

$$\lim P(-1) = nP$$

$$\lim P(+2) = \lim e^{-\nu P} \frac{(\nu P)^2}{2} = \frac{(\nu P)^2}{2}$$

$$\lim P(-2) = \binom{n}{2} P^2 = \frac{n(n-1)}{2} P^2$$

Zatem w pierwszej chwili tylko $P(\pm 1)$ wchodzą w rachubę, a prawdop. odpowiednie większych zmian jest znikomo małe. Czy jednak usprawiedliwiona jest różnica $P(+1)$ $P(-1)$, a mianowicie że pierwsze ~~[illegible]~~ nie zależy wcale od n, drugie wcale od ν ?

A to jest w związku z asymetrią wzorów (str. 9, 11) dla przybycia i ubycia

$\left(\lim_{t=0}\right)$ Prawdop. ubycia jednej cząstki $\overset{\lim P(-1)}{}$ = $\left(\lim_{t=0}\right.$ prawdop. ~~[illegible]~~ wyjścia jednej × prawdop. przyjścia żadnej

$\left(\lim_{t=0}\right)$ prawdop. przybycia $\overset{\lim(P+1)}{}$ " " = " ~~przyjścia~~ żadnej × " " jednej

$$\lim P(-1) = \binom{n}{1} P (1-P)^{n-1} \times \frac{(\nu P)^0}{0!} e^{-\nu P}$$

$$\lim P(+1) = \binom{n}{0} P^0 (1-P)^n \times \frac{(\nu P)^1}{1!} e^{-\nu P}$$

Cała kwestia leży zdaje się w tem: czy wzór (± 1) określający prawdop. przybycia ni cząstek przestrzeni wewnętrznej, bez względu na to że wiemy iż w danej przestrzeni już jest n cząstek. ?
(w której [illegible] przychodzi ν)

Zdaje się że to słuszne. Gdyby k było dowolną cząstką, byłoby
$\lim P(+k) = \nu^k P^k$ $\lim P(-k) = n^k P^k$, więc dla lim $k=0$ byłyby identyczne, w pierwszej

$$\lim_{\cancel{\nu=0}} \frac{\nu^k}{k!} \qquad \cancel{e^{-\nu}}$$

$$\lim = \frac{\nu^k}{\left(\frac{k}{e}\right)^k\sqrt{2k\pi}} = \left(\frac{e\nu}{k}\right)^k \frac{1}{\sqrt{2k\pi}}$$ dla dużych k, wtedy $\frac{k}{\nu}$ jest bardzo duże

$$\lim \frac{\nu^n}{n!} = \left(\frac{e\nu}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$$ jest bardzo duże, jeśli n, ν nie bardzo różne

$n+k = \nu(1+\varepsilon)$

$$e^{-\nu}\frac{\nu^{n+k}}{n+k!} = e^{-\nu}\left(\frac{e\nu}{n+k}\right)^{n+k} \frac{1}{\sqrt{2\pi(n+k)}} = e^{n+k-\nu} \left(\frac{\nu}{n+k}\right)^{n+k}$$

$$\cancel{\nu(1+\varepsilon)}\; e^{\nu\varepsilon} (1+\varepsilon)^{-\nu(1+\varepsilon)} = 1$$

$$\lim \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,n-k!} = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cancel{\sqrt{2n\pi}}}{\left(\frac{k}{e}\right)^k \left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}}$$

$$= \frac{n^n}{(n-k)^{n-k}\,k^k} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}}$$

$$= \left(\frac{n-k}{k}\right)^k \left(\frac{n}{n-k}\right)^n \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}}$$

$$= \left(\frac{n}{k}\right)^k \frac{\left(1-\frac{k}{n}\right)^k}{\left(1-\frac{k}{n}\right)^n} = \ldots \qquad = \left(\frac{n}{k}\right)^k e^{-\frac{k^2}{n}+k} \sqrt{\ldots}$$

$$= \left[\frac{n}{k} e^{1-\frac{k}{n}}\right]^k \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \neq \left(\frac{ne}{k}\right)^k \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}$$

chodziłoby by były jednakowe prawdop. ~~[illegible]~~ przybytku jak ubytku, gdzie $\lim_{k=0} \nu^k = \lim_{k=0} n^k$

$$P(+k) = e^{-\nu P}\left[\binom{n}{0}(1-P)^n \frac{(\nu P)^k}{k!} + \binom{n}{1}(1-P)^{n-1} P \frac{(\nu P)^{k+1}}{k+1!} + \ldots\ldots \cancel{\binom{n}{n-1}(1-P)} + \binom{n}{n} P^n \frac{(\nu P)^{k+n}}{k+n!}\right]$$

$$\left(\frac{\nu P}{k}\right)^k \frac{e^{k-\nu P}}{\sqrt{2\pi k}}$$

Dla dłuższego przeciągu czasu, gdy $P =_{approx} = 1$:

$$\lim P(+k) = e^{-\nu}\left[\binom{n}{0}\frac{\nu^k}{k!} + \binom{n}{1}\frac{\nu^{k+1}}{k+1!} + \cdots \binom{n}{n}\frac{\nu^{k+n}}{k+n!}\right]$$

~~[illegible]~~ $= n!\, e^{-\nu}\left[\frac{\nu^k}{n!\,k!} + \frac{\nu^{k+1}}{1!\, n-1!\, k+1!} + \frac{\nu^{k+2}}{2!\, k+2!\, n-2!} + \cdots \frac{\nu^{k+n}}{n!\, k+n!\, 0!}\right]$

$$P(+k) = e^{-\nu P} n!\left[(1-P)^n\frac{(\nu P)^k}{n!\, k!} + (1-P)^{n-1} P \frac{(\nu P)^{k+1}}{1!\, n-1!\, k+1!} + (1-P)^{n-2} P^2 \frac{(\nu P)^{k+2}}{2!\, n-2!\, k+2!} + \cdots P^n \frac{(\nu P)^{k+n}}{n!\, 1!\, k+n!}\right]$$

Stosunek członu ostatniego do pierwszego $= \left(\frac{P}{1-P}\right)^n (\nu P)^n \frac{k!}{k+n!} = \left(\frac{P}{1-P}\right)^n \frac{(\nu P)^n}{(k+1)(k+2)\ldots(k+n)}$

$$= \frac{P^{2n}}{(1-P)^n \frac{1+k}{\nu}\frac{2+k}{\nu}\ldots\frac{n+k}{\nu}}$$

zatem w ogóle jeżeli k niezbyt duże, $n =_{app} \nu$
ν bardzo duże, człon ostatni znikomy w porówn. z pierwszym

Stosunek drugiego do pierwszego : $= \frac{P^2 \nu\, n}{(1-P)(k+1)}$ zatem bardzo wielki, więc musi gdzieś być maximum

stosunek m tego do $m+1$ tego : $\frac{P^2 \nu (n-m)}{m(k+m)}$ zatem taki jest dla $m = \frac{n}{2}$ duże

Z tego otrzyma się „czas powrotu" T całkiem dokładnie i ściśle w następujący sposób:

Jeżeli system wyszedł ze stanu n, jaki czas przeciętnie potrzebny do powrotu w stan n?

Wyraźmy $P(0)$ oznacza prawdop. powrotu (czy pozostania) do stanu $n \overset{P(0)}{=} \frac{\Delta t}{T}$

gdzie $\Delta t = \overset{\text{dana}}{\text{długość}}$ interwału między próbami [a przy ciągłej obserwacji przeciętny czas trwania niezmienionej liczby n, który może się obliczyć do wzoru z ruchów Browna]

$P_n(0)$ = fc. (n, t) ale dla długiego czasu t: $\lim P_n(0)$ = fc. (n) niezależnie od t, gdzie $\lim_{t=\infty} P = 1$

~~z powodu następującej strony!~~

zatem: $T = \frac{\Delta t}{\lim_{t=\infty} P_n(0)}$ } to wszystko, o ile

---

$$P(0) = e^{-\nu P}\left\{\binom{n}{0}(1-P)^n + \binom{n}{1}(1-P)^{n-1}\frac{\nu P^2}{1!} + \binom{n}{2}(1-P)^{n-2}\frac{(\nu P^2)^2}{2!} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{(\nu P^2)^n}{n!}\right\}$$

$$\lim_{t=\infty} P(0) = e^{-\nu}\frac{\nu^n}{n!} = \cancel{\frac{e^{-\nu}\nu^{\nu(1+\delta)}}{\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\nu(1+\delta)}(1+\delta)^{\nu(1+\delta)}\sqrt{2\nu\pi}}}$$

$$\lim \lg \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} = -\nu + n\lg\nu - n\lg n + n \cancel{\lg} - \frac{1}{2}\lg 2\nu\pi$$

$$= \nu\delta + \nu(1+\delta)\lg\nu - \nu(1+\delta)\lg\nu - \nu(1+\delta)\lg(1+\delta) - \cdots$$

$$= \nu\delta - \nu(1+\delta)\left(\delta - \frac{\delta^2}{2}\right) - \cdots = \nu\delta - \nu\delta + \nu\frac{\delta^2}{2} - \nu\delta^2 - \quad = -\frac{\nu\delta^2}{2} - \frac{1}{2}\lg\nu\pi$$

$$\lim_{t=\infty} P(0) = \frac{1}{\sqrt{2\nu\pi}}e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}}$$

przeciętny czas pozostawania liczby n = $\overline{\Delta t} = \int_0^\infty t\,\frac{dP(0)}{dt}\,dt$ ~~byłby ∞ ?!~~ istotnie byłby ∞! jak $\sqrt{t}$

nieprawda! ~~to byłby błędnie~~ będzie za duży!

bo $P(0)$ oznacza prawdop. aby zmiana za czasem t była 0, ale w międzyczasie mogło nastąpić coś innego.

Postępując zatem sposobem Svedberga: licząc cząstki w regularnych interwałach, (Δt)

~~[illegible]~~ można się spodziewać, że te same liczby n ~~[illegible]~~ napotka się co m interwałów,

gdzie $m = \frac{1}{P_n(0)} = \frac{1}{\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}$ (w razie jeśliby ów czas interwałów Δt tak długi, że $\lim P = 1$) że zatem pojedyncze próby [illegible] niezależne

[Jeżeli zaś czas $t = m\Delta t$ nie dosyć długi, ażeby można stawić $\lim P = 1$, w takim razie trzeba użyć pełnego wzoru

$$m = \frac{1}{P_n(0)} = \frac{1}{e^{-\nu}\left[\binom{n}{0}(1-P)^n + \cdots\right]}$$

gdzie $P(t) = P(m\,\Delta t)$?]

zatem średni czas „powrotu“: $T = m\,\Delta t = \Delta t . \frac{n!}{e^{-\nu}\nu^n} \neq \Delta t\sqrt{2\nu\pi} . e^{\frac{\nu\delta^2}{2}}$

Ale to nie jest jeszcze pojęcie to w Poissonowskim znaczeniu.

Chodzi przedewszystkiem o czas $\overline{\Delta t}$, podczas którego przeciętnie jakakolwiek liczba n pozostaje niezmieniona. Jak go obliczyć?

~~[illegible]~~ Może tak:

Dla bardzo krótkich czasów τ mamy prawdop. $\lim P(0) = 1-(n-\nu)\frac{P}{2} = 1-(n-\nu)\frac{2\sqrt{D\tau}}{h\sqrt{\pi}}$

Jeśli zatem po czasie τ jeszcze jest liczba n, prawdop. ażeby

znów po dalszym τ jeszcze taka n,

itd. prawdop. ażeby podczas $t = m\tau$ wciąż trwała liczba n, będzie zatem

$$W(m\tau) = \left[1-(n-\nu)\frac{2\sqrt{D\tau}}{h\sqrt{\pi}}\right]^m = \left[1-(n-\nu)\frac{2\sqrt{D\tau}}{h\sqrt{\pi}}\right]^{\cancel{\frac{t}{\tau}}\ \frac{t}{\tau}}$$

$$\lim_{\tau=\infty} W(n\tau) = e^{-(n-\nu)\frac{2\sqrt{D}\cdot t}{h\sqrt{\pi\tau}}} = 0$$ (niemożliwe!)

Przybliżony sposób oznaczenia $\overline{\Delta t}$

w czasie t przeciętna zmiana wartości $(n-\nu)P$, co dla krótkich t –

$$=_{\text{approx}} (n-\nu)\frac{\sqrt{t D}}{h\sqrt{\pi}}$$

Robiąc $=1$ otrzyma się przeciętny czas t potrzebny do przejścia (lub odpływu) o jednostkę

$$t = \frac{\pi h^2}{D(n-\nu)^2} = \frac{\pi h^2}{D\nu^2\delta^2}$$

wtedy byłby $T = \frac{\pi h^2}{D\nu^2\delta^2}\sqrt{2\nu\pi}\, e^{\frac{\nu\delta^2}{2}} = \frac{\pi h^2\sqrt{2\pi}}{D}\frac{\sqrt{\nu}}{(\nu\delta)^2}\, e^{\frac{(\nu\delta)^2}{2\nu}}$

porówn. z $T = \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta}\frac{\xi}{x_0}\, e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{\xi}\right)^2}$

$x_0 \cdots\cdots \nu\delta$

$\xi^2 \cdots\cdots \nu$

nieszczególna analogia!

To jednak nie może być rezultat ścisły, gdyż dałby $t=\infty$ dla $n=\nu$

Rząd wielkości $\overline{\Delta t}$; Lepszy sposób oznaczenia:

mamy rezultat str. 43:

$$\overline{\Delta_n^2} = P^2[(n-\nu)^2-n] + (n+\nu)P = P(n+\nu)[P(n-\nu)+1] - nP^2$$

Jeżeli $P(n-\nu)=1$
nie wolno pominąć członu $P(n+\nu)$!
wtedy $\Delta_n^2 = 2P(n+\nu)$
$= 4P\nu$

gdy to się stanie $\Delta_n^2 = 1$

określa się stąd pewne P które odpowiada $\overline{\Delta t}$

co dla dużych n, ν:

?

~~$= P^2(n-\nu)^2 = 1$~~ daje ten sam rezultat co przedtem

$$P^2 + \frac{n+\nu}{(n-\nu)^2-n}P = \frac{1}{\ldots}$$

$$P = -\frac{(n+\nu) \pm \sqrt{4[(n-\nu)^2-n] + (n+\nu)^2}}{2[(n-\nu)^2-n]}$$

Jeżeli $n = \nu$

$$\Delta_n^2 = -P^2\nu + 2P\nu = 1 \qquad P^2 - 2P = -\frac{1}{\nu}$$

$$-(P-1)^2\nu = 1-\nu \qquad P = +1 \pm \sqrt{1-\frac{1}{\nu}}$$

$$P = 1 \pm \sqrt{\frac{\nu-1}{\nu}} \qquad = 1-\left(1-\frac{1}{2\nu}\right) = \frac{1}{2\nu}$$

$$\frac{1}{2\nu} = \frac{\sqrt{tD}}{h\sqrt{\pi}} \qquad t = \frac{h^2\pi}{4\nu^2 D}$$

$$T = \frac{h^2\pi\sqrt{2\pi}}{4D}\,\frac{\sqrt{\nu}}{\nu^2}\,e^{\frac{\nu\delta^2}{2}} \quad \Big\| \quad \text{dla } \delta = \text{appr. } 0: \quad \lim T = \underline{\underline{\frac{h^2\pi\sqrt{2\pi\nu}}{4D\nu^2}}} \quad \text{bez względu na } \delta!$$

To nie daje się pogodzić z moim dawniejszym wzorem dla T (Ak. Um. ..), ponieważ tam było założenie że stan początkowy bardzo odległy od normalnego.

Przy obserwacji w jednakowych interwałach Δt otrzymuje się: $T_{\Delta t} = \Delta t \sqrt{2\nu\pi}\, e^{\frac{\nu\delta^2}{2}}$

(ale tylko jeżeli interwały Δt tak długie iż $\lim P_{\Delta t} = 1$)

natomiast przy obserwacji ciągłej: $T = \frac{\pi h^2}{D\nu^2\delta^2}\sqrt{2\nu\pi}\, e^{\frac{\nu\delta^2}{2}}$

Oczywiście ten ostatni czas powinien być krótszy od pierwszego, gdyż przy pierwszym sposobie obserwacji można przeoczyć stany powrotu, wypadające w chwilach pośrednich.

$\lim P_{\Delta t} = 1$ jeżeli $\beta > 1$

$$\frac{h}{2\sqrt{Dt}} > 1 \qquad t = \frac{h^2}{4D} \quad \text{zatem} \quad T_{\Delta t} \geqq \frac{h^2}{4D}\sqrt{2\nu\pi}\, e^{\frac{\nu\delta^2}{2}}$$

$$T = \frac{h^2\pi}{D\nu^2\delta^2}\sqrt{2\nu\pi}\, e^{\frac{\nu\delta^2}{2}}$$

zatem ~~istotnie~~ [illegible] tych wzorów wynika że $T_{\Delta t} > T$, o ile $\frac{\nu^2\delta^2}{\pi} > 4$, zatem już przy bardzo ~~nie~~ wiele anormalnych stanów aż warunek spełniony.

W blizkości stanu normalnego jednak, gdzie przyjąć można $T = \frac{h^2 n\sqrt{2\nu\pi}}{4D\nu^2}$

warunek będzie $\frac{e^{\frac{\nu\delta^2}{2}}}{\nu^2\delta^2} < \frac{n}{4\nu^2}$ $\quad e^{\frac{\nu\delta^2}{2}} < \frac{n}{4}\delta^2$

~~$4n < e^{\frac{\nu\delta^2}{2}}$~~

nie do spełnienia ?

~~$\frac{\nu\delta^2}{2}$~~ ~~[illegible]~~

Powracając do wzoru $T_{\Delta t}$:

Uwaga $m = \frac{T_{\Delta t}}{\Delta t} = \sqrt{2\nu\pi}\, e^{\frac{\nu\delta^2}{2}}$ oznacza średnią liczbę prób, po których przeciętnie powtarza się pewna liczba $\nu(1+\delta)$

to znaczy że będzie to na odwrót też maksymalna liczba, która w ~~[illegible]~~ danej liczbie prób m się przeciętnie powtarza, zatem przybliżenie mamy:

$$e^{\frac{\nu\delta^2}{2}} = \frac{m}{\sqrt{2\nu\pi}}$$

$$\nu\delta^2 = 2\log\left(\frac{m}{\sqrt{2\nu\pi}}\right)$$

Zatem odstępstwo maksymalne ~~[illegible]~~ $\Delta_{max} = \nu\delta = \sqrt{2\nu\log\left(\frac{m}{\sqrt{2\nu\pi}}\right)}$

$$= \sqrt{2\nu}\sqrt{\log m - \log\sqrt{2\nu\pi}}$$

To stosowałoby się jednak tylko do tego jeśli układ jest statycznym.

~~Konst~~ Kwestya o ile się daje przenieść na astatyczny układ.

Nie daje się wcale zastosować, bo liczba prób czas potrzebny do osiągnięcia danego zboczenia (dla astatycznych układów) jest przeciętnie ∞ !! Więc istnieją te odpowiedniości bardzo nieścisłe, między tymi pojęciami.

Dalszy ciąg ze str. (   ) Uproszczenie w razie dużych liczb ν, k :

$$P_{(+k)} = \sum_{m=0}^{n} \left\{ e^{-\nu P} . n! \frac{(1-P)^{n-m} P^{m} (\nu P)^{k+m}}{m! \; n-m! \; k+m!} \right\}$$

Można wolno stawić: $k+m! \neq \left(\frac{k+m}{e}\right)^{k+m} \sqrt{2m\pi}$

$$\neq \left(\frac{n}{e}\right)^{k+m} \sqrt{2n\pi}$$

w takim razie byłoby

$$P(+k) = \frac{e^{-\nu P}}{\sqrt{2n\pi}} \underbrace{\sum \binom{n}{m} (1-P)^{n-m} P^{m} \left(\frac{\nu P e}{n}\right)^{k+m}}_{\left(\frac{\nu P e}{n}\right)^{k} \left[1-P+\frac{\nu P^2 e}{n}\right]^{n}}$$

niemożliwe, bo toby wzrastało z k!!

Ale można także m i n-m uważać za liczby duże bo te wyrazy (początkowe i końcowe), gdzie one nie są duże, wcale mało się przyczyniają.

$$P(+K) = \sum_{m=0}^{n}{}' \frac{e^{-\nu P} n! (1-P)^{m} P^{n-m} (\nu P)^{n+k-m}}{m! \; n-m! \; n+k-m!}$$

Przytem wyrazy z m małem są bezporównanie większe od odpowiednich wyrazów (n-m)

zatem można może z przybliżeniem ograniczyć się do stosunków $\frac{m}{n}$ małych

w takim razie: $(n+k-m)! =_{app} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{k+n-m}$

$$\lim \lg (\nu-\varepsilon)! = (\nu-\varepsilon)\lg(\nu-\varepsilon) + \lg\sqrt{2\pi(\nu-\varepsilon)}$$

$$= (\nu-\varepsilon)\lg\nu + (\nu-\varepsilon)\underbrace{\lg\left(1-\frac{\varepsilon}{\nu}\right)}_{-\frac{\varepsilon}{\nu}+\frac{\varepsilon^2}{2\nu^2}}$$

$$\cancel{\lg\nu} = (\nu-\varepsilon)\lg\nu - \varepsilon \underbrace{- \frac{\varepsilon^2}{2\nu} + \frac{\varepsilon^2}{\nu}}_{\cancel{+\frac{\varepsilon^2}{2\nu}}} + \lg\sqrt{\cdots}$$

$$\lim(\nu-\varepsilon)! = \frac{\nu^{\nu-\varepsilon}}{e^{\varepsilon}}\sqrt{2\nu\pi} = \cancel{\nu^{\nu}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\varepsilon}\sqrt{2\nu\pi}} = \frac{\nu^{\nu}}{(e\nu)^{\varepsilon}}\sqrt{2\nu\pi}$$

$$(n+k-m)! = \text{app.}\ \cancel{\frac{\nu^{\nu}}{(e\nu)^{n+k-m-\nu}}\sqrt{2\nu\pi}} = \frac{\nu^{\nu}}{(e\nu)^{\nu-n-k+m}}\sqrt{2\nu\pi}$$

~~$\lim P(k) = \frac{e^{-\nu P}(\nu P)^{k}}{\nu^{\nu}}(e\nu)^{k-\nu}\sqrt{2\nu\pi}\underbrace{\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(1-P)^{m}P^{n-m}(\nu P)^{n-m}(e\nu)^{n-m}}_{\left[1-P+e\nu^2P^2\right]^{n}}$~~

~~W razie jeśli $\nu P > 1$~~

~~$\lim P(k) = e^{-\nu P+k-\nu+n}\,\nu^{2k-2\nu+2n}\,P^{k+2n}\sqrt{2\nu\pi}$~~

~~$= e^{-\nu P}\left[e\nu^2\right]^{n+k-\nu}P^{k+2n}\sqrt{2\nu\pi}$~~

~~absurd, bo rośnie z k!!~~

$$\lim f P(+k) = \frac{e^{-\nu P}}{\sqrt{2\nu\pi}} \frac{(\nu P)^k}{\nu^k} (e\nu)^{\nu-k} \underbrace{\sum \binom{n}{m} (1-P)^m P^{n-m} (\nu P)^{n-m} (e\nu)^{m-n}}_{\left[1-P+\frac{P^2}{e}\right]^n}$$

$$= \frac{e^{-\nu P+\nu-k}}{\sqrt{2\nu\pi}} P^k \left[1-P+\frac{P^2}{e}\right]^n$$

Dla $P=1$

$$\lim P(+k) = \frac{e^{-n-k}}{\sqrt{2\nu\pi}}$$ wtedy jednak byłoby $\sum P(+k)$

Prawdop. aby jakaś liczba (ok. większa od [illegible]) wyszła (przynajmniej) raz w obrębie m prób

$$W = P_1(k) + \left[1-P_1(k)\right]\left[P_2(k) + (1-P_2(k))\left[P_3(k) + \left[1-P_3(k)\right]\left[P_4(k) + \right.\right.\right.$$

$$\begin{aligned} = P_1 &+ P_2 - P_1P_2 \\ &+ P_3 - P_1P_3 - P_2P_3 + P_1P_2P_3 \\ &+ P_4 - P_1P_4 - P_2P_4 - P_3P_4 + P_1P_2P_4 + P_2P_3P_4 + P_1P_3P_4 - P_1P_2P_3P_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4) = 1 &- (x_1+x_2+x_3+x_4) \\ &+ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_4x_3 \ldots \\ &- x_1x_2x_3 - \ldots - \end{aligned}$$

$$W = 1 - \left[(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)\ldots - \right]$$

118

$$\log(W-1) = \sum_n \lg(1-P_n) = \sum_n\left[-P_n - \frac{P_n^2}{2} - \frac{P_n^3}{3} - \frac{P_n^4}{4} - - -\right]$$

nie da się obliczyć explicite

Przy zastosowaniu wszystkich takich wzorów do doświadczeń Svedberga itp., trzeba o tem pamiętać, że założeniem dla nich jest nieruchomość ośrodka w którym cząstki emulsyi się poruszają. Jeżeli natomiast istnieje pole grawitacyjne, zmienność czasowa musi być wzięta. Bo nawet gdyby D było znikomo małem, tak że czasowe zmienności nieruchomej cieczy znikomo mało, to w razie ogólnego postępowego ruchu opadania cząstek lokalne zmienności ich liczby musiałyby się wydawać jako zmiany czasowe. Więc obserwowana zmienność czasowa będzie wynikiem współdziałania rzeczywistej czasowej oraz lokalnej zmienności. Obliczanie w ten sposób uzupełnić!?

W ogólnej mechanice statystycznej rozpatruje się zachowanie zbiorowiska systemów w różnych fazach początkowych. Więc wychodzi się z przypadku pewnej ilości punktów reprezentacyjnych w 2rN przestrzeni. Na podstawie Liouville'a itd. twierdzi się, że „gęstość" tychże punktów niezmienna, o ile początkowo rozdzielone z jednakową gęstością w 2rN przestrzeni.

Tymczasem jest to przypadek zupełnie analogiczny do układu cząstek emulsyi: Prawda jest, że punkty pozostaną w odpowiednich częściach elementarnych, których objętość się nie zmienia z czasem, i o ile „gęstość" oznacza stosunek części wielkości, wszystko jest stałe. Ponieważ jednak owe „elementy" się deformują;

wyrażają i rozkładają w niemożliwy sposób (Borel, „feuilles"), więc taka definicja gęstości nie odpowiednia.

Odpowiedniejsza definicja: gęstość = stosunek liczby punktów zawartych chwilowo w przestrzeni kulistej (o pewnym promieniu) (koło danego punktu) do owej przestrzeni

Taka gęstość będzie wszakże zmienna, i mianowicie jeśli układ początkowo był „równomierny" — to wprost niemożliwość, zatem trzebaby powiedzieć raczej: czysto „przypadkowy", tak jak w drobinach gazu idealnego — to z czasem przyjmie wielkie możliwe wartości w myśl prawd. tych samych co w emulsjach, zatem także będzie można znaleźć czas tak długi, że po jego upływie gęstość będzie dowolnie różna od początkowej „równomiernej"! (W pozornej sprzeczności z Gibbsem). Tylko przeciętnie będzie taka sama. A prawdopodobieństwo odstępstw od normalnej (w czasach ∞ długich) będzie dane przez zwykły wzór $\frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!}$.

Średnio czas, po upływie którego wpływ początkowego układu zanika, będzie czas powrotu T, który zależny będzie 1). od liczby punktów obecnych w danej kuli 2). od rodzaju systemu, a mianowicie od „szybkości" rozmieszczania elementów [illegible] dw.

W razie nieskończ. wielkiej liczby punktów zawartych w kuli, gęstość pozostałaby ściśle jednakowa (Gibbs) — (Ehrenfest) to właśnie zaciemnia istotny stan rzeczy.

Dalszy ciąg ze str. (   )

Wpływ ogólnego ruchu postępowego cząstek emulsyi na czasową zmienność liczby cząstek.

Wyniki str. 8, 9, itd. zmienią się o tyle że wzór zD. ogólnego uwzględnia cząstek ruch postępowy (Patrz mojej pracy str. 422)

$$P = \frac{2}{h}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi D t}}\int_0^h dx\int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{(\xi+ut)^2}{4Dt}}d\xi =$$

~~$= \frac{1}{h\sqrt{\pi D t}}\left\{ x\int_{-\infty}^{-x}\ldots \Big|_0^h + \int_0^h x\, e^{-\frac{(x+ut)^2}{4Dt}}dx\right\}$~~

~~$= \frac{1}{\sqrt{\pi D t}}\left\{\int_{-\infty}^{-h} e^{-\frac{(\xi+ut)^2}{4Dt}}d\xi\right.$~~ ~~$= [illegible]\int_0^h dx\int e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}}d\xi$~~

$\xi + ut = y$

$h - x = y$

$$= \frac{1}{h\sqrt{\pi D t}}\int_0^h dx\int_{-\infty}^{-(x+ut)} e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}}d\xi = \text{~~$\frac{1}{h\sqrt{\pi D t}}\left\{ h\int_{-\infty}^{-h+ut} e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}}\right.$~~}$$

$\int_{h-x-vt}^{\infty}$

$-\int_h^0 dy\int_{y-vt}^{\infty}$

$$P = \frac{1}{2h\sqrt{\pi D t}}\int_0^h dx\left\{\int_{-\infty}^{-x} + \int_{h-x}^{\infty} e^{-\frac{(\xi+ut)^2}{4Dt}}d\xi\right\} = \ldots\int_0^h dx\left[\int_{-\infty}^{-(x+vt)} e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}}d\xi + \int_{x-vt}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}}d\xi\right]$$

$$= \frac{1}{2h\sqrt{\pi D t}}\int_0^h dx\left[\underbrace{\int_{x-vt}^{\infty}}_{} + \int_{x+vt}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}}d\xi\right]$$

$$\text{~~[illegible]~~}\; x\int_{x-vt}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}}d\xi\,\Big|_0^h + \int_0^h x.e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}dx = h\int_{h-vt}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}}d\xi - 2Dt\, e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}\Big|_0^h + vt\int_0^h e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}dx$$

$$P=\frac{1}{2h\sqrt{\pi Dt}}\left\{2h\sqrt{Dt}\int_{\frac{(h-vt)^{*}}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty}e^{-y^2}dy+2vt\sqrt{Dt}\int_{-\frac{vt}{2\sqrt{Dt}}}^{\frac{h-vt}{2\sqrt{Dt}}}e^{-y^2}dy+2Dt\left[1-e^{-\frac{(h-vt)^2}{4Dt}}\right]\right\}$$

$$\left\{+2h\sqrt{Dt}\int_{\frac{h+vt}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty}\dots\right\}$$

$$P_t=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_{\frac{h-vt}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty}+\int_{\frac{h+vt}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty}e^{-y^2}dy+\frac{vt}{h}\left[\int_{-\frac{vt}{2\sqrt{Dt}}}^{\frac{h-vt}{2\sqrt{Dt}}}-\int_{\frac{vt}{2\sqrt{Dt}}}^{\frac{h+vt}{2\sqrt{Dt}}}e^{-y^2}dy\right]+\frac{\sqrt{Dt}}{h}\left[2-e^{-\frac{(h-vt)^2}{4Dt}}-e^{-\frac{(h+vt)^2}{4Dt}}\right]\right\}$$

W tem za v podstawić trzeba prędkość postępową gromady wszystkich emulsyi.

Dla $v=0$ powracamy oczywiście do poprzednich wzorów, dla $v=\infty$: $P_t=1$.

Zresztą wszystkie inne argumentacye, oraz wzory dla $P(t+k)$, itd., pozostają niezmienione.

Wpływ ruchu postępowego zależy zatem oczywiście w pierwszym rzędzie od stosunku $\frac{vt}{h}$,

więc będzie tem mniejszy, czem mniejsza prędkość v i czem krótsze interwały t.

Dla małych $\frac{vt}{h}$: przybliżenie:

$$\int_{\frac{h\mp vt}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty}e^{-y^2}dy=\int_{\frac{h}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty}\pm\frac{vt}{2\sqrt{Dt}}e^{-\frac{h^2}{4Dt}}$$

i wogóle człony pierwszego rzędu znikają (co zrozumiałe, bo kierunek v obojętny)

~~2 1/4~~
~~1852~~
~~27 Dt~~

$\frac{1}{\frac{1}{20}}$ $\frac{0{\cdot}95}{0{\cdot}91}=20$

578
− 31
485 : 31 = 175

12
31
39
16

203
203
89
495
+6
501

10
25
28
3
65
15
0
9
13
9
13
454

34
11
3
3
3
5
9
21 +62
98
22
0 15
0
0
60

Czy $P_n(+k)$ czyni zadość prawidłu:

$$P_n(+k)_{2\tau} = \sum_{m=-n}^{\infty} P_n(+m)_\tau \; P_{(n+m)}(+k-m)_\tau$$ (analogia do zasad. równania róż. z ułamkiem zer.)

~~nie można się spodziewać, żeby takie prawo istniało, bo prawdop. przyrostu~~

p. 148
155

120 002 001 324 123 102 111 121 125 111 023 313 332
1 2 0 0 2 2 0 1 2 1 2 3 1 1 2 1 2 1 0 0 0 2 2 0 1 3 4 0 0 1 2 1 0 2 2 0 0 1 0 1
211 122 422 122 612 214 234 5 24 114 131 142 310 010 092
1 0 0 1 0 2 2 0 1 1 0 4 5 1 0 1 3 2 1 1 1 3 3 3 0 3 3 2 2 0 3 2 1 2 1 0 1 1 0 4 2 1
112 312 320 111 100 011 1– 2 110 013 200 000 100 110 001
0 1 1 2 1 1 1 2 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 1 2 1 2 0 0 0 0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 1
000 232 210 021 100 002 010 01– 333 122 000 231 221
~~+++~~ 0 0 2 1 1 0 1 1 0 2 1 0 1 0 0 0 2 2 1 1 0 1 0 0 2 1 0 2 0 0 3 1 2 1 0 1 1
024 011 102 – 12 2 211 22 310 001 103 311 102 101 100 101
= 3 2 4 1 0 0 1 2 1 0 0 1 0 1 0 1 2 1 0 0 1 0 1 3 0 2 0 0 1 3 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1
030 113 121 210 101 211 112 11– 100 032 210 123 020 121
= 3 3 1 0 3 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 0 0 3 1 0 1 1 1 1 1 3 3 2 1 1 1 1
213 211 101 100 233 122 421 100 012 030 101 002 217
= 1 2 1 1 0 0 1 1 0 1 0 2 1 0 2 1 0 2 2 1 0 1 0 0 1 1 2 3 3 1 1 1 1 0 2 0 1 6 4
349 101 010 021 122 114 444 212 114 401 321 233 143
1 0 3 1 1 1 1 1 0 3 1 0 1 0 1 0 3 0 0 0 2 1 1 1 0 3 0 4 1 2 1 1 1 1 0 2 3 1 2
130 112 221 233 101 211 112 224 122 311 133 221 321
= 2 3 1 0 1 0 0 1 1 1 0 2 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 2 3 1 0 1 2 0 0 2 0 1 0 1 2 1 1 0 –
100 004 104 320 121 200 113 222 312 00 ‖ 253 212 033 233
1 0 0 0 4 3 1 4 1 1 2 1 1 1 1 2 0 1 0 2 1 0 0 1 2 1 1 2 0 3 2 1 1 1 2 3 0 1 1 0 2
111 100 210 022 013 011 321 131 200 101 314 322 | 112 211
0 0 0 1 0 2 1 1 0 2 0 2 1 2 3 1 0 2 1 1 0 2 2 1 2 0 1 1 1 2 2 3 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1
223 234 422 230 321 421 5 32 200 202 142 123 232 093 112
0 1 1 1 1 0 2 0 0 1 3 3 1 1 3 2 1 4 2 1 0 2 0 2 2 2 1 3 2 1 1 1 1 1 1 2 4 1 2 0 1 1
312 003 314 223 4 5 2 134 110 412 322 220 221
2 1 2 0 3 0 2 3 2 0 1 1 1 3 1 2 1 3 0 1 4 3 1 1 1 0 0 0 2 2 0 1

Teilchen diameter = 38 μμ   Goldmenge = 1·91. 10⁻⁴ [illegible]/l

auf 50 faches Vol. verdünnt

~~1·0 cm³ HAuCl₄~~

Volumen = 1064 μ³ (Dicke 2 μ)

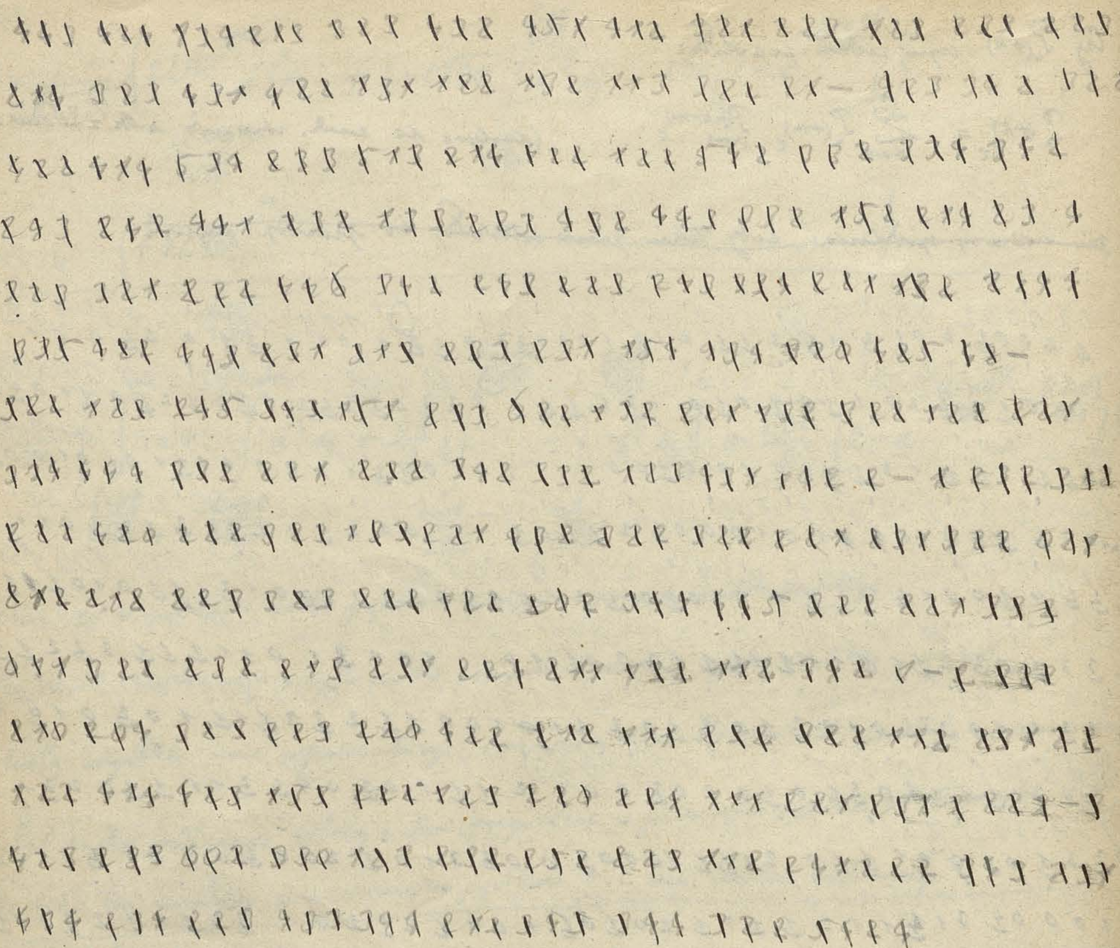
	512
6	1
5	1
0	154
1	214
2	96
3	35
4	11

~~214~~
~~384~~
~~315~~
~~176~~
~~25~~
~~36~~
~~1145 = 2·24~~

214
384
315
176
25
36
1150 : 512 = 2·24
136
34

P = 2·24 : 3·1 = 0·73
10

νP = 1·12



Konz. 0·0325 Gummigutt auf 100 cm³ Sol — Diameter = 190 μμ

verdünnt auf 1½ Vol. Beobachtet Vol = 90 μ³

	~~beob.~~	ber.	
ν = 2·321	0·390	0·529	
~~2·444~~	~~0·369~~	~~0·518~~	

$\rho/\rho_0 = 0·714$

ρ Gummigutt = 1·2317

0	1	2	3	4	5	6	7
12 ~~86~~	86	217	139	85	13	2	

Im Falle B.Ch. wäre:

$\sqrt{\frac{\overline{(n-\nu)^2}}{\nu^2}} = \frac{1}{\sqrt{\nu}}$

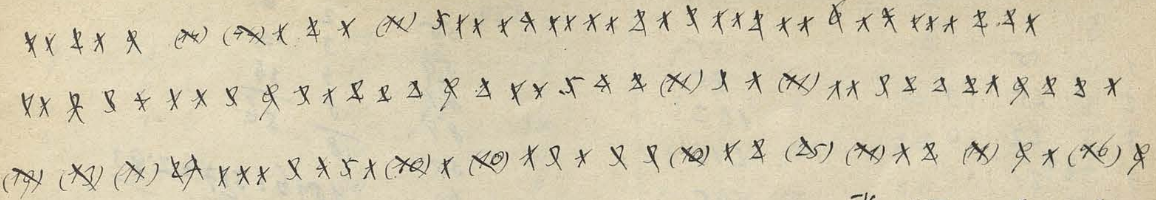
02078
01039
− 38810
62229

01039
19405
81634

Svedberg rotiert: $\sqrt{\frac{\overline{(n-\nu)^2}}{\nu}} = \frac{\rho}{\rho_0} = 0·655$

Wiederkehr der Null

121



1	44	
2	10	1+2 = 3
3	10	6
4	5	10
5	3	15
6	1	21
7	2	28
8		
9	6	45
10	3	55
11	6	66
		91
13	1	
14	1	105
16	1	~~78~~ 136
19	1	190
25	1	325
44	1	990 x
	105	22.45

44
57
60
50
45
21
56
270
165
396
91
105
136
190
325
990

3001 : 105 = ~~28.57 = mittlere Erwartungsdauer Strecke~~

~~901~~
61
8

44
38
30
20
15
6
14
54
30
66
131

448

Korrektur durch Zusammenfassung

7 (2)	56
8	36
11	66
12	78

236 : 45

$493 : 110 = \boxed{4.48 = W_{corr}}$
53
9

3237 : 493 = 6.56
279
32

3001 : 448 = 6.7 mittlere Erwartungszeit
313
4

86
434
417
340
65
12

1354 : 554 = $\boxed{v = 2.444}$
246
24

2.444	38810	77620	07918	1.85538	
1.444	15957	31914	93450	2.25364	– 179.345
					~~[illegible]~~
0.444	64738 -1	29476 -1	33646	1.63122	42.779
0.556	74507 -1	49014 -1	14301	1.63315	42.969
1.556	19201	38402	92942	2.31344	205.8
2.556	40756	81512	11394	1.92906	84.93
3.556	55096	1.10192 10103		1.40295	25.29
					581.09

$581.09 : 554 = \boxed{1.049 = \overline{(x-v)^2}}$
271
49

$\boxed{\overline{\Delta^2} = 1.98}$

$P = \frac{\overline{\Delta^2}}{2\nu} = \frac{1.98}{4.89} = 0.4049$

Erwartung
~~Wiederkehr~~ der 1

1.11…1.11

1 55
2 25 .3
3 27 :6
4 21 .10
5 11 .15
6 10 .21
7 2 .28
8 7 .36
9 1 .45
10 2 .55
15 1 .120
162

55
75
162
210
165
210
56
252
45
110
120
1460 : ~~162~~ = ~~9·01~~
~~164~~
2

55
50
81
89
55
60
14
56
29
15
499

1
2
3
4
8
18

1
3
6
10
36
56

1516 : 517 = 2·93
482
17

499 : 162 = 3·08 = Wiederkehr wirkl
130

517 : 167 = 3·09 = Wcorr
16

1460 : 488 = 2·92 = Erwartung wirkl
462
12

Wiederkehr der 2

1 35
2 19 .3
3 23 .6
4 14 .10
5 4 .15
6 5 .21
7 8 .28
8 3 .36
9 5 .45
10 2 .55
11 .66
12 .78
13 .91
15 .120
17 .153
18 .171
124

35
57
138
140
60
105
224
108
225
110
679
1881 : 124 = 15·18
641
21
9

1881 : 479 = 3·93 = E
444
13

35
38
69
56
20
30
56
24
45
20
86
479

2
3
8
10
12
35

3
6
36
55
78
178

2059 : 514 = 4·00
~~514~~
3

479 : 124 = 3·87 = W
107
8

514 : 129 = 3·98 = Wcorr
127
11

Erwartung
Wiederkehr der 3

71
18.(2)
21(2)

21
342
462
825

7
36
42
85

1	13	13
2	6 . 3	18
3	3 . 6	18
4	9 . 10	90
5	6 . 15	90
6	1 . 21	21
7	2 . 28	56
8	5 . 36	180
9	3 . 45	135
10	1 . 55	55
11	4 . 66	264
12	2 . 78	156
13	1 . 91	91
14	1 105	105
15	1 . 120	120
16	2 . 136	272
20	1 . 210	906
21	1 . 231	
30	1 : 465	
	63	2590 : 63 = 41·11

70

13
12
9
36
30
6
14
40
37
44
24
42
32
71
410

3415 : [illegible] = [illegible] = E cm
[illegible]
345 690

410 : 63 = 6·51 = W
32 5

~~2590 : 63 = 41·11~~

495 : 68 = 7·13 = W cm
90
22

2590 : 500 = 5·18

Wiederkehr der 4

1.	6	6
3.	4 . 6	24
4	2. 10	20
5	2. 15	30
6	1	21
9	3 . 45	135
10	1	55
11	1	66
13	2. 91	182
15	2. 120	240
21	- - - -	231
22		253
25		325
34		595
	28	2183 : 24 = ~~9096~~

23
14

6
12
18
6
37
11
26
30
102
248

2183 : 248 = 8·8
199
[illegible]

65
83
97
245
248
493

65.38
19,5
9,95

2145
3486
4753
12567 : 493 = 2·55!!
2707
242

493 : [illegible] 31 = 16·0 = W cm
183

248 : 28 =

Wiederkehr der 5

1 34
1 71
1 37

$\overset{17}{\cancel{34}}$. 35 + 71 . $\overset{36}{\cancel{72}}$ + 37 . $\overset{18}{\cancel{36}}$
2 . 142

35
245

252
36

37
296

3817 : 142 = 26·88
977
125
11

471 : 4 = 118

1 . 329 . 164
1974
1316
53956
3817
57773 : 471 = 122·7
1067
1253
311

Definition der mittleren Erwartungszeit

Falls in einem beliebigen Moment die Beobachtung begonnen wird, wie viel Zeit vergeht (im Mittel) bis eine bestimmte Zahl $\underline{\underline{m}}$ auftritt?

Also wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ~~nach~~ bei der k-ten Beobachtungen die Zahl $\underline{\underline{m}}$ auftritt, ohne dass sie bei den (k-1) vorhergehenden aufgetreten wäre?

Bei der ersten Beobachtung kommt Zahl n, welche beliebig sein kann

Wenn Ausgangspunkt = n, ~~wie gross ist~~ dann ist Wahrsch., dass bei der zweiten Beob.

die Zahl $\underline{m}$ kommt, = $P(n\,m\,1)$

Wahrsch., dass m nicht vorkommt = $1 - P(n\,m\,1)$

Also wird die mittlere Erwartungszeit

$$T(m) = \sum_{n \gtrless m}^{\infty} \cancel{\frac{v^m e^{-v}}{m!}} \frac{v^n e^{-v}}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} k \prod_{i=0}^{k-1} \left[1 - P(n\,m\,i)\right]$$

$$= \frac{v^m e^{-v}}{m!} \sum_{n \gtrless m}^{\infty} \frac{v^n e^{-v}}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} k \prod_{i=0}^{i=k-1} \left[1 - P(n\,m\,i)\right]$$

falsch, denn die verschiedenen $[1-P(n\,m\,i)]$ sind nicht unabhängig von einander!

$$[1-P(0)] + 2[1-P(0)][1-P(1)] + 3[1-P(0)][1-P(1)][1-P(2)] + 4 \ldots$$

$$= \cancel{[1-P(0)][1+2[1-P(1)][+3}$$

$$= 1 - P_0$$
$$+ 2 - 2p_0 \overset{-2p_1}{} + 2p_0 p_1$$
$$+ 3 - 3p_0 - 3p_1 - 3p_2 + 3p_0p_1 + 3p_0p_2 + 3p_1p_2 - 3p_0p_1p_2$$

Ist es überhaupt eine endliche Zeit?

Es kommt darauf an, wie die $\sum_{k=0}^{\infty} k \prod_{i=0}^{i=k-1} \left[1-P(n\,m\,i)\right]$ wird

Nun ist $\lim_{i=\infty} P(n\,m\,i) = \frac{\nu^m e^{-\nu}}{m!}$ also ein bestimmter endlicher $\underset{\alpha}{\text{Wert}}$, ~~daher ist~~

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{k=\infty} \frac{k+1}{k}(1-\alpha) = \lim_{k=\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)(1-\alpha) = 1-\alpha \quad < 1$$

also gibt es eine convergente Reihe

Die Schwierigkeit besteht in Folgendem: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl m auftritt ist abhängig nicht nur von der unmittelbar vorangegangenen Zahl, sondern auch von den früheren und zwar desto mehr, je kürzer die Intervalle.

z.B. Wahrscheinlichkeit dass nach $\underline{0}$ wieder $\underline{0}$ kommt ist allgemein: $\frac{45}{101}$

aber Wahrsch. $(0)\underset{\cdot}{0}0$ wird anders sein als $(1)\underset{\cdot}{0}0$, also wenn ich weiss, dass eine 0 vorangegangen ist, darf ich nicht mehr einfach die Wahrsch. für (00) benützen!

[Das ist dagegen bei der Brown'schen Bewegung im elektrischen Felde nicht der Fall, deutlich ist die Wahrsch. einer jeden Bewegung nur bestimmt durch die augenblickliche Elongation

Berechnung von P_t (str. 49)

$$P_t = 1 - \underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\beta e^{-y^2}dy}_{\Phi(\beta)} + \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}}\left[1 - e^{-\beta^2}\right] \qquad \beta = \frac{h}{2\sqrt{Dt}}$$

$$1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-\alpha^2}}{2\alpha}\left(1 - \frac{1}{2\alpha^2}\right)\right] + \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\left(1 - \cancel{e^{-\alpha^2}}\right) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}$$

β= 0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9	1·0
0·00434 ~~X~~	~~0·0~~1737	~~0·0~~3·9086	43429 26058 0·069487	0·1085 75	0·130288 26058 ~~0·39088~~ 0·15635	0·17372 ~~0~~ 3909 0·21281	0·26058 1737 0·27795	0·34743 434 0·35177	0·43429
0·99566	0·98263	0·96691	0·93051	0·89142	0·84365	0·78719	0·72205	0·64823	0·56571
0·99005	0·9608	0·9139	0·8521	0·7788	0·6977	0·6126	0·5273	0·4449	0·3679
0·00995	0·0392	0·0861	0·1479	0·2212	0·3023	0·3874	0·4727	0·5551	0·6321
0·0995	0·196	0·287	0·3698	0·4424	0·5038	0·5534	0·5909	0·6158	0·6321
99782	29226	45788	56797	64582	70226	74304	77151	78944	80079
24857	24857	24857	24857	24857	24857	24857	24857	24857	24857
74925	04369	20931	31940	39725	45369	49447	52294	54087	55222
0·0561	0·1106	0·1619	0·2086	0·2496	0·2842	0·3122	0·3334	0·3474	0·3566
0·1125	2227	3286	4284	5205	6039	6778	7421	7969	8427
0·9436	0·8879	0·8333	0·7802	0·7291	0·6803	0·6344	0·5913	0·5505	0·5139

B=

Diameter a = 38 μμ

$$D = \frac{H\theta}{N}\frac{1}{6\pi\eta\frac{a}{2}}$$

$\theta = 180$ (?)

$\eta = 0\cdot01067$

$N = 6\cdot06 \cdot 10^{23}$

$$H = \frac{76 \cdot \cancel{76} \cdot 13\cdot6 \cdot 980\cdot6}{273 \cdot 0\cdot08955 \cdot 10^{-3}} \cdot 2 = 8\cdot2916 \cdot 10^7$$

18184
13354
99149
30687
38823
91864

95207
43616
38823

$$D = \frac{8{\cdot}3 . 10^7 . 291 .}{6{\cdot}06 . 10^{23}} \; \frac{10^2}{6 . \pi . 1{\cdot}07 . 38 . 10^{-7}} = \frac{8{\cdot}3 . 291}{6{\cdot}06 . |6{\cdot}42| . 38 . \pi} \; \cancel{\frac{10^9}{10^{16}}} \; 10^{-8}$$

0·9191
1·4639
3·3830
~~6670~~
0·7160

0·7825
0·8075
·5798
·49715
2·66695

$D = 5{\cdot}20 . 10^{-8}$ |||| $D = 10{\cdot}4 . 10^{-8}$

$\beta = 0{\cdot}353 . 0{\cdot}71$
2471
$\beta = 0{\cdot}2506$
$P = 0{\cdot}86$

$$t = \frac{1}{39} \qquad \beta = \frac{\cancel{2}\, 10^{-4} \sqrt{39}}{\cancel{2} \sqrt{5{\cdot}2} . 10^{-4} \sqrt{60}}$$

1·5911
0·7160
0·8751
−1·7781
~~0·[illegible]~~
1·0970 −2

0·5485 − 1

~~$\beta = 0{\cdot}353$~~
~~$P = 0{\cdot}805$~~

~~$\beta = 0{\cdot}72$~~

während experimentell gefunden: β cca = für P = 0·72 : β = ~~0·5~~ [illegible] P = 0·73

es sollte also P viel geringer sein, also sollte die Veränderlichkeit viel kleiner sein.

Kann der Unterschied nicht durch die darüber superponierte allgemeine Fallgeschwindigkeit erklärt werden? Es kommt auf die Größe von $\underline{\underline{vt}}$ im Vergleich zu $\underline{\underline{h}}$ an

$$\text{Also} \quad v = \frac{\frac{4}{3} a^3 \pi (\rho) g}{6\pi\mu a} = \frac{2}{9} \frac{a^2 \rho g}{\mu} = \frac{2}{9} . \frac{(38)^2 10^{-14} . \overset{36{\cdot}4}{\cancel{18{\cdot}2}} . \overset{109}{\cancel{981}}}{0{\cdot}0107}$$

3·1596
1·5611
2·0374
6·7581
0294
6·7287

$v = 5{\cdot}35 . 10^{-6}$

$$\text{also ist} \quad \frac{vt}{h} = \frac{5{\cdot}35 . 10^{-6}}{39 . 2 . 10^{-4}} \neq \frac{1}{600} \,!$$

Im Falle der [illegible] haben wir $\overline{\Delta^2} = 1{\cdot}98$ also wäre $P = \frac{\overline{\Delta^2}}{2\nu} = \underline{0{\cdot}4049}$

Da aber in jenem Falle des [illegible] nicht zutrifft wäre vielleicht richtiger zu setzen

$\Delta^2 < 2\nu P$ somit $P > \frac{\Delta^2}{2\nu}$ || Es wäre demnach für a = 190 μμ : $D = 5{\cdot}20 . 10^{-8} . \frac{38}{190}$

$\beta = 0{\cdot}353 \sqrt{\frac{190}{38}} = 0{\cdot}789$ also $\underline{P = 0{\cdot}6}$

was damit übereinstimmt

Aus der ersten Svedberg'schen Zahlenreihe kann man ebenso $\bar{\Delta}^2$ bilden für je

2 3 4 5 6 Zeitintervalle.

Dabei erhält man experimentell

für je $2\Delta t$ $\bar{\Delta}^2 = 2·62$

$3\Delta t$ 2·59

4 2·80

6 3·00

944 ~~4~~ 14
888

930

Theoretisch sollte für $4\Delta t$ sein: $\beta_{(4\Delta t)} = \frac{1}{2}\beta_{(1\Delta t)} = ~~0·176~~$ 0·125

also $P = 0·90_3$

$P = 0·93$

Experimentell ergibt sich aus obigem: $\underline{P} = \frac{2·80}{2v} = \frac{2·80}{3·10} = \underline{\underline{0·90}}$!!

Stimmt auffallend

Erwartungszeit

Falls die Zeitintervalle der Beobachtungen so gross sind, dass $P=1$ gesetzt werden kann, dass also der Einfluss der Anfangslage verschwindet, dann haben wir allgemein:

$$P(n\,m\,i) = \frac{v^m e^{-v}}{m!} = \alpha$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\,(1-\alpha)^k \qquad\qquad \sum_{k=0}^{\infty} k x^k = f(x) \quad \text{~~[illegible]~~}$$

$$\int \frac{f}{x}\,dx = \sum_1^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1-\alpha}{\alpha^2} \qquad\qquad f = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$T(m) = \cancel{\frac{v^m e^{-v}}{m!}} \left\{ \sum_{n=0}^{m-1} \frac{[illegible]}{n!} + \sum_{m+1}^{\infty} \left\{ \frac{v^n e^{-v}}{n!} \cdot \frac{1-\frac{v^m e^{-v}}{m!}}{\left(\frac{v^m e^{-v}}{m!}\right)^{\cancel{2}}} \right\} = \frac{\left[1-\frac{v^m e^{-v}}{m!}\right]^2}{\frac{v^m e^{-v}}{m!}} \cdot \tau$$

für grosse n, v:

$$T(\delta) = \left[1-\frac{1}{\sqrt{2v\pi}}\,e^{-\frac{v\delta^2}{2}}\right]^2 \sqrt{2v\pi}\,e^{\frac{v\delta^2}{2}} \cdot \tau \;\neq\; \sqrt{2v\pi}\,e^{\frac{v\delta^2}{2}}$$

$$\neq \frac{m!}{v^m e^{-v}}$$

Statistik der verschiedenen Folgen:

502 : 101 = 4·97
98
7
4473
944

~~1·80~~ 179
$\frac{502}{129} = 3·89$
115 | 2723
12
136
778
156

00	207·6	45	~~223·65~~
01	161·7	35	~~172·95~~
02	87·6	19	~~94·4~~
03	32·3	7	~~34·79~~
04	23·1	5	~~24·85~~
05		0	
		111	

45·12

$\bar{\Delta}^2_0 = \cancel{2·50}$ 2·29

10	40	124·9
11	55	171·7
12	40	124·9
13	17	53·1
14	10	31·2
15	1	3·1
16	0	
17	1	3·1
	164	

$\bar{\Delta}^2_1 = 1·77$

20	75·4	19	73·9
21	166·7	42	163·4
22	138·9	35	136·1
23	95·3	24	93·4
24	23·8	6	23·4
25	7·9	2	7·8
26	3·9	1	3·9
		129	

3·89 = 3·901
1556
778

$\bar{\Delta}^2_2 = 1·55$

30	6	44·5
31	23	170·7
32	22	163·2
33	13	96·5
34	5	37·1
35	0	
	69	

$\Delta^2_3 = 2·51$

40	32	2	31·4
41	128	8	125·6
42	160	10	157
43	64	4	62·8
44	96	6	94·2
45	32	2	31·4
		32	

$\Delta^2 = 4·7$

~~50~~ 251 : 16 = 15·7
91
110

542

50	0	0
51	1	102·4
52	2	204·8
53	2	204·8
54	0	0
	5	

$\frac{512}{5} = \cancel{100·5}$ 102·4

$\Delta^2 = 8·4$

61 1 || $\Delta^2 = 25$

73 1 || $\Delta^2 = 16$

~~7258~~ 3
3628 3
10887
3628
11125

$P = \frac{2·25}{3·10} = 0·\cancel{7345}$
0·7282
0·7258

lg = ·8660 − 1

v = ~~1·553~~
~~1·547~~ (mit Endgliedern)
1·55⁵

lg v = ·1893
lg vP = ·0553
vP = ~~1·136~~ 1·125

Durchgeführte Anwendung jener Formel (pag 43):

$$\overline{\Delta^2_n} = P^2\left[(n-\nu)^2 - n\right] + (n+\nu)\,P$$

es berechnet sich daraus:

		berechnet
$\overline{\Delta^2_0} = 3·43$	2·19	2·39
$\overline{\Delta^2_1} = 1·50$	1·77	[wenn der 17 Fall ausgeschlossen wird, kommt heraus 1·55] 1·48
$\overline{\Delta^2_2} = 1·64$	1·55	1·63
$\overline{\Delta^2_3} = 2·86$	2·51	2·83
$\overline{\Delta^2_4} = 5·16$	4·7	5·08
$\overline{\Delta^2_5} = 8·57$	8·4	8·39
$\overline{\Delta^2_6} = 13·5$	25	
$\overline{\Delta^2_7} = 18·5$	16	

$$P\binom{+k}{n} = e^{-\nu P}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(1-P)^{n-m}\,P^m\,\frac{(\nu P)^{k+m}}{k+m!}$$

(pg 40) $\lg e^{-\nu P} = 0·50664 - 1$

$P(00) = e^{-\nu P} = 0·3211$

$P(01) = e^{-\nu P}.\nu P = 0·365$

$P(02) = e^{-\nu P}.\frac{(\nu P)^2}{2!} = 0·248$

$P(03) = e^{-\nu P}.\frac{(\nu P)^3}{3!}$ 0·0784

$P(04) = e^{-\nu P}\frac{(\nu P)^4}{4!}$ 0·0222

~~$P(05) = e^{-\nu P}\frac{(\nu P)^5}{5!}$~~

36	0·3247
40	0·3652
23	0·20545
9	0·07703
2	0·02167
1	0·004875
	0·000914

$P(05) =$

$P(06) =$

$P(10) = e^{-\nu P}\left[P\right. = 0·2356$ (39

$P(11) = e^{-\nu P}\left[(1-P) + P.\nu P\right] = 0·3541$ (58

$P(12) = e^{-\nu P}\left[\nu P(1-P) + P.\frac{(\nu P)^2}{2!}\right] = 0·2492$ (41

$P(13) = e^{-\nu P}\left[.(1-P)\frac{(\nu P)^2}{2!} + P\frac{(\nu P)^3}{3!}\right] = 0·1122$ ⑱

$P(14) = e^{-\nu P}\left[(1-P)\frac{(\nu P)^3}{3!} + P\frac{(\nu P)^4}{4!}\right] = 0·0368_5$ (6

$P(15) =$ 0·00948 (2

$W(1n) = P.W(0,n) + (1-P).W(0,n-1) = W(0,n-1) + P\left[W(0n) - W(0,n-1)\right]$

Allgemein:

$W(kn) = \cancel{1}\,W(k-1,n-1) + P\left[W(k-1,n) - W(k-1,n-1)\right]$

$P(16) = 0·00200$

$P(20) = e^{-\nu P}\left[P^2 \cancel{+}\right.$

$P(21) = e^{-\nu P}\left[2P(1-P) + P^2(\nu P)\right]$

$P(22) = e^{-\nu P}\left[\cancel{\#}(1-P)^2 \cancel{\frac{(\nu P)}{1!}} + 2(1-P)^1 P \frac{(\nu P)}{\cancel{1!}} + P^2 \frac{(\nu P)^2}{2!}\right]$

$P(23) = e^{-\nu P}\left[(1-P)^2(\nu P) + 2(1-P)P\frac{(\nu P)^2}{2!} + P^2\frac{(\nu P)^3}{3!}\right]$

$P(24) = e^{-\nu P}\left[(1-P)^2\frac{(\nu P)^2}{2!} + 2(1-P)P\frac{(\nu P)^3}{3!} + P^2\frac{(\nu P)^4}{4!}\right]$

$P(25) =$

$P(26) =$

~~$P(30) = e^{-\nu P} P^3$~~

9989

0.1710.	22
0.3216	41
0.2780	36
0.1498	19
0.0575	7
0.0170	2
0.00405	1

$P(30) = e^{-\nu P} \cdot P^3$	8.6	$= 0.1241_3$	$P(40) = 0.0901$	3	$P50 = 0.0654$	0.3
$P(31) =$	19	0.2803	0.2375	8	0.1971	1
$P(32) =$	20	0.2900	0.2873 ~~0.2807~~	9	.2736	1.3
$P(33) =$	13	0.1850	0.2138	7	.2340	1.2
$(34) =$	6	0.0828	0.1108	4	.1390	0.7
$(35) =$	2	0.0281 7	0.0431	1	.0617	0.3

Falls Teilchen ausgehen vom Punkt x_0, so ist ~~[illegible] das~~ Anzahl derer, welche eine Elongation $> h$ in der Zeit τ erreichen:

$$\int_h^\infty W(x, x_0, \tau)\,dx \quad , \quad \text{die übrigen} \int_{-\infty}^h W(x, x_0, \tau)\,dx$$

beobachten oder setzen, von ihnen wird im Intervall 2τ wieder ein gewisser Bruchteil [illegible] h sein und zwar

$$\int_{y=-\infty}^{h} \int_{x=-\infty}^{h} W(x, x_0, \tau)\,dx \; W(y, x, \tau)\,dy$$

~~[illegible]~~ Die Anzahl (unter den zuerst ausgegangenen) der Teilchen, welche ~~[illegible]~~ innerhalb der n Intervalle τ noch nie sich über h erhoben hat, wird sein:

$$\int_{x=-\infty}^{h} dx \int_{y=-\infty}^{h} dy \int_{z=-\infty}^{h} dz \int \ldots \int_{r=-\infty}^{h} W(x, x_0, \tau)\, W(y, x, \tau)\, W(z, y, \tau) \,--\, W(r, s, \tau)\,dr$$

Die allgemeine Anzahl solcher Teilchen, welche sich innerhalb n Intervalle τ niemals nicht über h erhoben haben, wird daraus noch erhalten durch

$$\int_{-\infty}^{h} \sqrt{\frac{\beta}{2\pi D}}\, e^{-\frac{\beta x_0^2}{2D}}\, dx_0$$

Es handelt sich also um ein Integral von der Form

$$\iiint\!\!\int_{-\infty}^{h} e^{-\frac{\beta}{2D}\left\{x_0^2 + \frac{(x - x_0 e^{-\beta t})^2 + (y - x e^{-\beta t})^2 + (z - y e^{-\beta t})^2 + \cdots}{1 - e^{-2\beta t}}\right\}} dx_0\, dx\, dy\, dz \ldots$$

$$= \iiint e^{-\frac{\beta}{2D(1 - e^{-2\beta t})}\left\{x_0^2 - 2 x x_0 e^{-\beta t} + x^2 + (y - x e^{-\beta t})^2 + (z - y e^{-\beta t})^2 + \ldots\right.}$$

$$= (x_0 - x e^{-\beta t})^2 + x^2 - 2xy e^{-\beta t} + y^2 + (z - y e^{-\beta t})^2 \ldots$$

$$= (x_0 - x e^{-\beta t})^2 + (x - y e^{-\beta t})^2 + y^2 - 2zy e^{-\beta t} + z^2 + \ldots$$

$$= (x_0 - x e^{-\beta t})^2 + (x - y e^{-\beta t})^2 + (y - z e^{-\beta t})^2 + \ldots \quad + (s^2 - 2sr e^{-\beta t} + r^2)$$

$$\int_{-\infty}^{h} dx_0\, e^{-\alpha\underbrace{(x_0 - x e^{-\beta t})}_{v}{}^2} = \int_{-\infty}^{h - x e^{-\beta t}} e^{-\alpha v^2} dv$$

$$x = u + y e^{-\beta t}$$

$$\int_{-\infty}^{h} dx\, e^{-\alpha\underbrace{(x - y e^{-\beta t})}_{u}{}^2} \int_{-\infty}^{h - x e^{-\beta t}} e^{-\alpha v^2} dv = \int_{-\infty}^{h - y e^{-\beta t}} du\, e^{-\alpha u^2} \int_{-\infty}^{h - u e^{-\beta t} - y e^{-2\beta t}}$$

$$\int e^{-\alpha(x - y e^{-\beta t})^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{h - x e^{-\beta t}} e^{-\alpha v^2} dv + \int \boxed{e^{-\beta t} \cdot e^{-\alpha(h - x e^{-\beta t})^2} dx \cdot \int e^{-\alpha(x - y e^{-\beta t})^2} dx}$$

Im Grenzfalle einer gewöhnl. Br. Bewegung: die Anzahl der vom Nullpunkt ausgeg. Teilchen welche in einer bestimmten Zeit unter h geblieben sind:

$$\mathcal{E} = \left(\frac{1}{2\sqrt{D\pi t}}\right) \int_{-\infty}^{h} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx \int_{-\infty}^{h} e^{-\frac{(y-x)^2}{4Dt}} dy \underbrace{\int_{-\infty}^{h} e^{-\frac{(z-y)^2}{4Dt}} dz}_{h-y} - -$$

$$\int \cancel{e^{-\alpha x^2}}\, dy \int_{-\infty}^{h-y} e^{-\alpha r^2} dr$$

$$y - x = v$$

$$y = v + x$$

$$\mathcal{E} = \left(\frac{1}{2\sqrt{D\pi t}}\right)^n \int_{-\infty}^{h} e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{h-x} e^{-\alpha v^2} dv \int_{-\infty}^{h-v-x} e^{-\alpha r^2} dr \int_{-\infty}^{h-r-v-x} e^{-\alpha s^2} ds \int_{-\infty}^{h-s-r-v-x} e^{-\alpha u^2} du$$

wenn man annimmt, dass die Stücke s, r, v, x usw. klein sind oder als klein angenommen werden können:

$$\int_{-\infty}^{h-x-v-r} e^{-\alpha s^2} ds \left[\int_{-\infty}^{h-x-v-r} e^{-\alpha u^2} du - e^{-\alpha h^2} \cdot s\right] = \left[\int_{-\infty}^{h-x-v-r} e^{-\alpha s^2} ds\right]^2 + e^{-\alpha h^2} \cdot \frac{e^{-\alpha(h-x-v-r)^2}}{\alpha}$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{h-x-v} e^{-\alpha s^2} ds - e^{-\alpha(h-x-v)^2} \cdot r\right]^2 +$$

$$\int_{-\infty}^{h} e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{h-x} e^{-\alpha v^2} dv = \cancel{\int_{-\infty}^{h} e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{h} e^{-\alpha v^2} dv - e^{-\alpha h^2}}$$

$$= \cancel{\int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha x^2} dx \,.\, \int_{-\infty}^{h-x} e^{-\alpha v^2} dv \Bigg|_{x=-\infty}^{x=h}} \cancel{+ \underbrace{\int_{-\infty}^{h} dx \,.\, e^{-\alpha (h-x)^2} \int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha x^2} dx}_{h-x=z}}$$

$$= \cancel{\int_{-\infty}^{h} e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha v^2} dv - \int_{+\infty}^{0} dz\, e^{-\alpha z^2} \int_{\mp\infty}^{h-z}}$$

$$d\left\{ \int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha x^2} dx \,.\, \int_{-\infty}^{h-x} e^{-\alpha v^2} dv \right\} = e^{-\alpha x^2} \int_{-\infty}^{h-x} e^{-\alpha v^2} dv - e^{-\alpha (h-x)^2} \int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha x^2} dx$$

$$\left\{ \int_{-\infty}^{x} \qquad \right\} \Bigg|_{x=-\infty}^{x=h} = \int_{-\infty}^{h} \qquad - \int_{-\infty}^{h}$$

$$\int_{-\infty}^{h} \left[e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{h-x} e^{-\alpha v^2} dv \right] = \int_{-\infty}^{h} e^{-\alpha v^2} dv \,.\, \int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha v^2} dv + \underbrace{\int_{-\infty}^{h} \left[e^{-\alpha (h-x)^2} dx \int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha v^2} dv \right]}_{-\int_{\infty}^{0} e^{-\alpha z^2} dz \int_{-\infty}^{h-z} e^{-\alpha v^2} dv}$$

In jedem Falle ist: $\varepsilon <$ [illegible]^{3n} !!

$$\varepsilon < \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{h} e^{-\alpha v^2} dv \right]^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\overset{\cancel{\infty}}{h\sqrt{\alpha}}} e^{-z^2} dz = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{h}{2\sqrt{D\tau}}} e^{-z^2} dz \right]^n$$

Sonst wäre auch:

$$\lim_{\tau=0} \left[\int_{-\infty}^{\frac{h}{2\sqrt{D\tau}}} e^{-z^2} dz \right]^n = 1$$

Man hätte für kleine τ:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{h}{2\sqrt{D\tau}}} e^{-z^2}dz = 1-\frac{e^{-\frac{h^2}{4D\tau}}}{\sqrt{\pi}\cdot\frac{h}{2\sqrt{D\tau}}}$$ und $\left[\frac{1}{2\pi}\right]^n$

$$e^{-n\frac{e^{-\frac{h^2}{4D\tau}}}{\frac{h}{2}\sqrt{\frac{\pi}{D\tau}}}}$$ $n\tau=1$

$$\lim e^{-\frac{e^{-\frac{h^2}{4D\tau}}}{\frac{h}{2}\sqrt{\frac{\pi\tau}{D}}}}=1$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{-\infty}^{(h-s-r-v-x)\sqrt{\alpha}} e^{-u^2}du = \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-u^2}}{u}\sin 2\sqrt{\alpha}(h-s-r-v-x)u\,.\,du$$

$\sin(2h+\varepsilon) = ~~\sin 2h \cos 2\varepsilon~~ + \cos 2h \sin 2\varepsilon$

$\cancel{2}\varepsilon\cdot\cos 2h$

$$\varepsilon=\left[\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\right]^n\iiint_{-\infty}^{\alpha h} dx\,dy\,dz\,dv\ldots e^{-2(\overset{1}{x^2}+xy+\overset{2}{y^2}+yz+\overset{3}{z^2}+zv+\overset{4}{v^2}+\ldots\overset{n}{})}$$

Wahrsch. der Erreichung einer Distanz $\Delta \ldots \Delta + d\Delta$ in der Zeit τ:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi D\tau}}e^{-\frac{\Delta^2}{4D\tau}}d\Delta$$

Wahrsch., dass ein Teilchen sich daselbst weder zur Zeit τ, noch 2τ, 3τ .. $m\tau$ befindet:

$$W=\prod_{n=1}^{m}\left[1-\frac{1}{2\sqrt{\pi D n\tau}}e^{-\frac{h^2}{4Dn\tau}}dh\right];\qquad \log W=-\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi D n\tau}}e^{-\frac{h^2}{4Dn\tau}}dh\right]$$

$$\sum{}'=\int_0^t\frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}e^{-\frac{h^2}{4Dt}}\frac{dt}{\tau}\,dh$$

$\frac{h}{2\sqrt{Dt}}=z$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{2z\sqrt{D}}{h}$

$-\frac{h}{2\sqrt{Dt}}dt = dz\,\frac{h^2}{4Dz^2}$

$$=-\frac{H^2}{4D\sqrt{\pi}\,\tau}\int_{\infty}^{\frac{H}{2\sqrt{D\tau}}}\frac{e^{-z^2}dz}{z^2}$$

$h \sim 2\sqrt{D\tau}$

dabei $t=n\tau$

$t=n\cdot\frac{h^2}{4D}$

$$=[illegible]\left(\frac{H}{[illegible]}\right)^2\int_{\frac{H}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty}\frac{e^{-z^2}}{z^2}dz$$

~~$x_m = A\sqrt{\log n}$~~

~~$\frac{x^2}{A^2} = \log n$~~

~~$e^{\frac{x^2}{A^2}} = n$~~

~~$\frac{1}{n} = e^{-\frac{x^2}{A^2}}$~~

~~$\int_{-\infty}^{h} e^{-(x^2+xy)}\,dx = e^{\frac{y^2}{4}}\int_{-\infty}^{h} e^{-(x+\frac{y}{2})^2}\,dx = e^{\frac{y^2}{4}}\int_{-\infty}^{h-\frac{y}{2}} e^{-z^2}\,dz$~~

~~$= e^{\frac{y^2}{4}}\left[\int_{-\infty}^{h} e^{-z^2}\,dz - e^{-h^2}\frac{y}{2}\right]$~~

~~$\int_{\alpha}^{\infty} = \int_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\alpha} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-\Phi(x))$~~

~~$\int_{-\infty}^{1}\frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z}\Big|_{-\infty} = -1$~~

$$\int_{+\infty}^{\alpha}\frac{e^{-z^2}dz}{z^2} = -\frac{e^{-z^2}}{z}\Bigg|_{+\infty}^{\alpha} - 2\int_{+\infty}^{\alpha} e^{-z^2}\,dz = -\frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha} + 2\int_{\alpha}^{\infty} e^{-z^2}\,dz$$

$$\alpha = \frac{H}{2\sqrt{Dt}}$$

$$W = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\,e^{-\frac{H^2}{4Dt}}\,dH \cdot e^{\frac{-H^2}{4Dt\sqrt{\pi}}\underbrace{\left\{\frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha} - 2\int_{\alpha}^{\infty} e^{-z^2}dz\right\}}_{\frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha}\left[1-\frac{1}{2\alpha^2}+\cdots\right]}}$$

~~Falls man nur den ersten Factor berücksichtigt wird:~~ maximale Wahrscheinlichkeit.

~~$\frac{\partial W}{\partial t} = 0 \quad \frac{1}{\sqrt{t}}\,e^{-\frac{H^2}{4Dt}}\,\frac{H^2}{4D}\frac{1}{t^2} - \frac{1}{2\sqrt{t^3}}\,e^{-\frac{H^2}{4Dt}} = 0$~~

~~$\frac{H^2}{2Dt} = 1$~~ $\qquad t = \frac{H^2}{2D}$

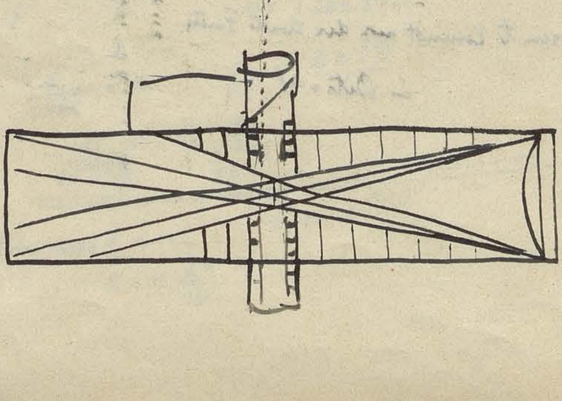
$$W = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\,e^{-\frac{H^2}{4Dt}}\,dH \cdot e^{\frac{H^2}{4Dt\sqrt{\pi}}\cdot\frac{e^{-\alpha^2}}{2\alpha^3}}$$

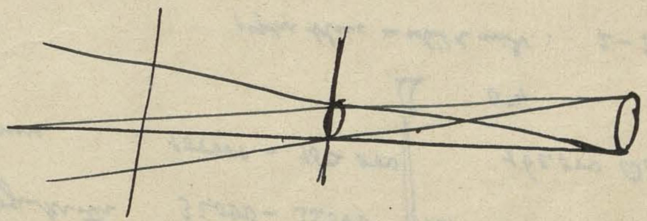
$$\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha^3}+\beta\alpha^2\right] = -\frac{2\alpha}{\alpha^3}e^{-\alpha^2} - \frac{3e^{-\alpha^2}}{\alpha^4} + 2\beta\alpha = 0$$

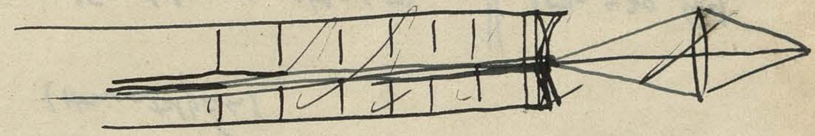
bei grossen t kommt nur der zweite Factor in Betracht

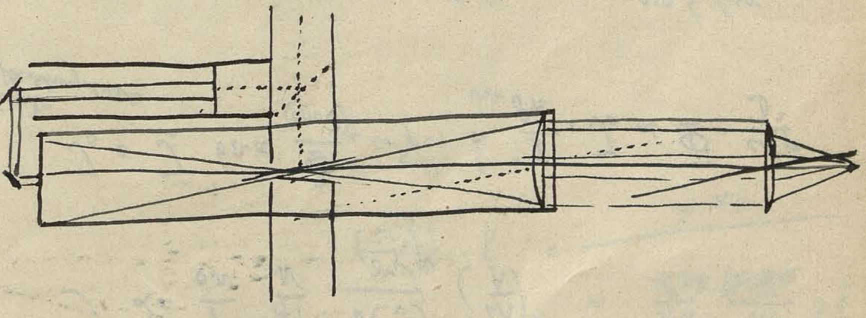
$\frac{d}{\alpha}$

$$e^{-\alpha^2}\left(\frac{2}{\alpha^3}+\frac{3}{\alpha^5}\right) = 2\beta$$

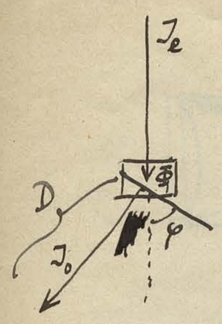








Einstein



$$J_0 = J_e \cdot \frac{HT}{N} \frac{\nu\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\nu}\right)^2}{[illegible]} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 \frac{\Phi}{(4\pi D)^2} \cos^2\varphi$$

$$\left. e^{-\alpha\delta} \right)$$

$$\alpha = \frac{1}{6\pi} \frac{HT}{N} \cdot \frac{\nu\left(\frac{\partial\varepsilon}{\nu}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\nu^2}\right)} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4$$

$$J_0 = J_0\, 6\pi\alpha \frac{\Phi}{(4\pi D)^2} \cos^2\varphi = \frac{3}{8\pi} \cdot J_0\, \alpha\, \Phi \cdot \frac{\cos^2\varphi}{D^2}$$

$J = \frac{F}{4\pi}$ $J =$ Kegel-Strahlungsdichte

Uppenborn Vollmondbeleuchtung bei klarer Luft ca 0·26 lux

$\frac{J}{r^2}$ (Horizontalfläche)

Flächenhelle $\frac{HK}{cm^2}$: Nernstbrenner 160 - 450 ‖ 350 - 470 B.J.

$\chi = \frac{J}{s}$ + Bogenkrater 32.000 - 35.000 ‖ 15.000 - 35.000 Ba

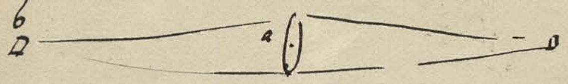
Sonne 100000 - 150 000 ‖ 160.000 B.J.

☾ 0·4

papier blanc au soleil de midi : 2 - 3

" minimum hygiénique 0·0002

a pleine lune 0·000001



$$\frac{\chi\,\sigma\,\frac{4\pi}{\text{[illegible]}}\,\frac{a^2\pi}{4r^2\pi}\cdot\alpha}{4\pi\,\sigma} = \chi\cdot\frac{a^2}{4r^2}\,\alpha$$

$$= \chi\,\frac{4}{400}\cdot\underset{10^{-6}}{\alpha}$$

400

$$\frac{4}{3}\frac{a^3\pi}{d^3} = 0{\cdot}01$$

$$\frac{a}{d} = \sqrt[3]{0{\cdot}002{,}5}$$

~~=[illegible]~~

$$= 0{\cdot}13$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\cos 2\xi u\, du = \sqrt{\pi}\, e^{-\xi^2}$$

$$\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi} e^{-t^2}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-u^2}}{u}\sin 2\xi u\, du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-u^2+2\xi u i}}{ui}\, du$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho^2x^2}\sin p(x+\lambda)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\rho}\, e^{-\frac{p^2}{4\rho^2}}\sin p\lambda$$

Bierens de Haan
p. 394

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho^2x^2}\cos p(x+\lambda)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\rho}\, e^{-\frac{p^2}{4\rho^2}}\cos p\lambda$$