Über ein Paradoxon in der kinetischen Theorie der Lösungen.

Von M. v. Smoluchowski

§1. Als Grundlage der kinetischen Theorie der Lösungen dient der Satz, dass die Moleküle einer gelösten Substanz sich ganz analog wie Gasmoleküle verhalten, so dass sich die mittlere Geschwindigkeit der Schwerpunktsbewegung derselben aus der für Gasmoleküle giltigen Formel berechnet:

$$C = \sqrt{\frac{2\alpha\theta}{M}}$$

in welcher θ die absolute Temperatur, α einen ungefähr $3{\cdot}6 . \cancel{10}\; 10^{16}$ betragenden Zahlenkoeffizienten, und M das chemische Molekulargewicht bedeutet.

Diese Analogie, welche auf dem Maxwell'schen ~~[illegible]~~ Äquipartitionsgesetze der Energie beruht, findet ihren Ausdruck in den ~~[illegible]~~ Van't Hoff'schen Gesetzen des osmotischen Druckes. Auf derselben Grundlage haben Einstein und der Verfasser der vorliegenden Notiz eine kinetische Theorie der Brown'schen Molekularbewegung aufgebaut, deren Folgerungen namentlich ~~[illegible]~~ durch die experimentellen Arbeiten Perrin's und seiner Schüler, ~~[illegible]~~ Svedberg's u. A. so genau quantitativ bestätigt worden sind, dass man dies heute als einen der augenfälligsten Beweise der kinetischen Theorie ansieht.

Demgegenüber möchte ich auf eine eigentümliche Schwierigkeit bei der Anwendung jenes Grundsatzes hinweisen, ~~welche vielleicht schon Anderen aufgefallen sein mag~~, welche sich zu einem scheinbar ~~ganz~~ gewichtigen Einwand gegen alle jene Berechnungen ~~[illegible]~~ zuspitzen liesse. ~~[illegible] vielleicht schon Andern~~ Es sollte mich wundern wenn dieselbe nicht schon Anderen aufgefallen wäre, doch habe ich nirgends eine Erwähnung gefunden.

§2. Jedem der sich mit theoretischer Hydrodynamik beschäftigt, ist es ja wohlbekannt, dass ein in einer Flüssigkeit bewegter Körper gewisse Reactionskräfte erfährt, deren Wirkung insbesondere das Beharrungsvermögen desselben vermehrt. Es hat dies schon 1833 ~~[illegible]~~ Green bei der Theorie des Pendels in Betracht

1)

gezogen und später sind eingehende Theorien ~~dieser~~ derartiger Erscheinungen von Stokes, Dirichlet, Clebsch, Thomson u. Tait, Kirchhoff u. A. gegeben worden. Im Falle einer ungleichförmig bewegten Kugel ist die Wirkung der umgebenden Flüssigkeit vollständig äquivalent mit einer Vergrösserung der Masse der Kugel um die Hälfte der verdrängten Flüssigkeitsmasse. Für andere Körperformen gelten andere Relationen, auch können in gewissen Fällen Drehungsmomente zustande kommen. Sogar ein Hohlraum in einer idealen Flüssigkeit besitzt demnach eine scheinbare Masse, was in einer der zahlreichen Theorien über die Natur der Atome dahin verwertet wurde, dass dieselben als Löcher im Äther aufgefasst wurden.

Angesichts dieser ganz ausser Zweifel stehenden Resultate der theoretischen Hydrodynamik würde es also scheinen, dass auch die suspendierten Körperchen, welche die Brown'sche Wimmelbewegung ausführen, sich so bewegen müssten als ob ihre Masse vermehrt wäre. Das Äquipartitionsgesetz von Maxwell muss natürlich in jedem Falle aufrecht erhalten ~~werden~~ bleiben, ~~aber es würde daraus in Folge Vergrösserung des Molekulargewichtes eine geringere Molekulargeschwindigkeit resultieren, und zwar im Falle kugelförmiger Körper vom Volumen~~ ω

$$\cancel{C' = \sqrt{\frac{2\alpha\theta}{M+\frac{1}{2}\omega\rho}}}$$

aber nun würde ~~[illegible]~~ ausser der kinetischen Energie des bewegten Teilchens auch noch die kinetische Energie der damit verbundenen Flüssigkeitsbewegung in Rechnung zu stellen sein; ~~was eben mit~~ dies ist gleichbedeutend mit jener Vermehrung der Masse, somit würde die Anwesenheit der Flüssigkeit im Falle eines kugelförmigen Teilchens vom Volumen ω ~~und würde somit~~ eine Verkleinerung der Molekulargeschwindigkeit hervorrufen:

$$C' = \sqrt{\frac{2\alpha\theta}{M+\frac{1}{2}\omega\rho}}$$

Es sind das durchaus keine geringfügigen Änderungen, denn im Falle der von Perrin, Dombrowski, Chaudesaigues verwendeten Mastix- und Gummigutt-Emulsionen würde die aus dieser Formel folgende Geschwindigkeit C' nur beiläufig 0·82 des nach der früheren Formel berechneten Wertes betragen.

§ 3. Was von ~~[illegible]~~ derartigen mikroskopisch sichtbaren Teilchen der Emulsionen gesagt wurde, müsste wohl auch für eigentliche kolloidale Lösungen (Eiweiss, Gummi u. dgl.) gelten. Ob sich dieselbe Überlegung auch auf krystalloide Lösungen anwenden lässt, in welcher die Moleküle des

gelösten Substanz und des Lösungsmittels von gleicher Grössenordnung sind, erscheint allerdings etwas zweifelhaft, da in diesem Falle das Lösungsmittel nicht mehr als homogenes Medium aufgefasst werden darf. Andererseits könnte man darauf hinweisen, dass z.B. bei Berechnung der Grössenordnung der elektrolytischen Ionen aus dem Reibungswiderstande derselben die Flüssigkeit mit Erfolg als homogenes Medium behandelt wird.

§4. Nun scheint sich aber auf dem Gebiete krystalloider Lösungen eine einfache experimentelle Controlle darzubieten; wahrscheinlich wird ein jeder Chemiker sofort einwenden, dass ja die bekannten kryoskopischen, ebullioskopischen u. dgl. Methoden für gelöste Stoffe das richtige chemische Molekulargewicht ergeben und durchaus keine Vergrösserung des Molekulargewichtes ~~durch die~~ infolge Einflusses des Lösungsmittels erkennen lassen. Das wäre jedoch eine oberflächliche Argumentation.

Sämmtliche zur Bestimmung des Molekulargewichts gelöster Stoffe verwendeten Methoden beruhen nämlich indirekt auf den Gesetzen des osmotischen Druckes, und sie werden richtige Werte geben, gleichgiltig ~~es bleibt sich da ganz gleich~~ ob man die Hypothese der „scheinbaren" Masse einführt oder nicht. Die Anzahl der Grammmoleküle wird ja hiedurch nicht geändert, denn sie hängt mit ~~ergibt sich aus~~ der in die Lösung eingeführten Masse der Substanz zusammen, nicht aber mit der in Lösung befindlichen (eventuell scheinbar vermehrten) Masse.

Auch gibt das Gesetz: $p = \frac{1}{3} n M C^2$

natürlich keinen Anhalt zur Entscheidung, da infolge des Äquipartitionssatzes

auf jeden Fall $MC^2 = M'C'^2 = 2\kappa\theta$ sein muss.

Auf diesem Gebiete versagen somit die Methoden unmittelbarer experimenteller Entscheidung, und merkwürdigerweise verhält es sich gerade so auch mit den Folgerungen, welche man aus Beobachtung der Brown'schen Bewegung ~~wie der unter Einfluss der Schwere sich einstellenden Verteilung von Emulsionsteilchen~~ ziehen kann.

Ob man sich beispielsweise der von Einstein angewendeten, auf den Begriff des osmotischen Druckes beruhenden, oder der von mir angewendeten direkten Berechnungsmethode bedient, auf jeden Fall erhält man dieselben Endformeln für die Verschiebung der Teilchen, für die unter Einfluss der Schwere sich einstellende Verteilung derselben, sowie für den Diffusionscoeffizienten, unabhängig davon ob man eine scheinbare Masse annimmt oder nicht,

also können wir aus diesen Erscheinungen keinen experimentellen Aufschluss betreffs dieser ~~hier aufgeworfenen~~ Frage ableiten.

§ 5. Die praktische ~~Wichtigkeit~~ Bedeutung jener Frage ist dadurch sehr verringert, aber für die Theorie ist es ~~höchst~~ desto wichtiger zu wissen ob die Molekulargeschwindigkeit, zu deren direkter Messung uns derzeit kein Weg offen steht, nach Formel (1) oder Formel (2) zu berechnen ist. Man muss da also zu rein theoretischen Überlegungen Zuflucht nehmen.

Diese führen meiner Ansicht nach doch zu dem Schlusse, dass die im Obigen dargelegte Hypothese einer scheinbaren Masse unberechtigt ist und dass die bisherigen Theorien, mit Beibehalt der Formel (1), giltig sind. Denn das Maxwell'sche Äquipartitionsgesetz spezifisiert gar nicht näher die Art der mechanischen Systeme, auf welche es sich bezieht, und muss ebenso auf ein von Gas umgebenes Teilchen wie auf ein von Flüssigkeitsmolekülen anwendbar sein. In jedem Falle sollte die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung dieselbe sein der kinetischen Energie eines Gasmoleküls von gleicher Temperatur.

Wenn es also homogene Flüssigkeiten gäbe, von der Art wie sie die Hydrodynamik voraussetzt, welche an den suspendierten Teilchen dicht anliegen würden, so wäre eine jede, beliebig kleine Verschiebung der letzteren notwendigerweise mit einer entsprechenden Flüssigkeitsströmung verbunden und der entsprechenden kinetischen Energie müsste man tatsächlich durch Berücksichtigung der scheinbaren Masse Rechnung tragen.

In Wirklichkeit jedoch besteht eine gewisse Bewegungsfreiheit für die Relativbewegung des suspendierten Teilchens und der umgebenden Flüssigkeitsmoleküle; die Schwerpunkts-Coordinaten derselben sind kinematisch unabhängige Veränderliche, daher kommt im Äquipartitionsgesetz nur die wirkliche Masse des Teilchens in Betracht.

Daraus folgt nachstehende, recht paradoxal klingende Behauptung: Stellen wir uns dieselbe Substanz bei einer gewissen Temperatur in zwei verschiedenen Lösungsmitteln gelöst vor, und zwar bestehe das eine aus einer wirklichen, molekular zusammengesetzten, das andere aus einer homogenen idealen Flüssigkeit. Dann haben die gelösten Moleküle in der ersten Lösung eine von der Natur des Lösungsmittels unabhängige, aus Formel (1) folgende Molekulargeschwindigkeit, wogegen die Geschwindigkeit derselben in der zweiten Lösung geringer sein wird und von der Dichte

das Lösungsmittel nach Formel (2) abhängen wird. ~~Sonst könnte man~~ Man würde wohl von vornherein glauben, dass eine molekular zusammengesetzte Flüssigkeit durch fortgesetzte Verkleinerung der Moleküle und Vergrösserung ~~der~~ ihrer Geschwindigkeiten ~~derselben in~~ einer ~~idealen~~ homogenen Flüssigkeit gleich gemacht werden könnte. Dagegen sieht man dass hier ein ganz fundamentaler Unterschied zu Tage tritt. Das Äquipartitionsgesetz gibt ja bekanntlich auch zu anderen Paradoxen Anlass, indem z.B. kugelförmige Gasmoleküle in Bezug auf das Verhältnis der spezifischen Wärmen $k = 1\tfrac{2}{3}$, ~~dagegen ellipsoidale $k = 1\tfrac{2}{5}$ oder $k = 1\tfrac{1}{3}$ besitzen müssen~~ nicht als Grenzfall ellipsoidaler Moleküle aufgefasst werden können, da diese ein $k = 1\tfrac{2}{5}$ oder $k = 1\tfrac{1}{3}$ aufweisen müssen, aber in solchen Fällen kann man den Grundsatz „natura non facit saltus" noch durch Betrachtung der stufenweisen Änderung der Relaxationsgeschwindigkeit retten. Im obigen Falle tritt dagegen das Paradoxale noch krasser hervor.

I A 15

82/53

Über ein Paradoxon
in der
kinetischen Theorie
der
Lösungen

(czy to drukowane
było)?

6

XXI

Untersuchungen über

elast. Stoß von Cylindern

(zdaje się, że błędne próby)"

Bestimmung der Constanten des u:

u wird am größten in der Mitte also $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ für $y=0$

also $\frac{c_3}{\mu x}=0 \Big|$ für alle t also $c_3=0$

$p=\sqrt{\mu c_2}\sqrt{\log c_4-2\log x}$ wird $=p_0$ für $x=R$

$p_0=\sqrt{\mu c_2}\sqrt{\log c_4-2\log R}$ $\qquad \frac{p_0^2}{\mu c_2}=\log c_4-2\log R$ $\qquad \log c_4=2\log R+\frac{p_0^2}{\mu c_2}$

$$p=\sqrt{\mu c_2}\sqrt{\frac{p_0^2}{\mu c_2}+2\log\frac{R}{x}}$$

$$=\sqrt{p_0^2+2\mu c_2\log\frac{R}{x}}=\sqrt{p_0^2-2\mu c_2\log\frac{x}{R}}$$

für $x=0$ wird p von höherer als jeder endlicher Ordnung $=\infty$

also $px\big|_{x=0}=\infty$

u ist $=0$ für alle Punkte der Axe also für $x=0$ und beliebige y, t

und für $y=a$ und beliebige x $\quad 0=\frac{c_2a^2}{2px}+l_1 \quad l_1=-\frac{c_2a^2}{2px}$

$0=0+l_1 \quad \Big\| \quad l_1=0$ für $x=0$ und beliebige y und t

$$u=\frac{c_2y^2}{2px}+l_1=\frac{c_2(y^2-a^2)}{2px}$$

$$cxp=\int_0^a u\,dy+x\int_0^a\frac{\partial u}{\partial x}dy+ax\frac{\partial p}{\partial t}$$

$a=\frac{\Theta-t}{c}$ also für gleichförmige Bewegung

$$cApx=\int_0^a u\,dy+x\int_0^a\frac{\partial u}{\partial x}dy+aAx\frac{\partial p}{\partial t}$$

$$cApx-\int_0^{\frac{\Theta-t}{c}}\left\{\frac{c_2y^2}{2px}+l_1+x\left\{-\frac{c_2y^2}{2}\frac{1}{p^2x^2}\frac{\partial(px)}{\partial x}\right\}\right\}dy=aA\frac{\partial(px)}{\partial t}$$

$$Acpx-\frac{\Theta-t}{c}l_1-\frac{c_2\left(\frac{\Theta-t}{c}\right)^3}{6px}\left[1+\frac{1}{px}\frac{\partial(px)}{\partial x}\right]=aA\frac{\partial(px)}{\partial t}=-aA\frac{\partial(pux)}{\partial x}$$

$$=-aAu\frac{\partial(px)}{\partial x}-aApx\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$=-aA\left\{\frac{c_2y^2}{2px}\frac{\partial(px)}{\partial x}+l_1\frac{\partial(px)}{\partial x}-px\frac{c_2y^2}{2p^2x^2}\frac{\partial(px)}{\partial x}\right\}$$

$$=-aAl_1\frac{\partial(px)}{\partial x} \quad !$$

$$\frac{\partial(px)}{\partial t}=-l_1\frac{\partial(px)}{\partial x}$$

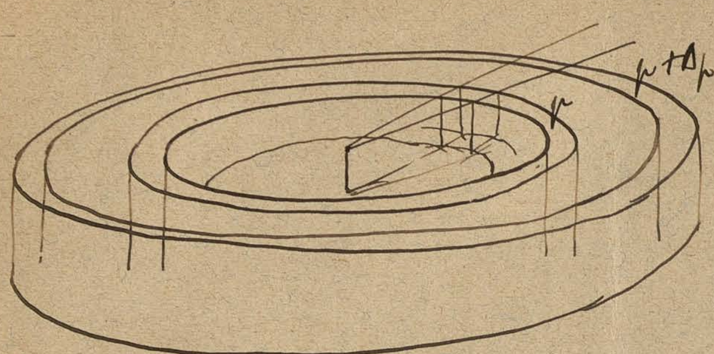
$$\frac{\partial(px)}{\partial t}=-l_1p-l_1x\frac{\partial p}{\partial x}=-l_1p+l_1\mu x\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$$

$$=-l_1p+\frac{l_1\mu c_2}{p}$$

$$\frac{c_2\left(\frac{\Theta-t}{c}\right)^3}{6px}\left[1+\frac{1}{px}\frac{\partial(px)}{\partial x}\right]=Acpx-\frac{\Theta-t}{c}l_1+aAl_1\frac{\partial(px)}{\partial x}$$

$$c_2=\frac{6px}{\left(\frac{\Theta-t}{c}\right)^3}\;\frac{Acpx-\frac{\Theta-t}{c}l_1+aAl_1\frac{\partial(px)}{\partial x}}{1+\frac{1}{px}\frac{\partial(px)}{\partial x}}=\frac{p^2}{\mu\log\frac{c_4}{x^2}}$$

[illegible]



$-V\,dp = P\,dV$ $\quad P = \frac{c}{V}$

$x\,\delta_1 = (x+\Delta x)(\delta_1+\Delta\delta_1)$

$= x_1\delta_1 + \Delta x\,\delta_1 + x\,\Delta\delta_1$

$\delta_1\,\Delta x = -x\,\Delta\delta_1$

$x : \delta_1 = \Delta x : -\Delta\delta_1$

$x : x+\Delta x = \delta : \delta - \Delta\delta_1$

$\frac{\partial p\vartheta}{\partial x} = -\mu\,\frac{\partial^2(ux)}{\partial y^2}$

$V : V' = p' : p$ $\quad V = \cancel{\Delta\varphi}\, x\,\delta$

$= x\delta : x'\delta'$

$= f : f'$

$\Delta A = \Delta\varphi\,(x'-x)\,\delta\,\Delta y\cdot p$

$\cancel{\ } + \Delta\varphi\; x\; \cancel{\ }(\delta'-\delta)\,\Delta y\, p$

$= \Delta\varphi\,\Delta y\, p\,(x'\delta + x\delta 2 - 2\delta x)$

$\cancel{x\delta} + \Delta x\,\delta + \cancel{x\delta} - \frac{x\Delta p}{p}\delta - \Delta x\,\delta - 2\delta x$

$\delta' = \frac{p\,x\,\delta}{p'\,x'}$

$= \frac{\cancel{px}\,\delta}{(\cancel{p}+\frac{\Delta p}{p})(\cancel{x}+\frac{\Delta x}{x})}$

$= \cancel{px}\,\delta\left[1 - \frac{\Delta p}{p} - \frac{\Delta x}{x}\right]$

$= \cancel{2\Delta x\delta} + x\,\frac{\Delta p}{p}\,\delta$

$= \cancel{\Delta x\,\delta\,[2\delta}$

$\frac{\Delta A}{\Delta x} = \delta x\left[\cancel{\ } + \frac{1}{p}\frac{\Delta p}{\Delta x}\right]$

$\Delta A = \mu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,\Delta x$

$\frac{1}{p}\,\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu\,\frac{\partial u}{\partial y^2}$

I). Vorübung: auf das eine Ende eines elastischen Stabes beginne ein constanter Druck p zu wirken; Bewegung?

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad u = f(x+\omega t) + \varphi(x-\omega t)$$

$$\varphi(x-\omega t) = \varphi[-a-(\omega t - x - a)] = f(-a+\omega t-x-a) = f(\omega t - x - 2a)$$

$$x=a \quad A\frac{\partial u}{\partial x} = p \qquad\qquad x=-a \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$t=0 \quad \left.\begin{array}{l} u=0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}=0 \end{array}\right\} -a<x<+a.$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)+\varphi(x)=0 \\ f'(x)-\varphi'(x)=0 \end{array}\right\}.$$

$$f(x)-\varphi(x)=0$$

$$f(x)=\varphi(x)=0 \qquad -a<x<+a$$

$$\begin{cases} f'(a+\omega t)+\varphi'(a-\omega t) = \frac{p}{A} \\ f'(-a+\omega t)+\varphi'(-a-\omega t)=0 \end{cases}$$

$$f(a+\omega t)-\varphi(a-\omega t) = \frac{pt}{A\omega}+c_1 \quad \theta?$$

$$f(-a+\omega t)-\varphi(-a-\omega t) = +c_2 = 0 \quad ?$$

$$f(-a+\omega t) = \varphi(-a-\omega t)$$

$$\varphi(a-\omega t) = \varphi[-a-(\omega t-2a)] = f(-a+\omega t-2a) = f(-3a+\omega t)$$

$$\underbrace{f(a+\omega t)}_{=\xi}-\underbrace{f(-3a+\omega t)}_{=\xi} = \frac{pt}{A\omega}+\text{const}$$

$$\begin{cases} f(\xi) = f(\xi-4a)+\frac{p(\xi-a)}{A\omega^2}+\text{const} \\ f(\xi) = f(\xi+4a)-\frac{p(\xi+3a)}{A\omega^2}-\text{const} \end{cases}$$

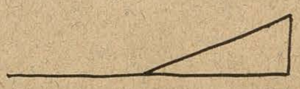
$$f(x+a) = \underbrace{f(x-3a)}_{=0}+\frac{px}{A\omega^2}$$

$$u = \underbrace{f(x+\omega t)}_{<a}+f(\underbrace{\omega t-x-2a}_{>-3a}).$$

1). $t=0 \quad u=0$

2). $t=\frac{a}{\omega} \quad u = f(x+a)+f(-x-a)$

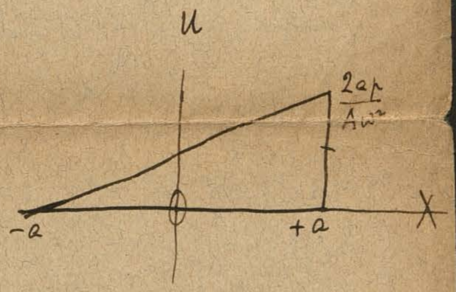
$x>0$: $u=\frac{px}{A\omega^2}$ | $x<0$: $u=0$



3). $t=\frac{2a}{\omega} \quad u = f(x+2a)+f(-x)$

$x>0$: $u=\frac{p(x+a)}{A\omega^2}$ | $x<0$: $u=\frac{p(x+a)}{A\omega^2}$

$$f(x+2a) = \underbrace{f(x-2a)}_{=0}+\frac{p(x+a)}{A\omega^2}$$

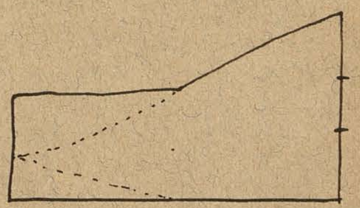


4). $t=\frac{3a}{\omega} \quad u = f(x+3a)+f(-x+a)$

$x>0$: $u=\frac{p(x+2a)}{A\omega^2}$ | $x<0$: $u=\frac{2ap}{A\omega^2}$

$$f(x+3a) = f(x-a)+\frac{p(x+2a)}{A\omega^2}$$

$$f(-x+a) = f(-x-3a)+\frac{p(-x)}{A\omega^2} = \underbrace{f(-x-3a)}_{=0}-\frac{px}{A\omega^2}$$

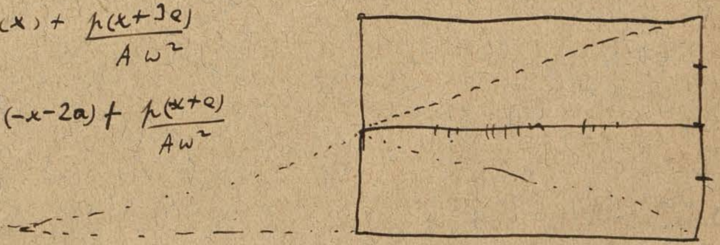


5). $t=\frac{4a}{\omega} \quad u = f(x+4a)+f(-x+2a)$

$x>0$: $u=\frac{4pa}{A\omega^2}$ | $x<0$: $u=\frac{4pa}{A\omega^2}$

$$f(x+4a) = f(x)+\frac{p(x+3a)}{A\omega^2}$$

$$f(-x+2a) = f(-x-2a)+\frac{p(x+a)}{A\omega^2}$$



also Punkt $\{x=+a$ bewegt sich mit der constanten Geschwindigkeit:

$$\frac{du}{dt} = \frac{ap}{A\omega^2}\frac{\omega}{a} = \underbrace{\frac{p}{A\omega}}$$ innerhalb der ersten Schwingung; dann innerhalb der zweiten doppelt so schnell etc.;

II Wenn also nach der Zeit θ wieder der Druck aufhört, so kann dies aufgefasst werden als Superposition eines dem früheren gleichen entgegengesetzten Druckes; auch die Wirkungen superponiren sich; also Geschwindigkeit von Punkt $x=a$

$$\frac{du}{dt} = \frac{p}{A\omega}$$ in den Zeiten $0-\theta$; $\frac{4a}{\omega}-\frac{4a}{\omega}+\theta$; $\frac{8a}{\omega}-\frac{8a}{\omega}+\theta$; etc. sonst $=0$.

III). Wenn also auf das Stabende ein variabler Druck $p = f(t)$ wirkt, so kann man diesen in ∞ viele ∞ kurz dauernde Drücke zerlegen, deren jeder nach II. wirkt.

Folglich wird: Geschwindigkeit des Punktes $\{x = +a$ im Momente t:

$$\frac{du}{dt} = f(t) + f\Big(t - \underbrace{\frac{4a}{\omega}}_{h}\Big) + f\Big(t - \frac{8a}{\omega}\Big) + \cdots \qquad + \text{Indizen}$$

$$= f(t)$$
$$+ f(t) + \Big(\overset{h}{\frac{4a}{\omega}}\Big) f'(t) + \frac{h^2}{1.2} f''(t) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(t) + \cdots$$
$$+ f(t) + (2h) f'(t) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(t) + \frac{(2h)^3}{3!} f'''(t) + \cdots$$
$$+ f(t) + (3h) f'(t) + \frac{(3h)^2}{2!} f''(t) + \frac{(3h)^3}{3!} f'''(t) + \cdots$$
$$+ f(t) + (4h) f'(t) + \frac{(4h)^2}{2!} f''(t) + \frac{(4h)^3}{3!} f'''(t) + \cdots$$
$$+ \cdots$$

$$= (n+1) f(t) + h \sum_1^n (\alpha) \cdot f'(t) + h^2 \frac{\sum_1^n (\alpha^2)}{2!} f''(t) + h^3 \frac{\sum_1^n (\alpha^3)}{3!} f'''(t) + \cdots$$

IV). Ein Stab ~~[illegible]~~ in Luft mit ~~[illegible]~~ kreisförmigen Endflächen bekommt im Zeitpunkte $t=0$ die Geschwindigkeiten c_1 ~~und c~~ in der Richtung ~~ihrer~~ der Achse ~~und Verbindungslinien~~ senkrecht auf eine fixe Wand

Anfangsentfernung der Flächen $= \varepsilon$

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{B}{\alpha^3} \frac{d\alpha}{dt} \qquad m_1 \frac{dx_1}{dt} = -\frac{B}{2\alpha^2} + \text{const}$$

$$m_1 c_1 = -\frac{B}{2\varepsilon^2} + \text{const}$$

$$m_1 \frac{dX_1}{dt} = -\frac{B}{2\alpha^2} + \frac{B}{2\varepsilon^2} + m_1 c_1$$

Innerhalb der ersten Schwingungsdauer:

$$v = c - \frac{1}{A\omega} \frac{v}{\alpha^3} \cdot B \qquad v = -\frac{d\alpha}{dt}$$

$$-\frac{d\alpha}{dt} = c - \frac{B}{A\omega} \frac{d\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{2\,dt}$$

$$-\alpha = ct - \frac{B}{2A\omega} \frac{1}{\alpha^2} + \text{const}$$

$$\alpha = \text{const} - ct + \frac{B}{2A\omega} \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\varepsilon = \text{const} + \frac{B}{2A\omega} \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$v \left[1 + \frac{B}{A\omega \alpha^3}\right] = c$$

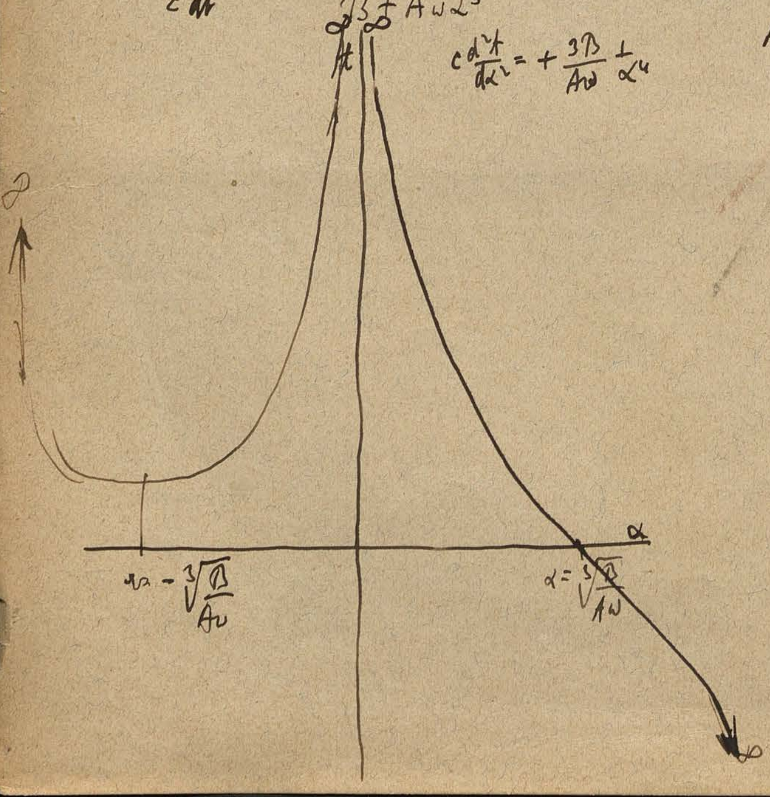
$$c \frac{d\alpha}{dt} = \frac{A\omega\alpha^3}{B + A\omega\alpha^3}$$

$$ct = \text{const} - \alpha + \frac{B}{2A\omega} \frac{1}{\alpha^2}$$

$$c \frac{dt}{d\alpha} = -1 - \frac{B}{A\omega} \frac{1}{\alpha^3} = 0$$

$$c \frac{d^2 t}{d\alpha^2} = +\frac{3B}{A\omega} \frac{1}{\alpha^4}$$

$$A\omega\alpha^3 = -B$$
$$\alpha = -\sqrt[3]{\frac{B}{A\omega}}$$



also, falls die Schwingung des Stabes nicht reflectirt würde, würde die Endfläche desselben sich asymptotisch $/^{t=\infty}$ an der andere ~~Wand~~ Fläche annähern;
in Wirklichkeit muss nach einer gewissen Zeit die reflectirte Schw. zurückkommen.

$$+ \frac{\partial p}{\partial p}$$

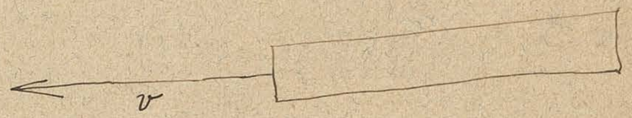
$$\alpha = x - \frac{ct - C}{3}$$

$$\alpha^3 + (ct - C)\alpha^2 = \frac{B}{2A\omega}$$

$$x^3 - x^2(ct-C) + \frac{x(ct-C)^2}{3} - \frac{(ct-C)^3}{27}$$

$$+ x^2(ct-C) - \frac{2}{3}x(ct-C)^2 + \frac{(ct-C)^3}{9} = \frac{B}{2A\omega}$$

$$x^3 - \frac{x}{3}(ct-C)^2 + \frac{2(ct-C)^3}{27} = \frac{B}{2A\omega}$$



$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{}}$$

falsch?!

$$\cancel{v = c - \frac{1}{A\omega}\frac{(c-v)}{\alpha^3}B \quad v = \frac{d\alpha}{dt}}$$

Innerhalb der zweiten Schwingungsdauer:

$$v = c - \frac{B}{A\omega}\frac{v}{\alpha^3} - \underbrace{\frac{B}{A\omega}\frac{v_{t-\tau}}{\alpha^3_{t-\tau}}}_{= c - v_{t-\tau}}$$

$$\cancel{\alpha = (\mathrm{const} - ct)\alpha^2 + \frac{B}{2A\omega}}$$

$$\alpha^3 = (\mathrm{const} - ct)\,\alpha^2 + \frac{B}{2A\omega}$$

$$+\frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha^2} = (ct - \mathrm{const} + \alpha)$$

$$\alpha^2 = \frac{B}{2A\omega(ct - \mathrm{const} + \alpha)}$$

$$\alpha^3 = \frac{(\mathrm{const} - ct)B}{2A\omega(ct - \mathrm{const} + \alpha)} + \frac{B}{2A\omega}$$

$$= \frac{B}{2A\omega}\left[1 + \frac{1}{-1 + \frac{\alpha}{\mathrm{const} - ct}}\right]$$

$$\alpha^3 = \frac{B}{2A\omega}\frac{\alpha}{ct + \alpha - \mathrm{const}}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)_{t-\tau} = \frac{1}{\alpha^2} - \tau\frac{d\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{dt} + \frac{\tau^2}{2}\frac{d^2\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{dt^2} - -$$

$$c\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\frac{B}{2}\frac{\alpha}{ct + \alpha - \mathrm{const}}}{B + \frac{B}{2}\frac{\alpha}{}} = \frac{\alpha}{2ct + 2\alpha - 2\mathrm{const} + \alpha}$$

$$= \frac{\alpha}{2(ct - \mathrm{const}) + 3\alpha}$$

$$\alpha_0^3 = (\mathrm{const} - ct)\alpha_0^2 + \frac{B}{2A\omega}$$

$$(\alpha_0 + \Delta)^3 = (\mathrm{const} - ct + c\tau)(\alpha_0 + \Delta)^2 + \frac{B}{2A\omega}$$

$$-3\alpha_0^2\Delta + 3\alpha_0\Delta^2 - \Delta^3 = (\mathrm{const} - ct + c\tau)(-2\alpha_0\Delta + \Delta^2) + c\tau\alpha_0^2$$

$$-\frac{d\alpha}{dt} = c + \frac{B}{A\omega}\frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\alpha^3} + \frac{B}{A\omega}\left(\frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\alpha^3}\right)_{t-\tau} = c - \frac{B}{2A\omega}\frac{d\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{dt} - \frac{B}{2A\omega}\underbrace{\left(\frac{d\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{dt}\right)_{t-\tau}}$$

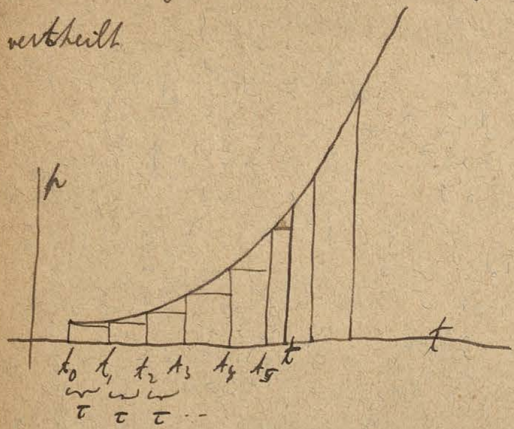
$$= \frac{d\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{dt} - \tau\frac{d^2\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{dt^2} + \frac{\tau^2}{2}\frac{d^3\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{dt^3} + -$$

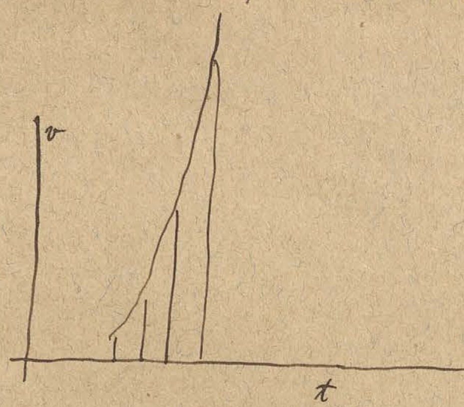
$$-\alpha = ct - \frac{B}{2A\omega}\left\{\frac{1}{\alpha^2} + \underbrace{\frac{1}{\alpha^2} - \tau\frac{d\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{dt} + \frac{\tau^2}{2}\frac{d^2\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{dt^2} - + - -}_{\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)_{t-\tau}}\right\}$$

$$= ct - \frac{B}{2A\omega}\left[\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)_{t-\tau} + \frac{1}{\alpha^2}\right]$$

$$\alpha = \mathrm{const} - ct + \frac{B}{2A\omega}\left[\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)_{t-\tau} + \frac{1}{\alpha^2}\right]$$

Ad III: Angenäherte Berechnung: wenn man sich die plötzlichen Geschwindigkeits-Zuwächse continuirlich vertheilt





$\frac{v}{t} = p_0 + p_1 + p_2 + \ldots$

$v_t \cdot \tau = p_0\tau + p_1\tau + p_2\tau + \ldots < \left(F = \int_{t_0}^{t} p\,dt\right)$

$< p_1\tau + p_2\tau + \ldots + p\Delta$

angenähert: $v_t = \frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t} p\,dt$

$$v = C - \frac{B}{A\omega}\frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t}\frac{v}{\alpha^3}\,dt$$

$$-\frac{d\alpha}{dt} = C + \frac{B}{A\omega\tau}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\alpha^3}\frac{d\alpha}{dt}\,dt$$

$$= C + \frac{B}{A\omega\tau}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\alpha^3}$$

$$= C - \frac{B}{A\omega\tau}\frac{1}{2\alpha^2} + const$$ also ähnlich wie wenn Kraft im Schwerpunkt angreifen würde.

Innerhalb der dritten Schwingungsdauer:

$$v = C - \frac{B}{A\omega}\frac{v}{\alpha^3} - \frac{B}{A\omega}\left(\frac{v}{\alpha^3}\right)_{t-\tau} - \ldots\left(\quad\right)_{t-2\tau}$$

$$\alpha = const - ct + \frac{B}{2A\omega}\left[\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)_{t-2\tau} + \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)_{t-\tau} + \frac{1}{\alpha^2}\right]$$

Innerhalb der vierten Schwingungsdauer:

$$v = C - \frac{B}{A\omega}\frac{v}{\alpha^3} - \frac{B}{A\omega}\left(\frac{v}{\alpha^3}\right)_{t-\tau} - \frac{B}{A\omega}\left(\frac{v}{\alpha^3}\right)_{t-2\tau} - \frac{B}{A\omega}\left(\frac{v}{\alpha^3}\right)_{t-3\tau}$$

$$\alpha = const - ct + \frac{B}{2A\omega}\Big[\frac{1}{\alpha^2} + \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)_{t-\tau} + \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)_{t-2\tau} + \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)_{t-3\tau}}_{= \alpha_{t-\tau} - const + c(t-\tau)}\Big]$$

$$\alpha = \underbrace{\alpha_{t-\tau} - c\tau} + \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha^2}$$

$\alpha - \alpha_{t-\tau} = \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha^2} - c\tau$ ~~wenn Geschwindigkeit wieder negativ werden soll, so muss dies für einen Moment ≥ 0 sein~~ braucht nicht dasselbe zu sein!

Solange der Stab sich in der Richtung der Geschwindigkeit c bewegt, wird die linke Seite < 0, also auch $c\tau > \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha^2}$ also auch $\alpha > \sqrt{\frac{B}{2A\omega c\tau}}$

Wenn er sich entgegengesetzt bewegen soll so muss dass $\alpha < \sqrt{\quad}$ sein.

Also, falls eine Geschwindigkeitsumkehr stattfindet, ist die Grenze

$$(\alpha)_M = \sqrt{\frac{B}{2A\omega c\tau}}$$

$$\sum A_n \cos\alpha_n t \cos\beta_n x + \sum A'_n \cos\alpha'_n t \cos\beta'_n(\lambda+\lambda'-x) = w$$

$$\int_0^{\lambda} \cos\beta_m y \left(\sum A_n \cos\beta_n y + \sum A'_n \cos\beta'_n(\lambda+\lambda'-y) \right) = \int_0^{\lambda} \cos\beta_m y \; f(y) \cos\beta_m y$$

$$A_n \int_0^{\lambda} \cos^2\beta_n y \, dy = \quad = A_n \int_0^{\lambda} \frac{1+\cos 2\beta_n y}{2} dy = A_n \frac{\lambda}{2}$$

$$\alpha = c\beta$$

$$\beta = \frac{n\pi}{\lambda+\lambda'} \qquad \alpha = \frac{n}{2\pi}$$

$$\frac{n\pi}{\lambda+\lambda'} =$$

$$\cancel{\sum_1^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi c t}{a} \cos\frac{n\pi x}{a} \frac{n^2\pi^2 c^2}{a^2}} + \sum A'_n \cos\frac{n\pi c' t}{a} \cos\frac{n\pi x}{a} \frac{n^2\pi^2 c'^2}{a^2} =$$

$$= c^2 \left\{ \cancel{\sum_1^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi c t}{a} \cos\frac{n\pi x}{a} \frac{n^2\pi^2}{a^2}} + \sum_1^{\infty} A'_n \cos\frac{n\pi c' t}{a} \cos\frac{n\pi x}{a} \frac{n^2\pi^2}{a^2} \right\}$$

$$w = \sum_1^{\infty} \cos\frac{n\pi x}{a} \left(A_n \cos\frac{n\pi c t}{a} + A'_n \cos\frac{n\pi c' t}{a} \right) \qquad \frac{n\pi c}{a} t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

$$t = \frac{a}{2nc}, \frac{3a}{2nc}, \dots$$

[illegible]

$u = A_1 \cos\alpha_1 t \cos\beta_1 x + A_2 \cos\alpha_2 t \cos\beta_2 x + A_3 \cos\alpha_3 t \cos\beta_3 x + \cdots$

$u' = A_1' \cos\alpha_1' t \cos\beta_1'(\lambda+\lambda'-x) + A_2' \cos\alpha_2' t \cos\beta_2'(\lambda+\lambda'-x) + \cdots$

$A' = A \frac{\cos\beta x}{\cos\beta\lambda'}$

$u = A_1 U_1 \cos\alpha_1 t + A_2 U_2 \cos\alpha_2 t + \cdots = \sum A_n U_n \cos\alpha_n t + C_n$

$u' = A_1 U_1' \cos\alpha_1 t + A_2 U_2' \cos\alpha_2 t + \cdots = \sum A_n U_n' \cos\alpha_n t$

$t = 0$:

$\left.\begin{matrix} u = f(x) \\ \frac{du}{dt} = F(x) \end{matrix}\right\} 0 < x < x_1$ $\qquad$ $\left.\begin{matrix} u = \varphi(x) \\ \frac{du'}{dt} = \Phi(x) \end{matrix}\right\} x_1 < x < l$

$f(x) = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \cdots$ $\qquad \varrho\, U_n\, dx$ $\qquad F(x) = A_1 \frac{\partial U_1}{\partial t} + \cdots$

$\varphi(x) = A_1 U_1' + A_2 U_2' + \cdots$ $\qquad \varrho'\, U_n\, dx$ $\qquad \Phi(x) = A_1 \frac{\partial U_1'}{\partial t} + \cdots$

$$E\varrho \int_0^{x_1} U_n f(x)\, dx + \frac{E'}{}\varrho' \int_{x_1}^{l} U_n' \varphi(x)\, dx = A_n \left[\frac{E}{\varrho}\int_0^{x_1} (U_n)^2\, dx + \varrho' \frac{E'}{}\int_{x_1}^{l} (U_n')^2\, dx\right]$$

$\varrho \int_0^{x_1} U$

Aus Verdrängungsfall

$$A c p x = \int_0^a \frac{\partial}{\partial x}(u x)\, dy + a A x \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\int_0^a u x\, dy + a A x \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$A c p x = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^a u x\, dy + a A \underbrace{\frac{\partial (p x)}{\partial t}}_{=0}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{x}\frac{\partial (p u x)}{\partial x} = 0 \qquad p u x = \frac{c_2 (y^2 - a^2)}{2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad !!!$$

$$p = \mathrm{const}_{(t)} \; !!! \quad ?$$

also c_2 und $c_4 = \mathrm{const}(x, y, t)$

also

$$A c p x = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^a \frac{c_2 (y^2 - a^2)}{2p}\, dy$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{c_2}{2p}\int_0^a (y^2 - a^2)\, dy\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{c_2}{2p}\left(\frac{a^3}{3} - a^3\right)\right\} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c_2 a^3}{3p}\right) = + \frac{c_2 a^3}{3}\frac{1}{p^2}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$p \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\mu c_2}{x}$$

$$A c p x = -\frac{\mu c_2^2 a^3}{3}\frac{1}{p^3 x}$$

$$3 A c p^4 x^2 = -\mu c_2^2 a^3 = 3 A c \mu^2 c_2^2 x^2 \left(\log \frac{c_4}{x^2}\right)^2$$

$$e^{\frac{p^2 - p_0^2}{\mu c_2}} = \frac{R^2}{x^2}$$

$$x^2 = R^2 e^{\frac{p_0^2 - p^2}{\mu c_2}}$$

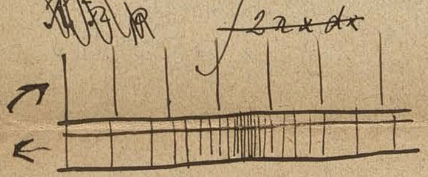
$$2 x\, dx = R^2 d(\uparrow)$$

für: $p_0^2 = \mu c_2 \log \frac{c_4}{R^2}$

$$p^2 = \mu c_2 \log \frac{c_4}{x^2}$$

$$\underline{\underline{p^2 = p_0^2 + \mu c_2 \log \frac{R^2}{x^2}}}$$

Zur Bestimmung von c_2:



$$R^2 \pi . \rho_0 . c = \int_0^R 2 p x\, dx . \rho . c = \int_0^a \pi x\, u\, dy$$

$$= \cancel{\quad = 2 A \pi c \int_0^R \sqrt{\mu c_2}\, x \sqrt{\log \frac{c_4}{x^2}}\, dx}$$

$$\cancel{\quad} = 2 c A \int_0^R p x\, dx = \int_0^a \frac{c_2 (y^2 - a^2)}{2 (p)_R}\, dy = \frac{c_2 a^3}{3 (p)_R} = \frac{c_2 a^3}{3 p_0} = \cancel{\quad}$$

$$= \frac{R^2}{2} A c \int_0^{p_0} p\, d\left\{e^{\frac{p_0^2 - p^2}{\mu c_2}}\right\} = A R^2 c \left\{ p\, e^{\frac{p_0^2 - p^2}{\mu c_2}}\Big|_0^{p_0} - \int_0^{p_0} e^{\frac{p_0^2 - p^2}{\mu c_2}}\, dp \right\} = A R^2 c \left\{ p_0 - \int_0^{p_0} e^{\frac{p_0^2 - p^2}{\mu c_2}}\, dp \right\}$$

$$= A R^2 c \left\{ p_0 - e^{\frac{p_0^2}{\mu c_2}} \int_0^{p_0} e^{\frac{-p^2}{\mu c_2}}\, dp \right\}$$

~~Nach obiger Gleichung wäre:~~

ganzer Druck $= P = 2\pi \int_0^R p x\, dx$

$$= \frac{\pi}{A c}\frac{c_2 a^3}{3 p_0} = \frac{\pi c_2 a^3}{3 c \rho_0}$$

Annäherung: $v = 0$

$\frac{\partial v}{\partial y} = 0$

13

$u = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 \qquad a = \mathrm{fc}(x,t)$

$p = \mathrm{fc}(x,t) = b_0 - 2\mu \int a_2\, dx$

I) $\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

II) $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$

III) $\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{x}\frac{\partial (p u x)}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial III}{\partial y}: \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial p}{\partial y} u x + p\frac{\partial u x}{\partial y}\right\} = 0$

$p\frac{\partial (u x)}{\partial y} = p x \frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{const}_x = \mathrm{fc}(y,t)$

$= C_1$

$u = \int \frac{c_1}{p x}\, dy + \mathrm{fc}(x,t)$

$= \frac{1}{p x}\int c_1\, dy + \underbrace{\mathrm{fc}(x,t)}$

$u = \frac{1}{p x}\int c_1\, dy + e_1$

$\frac{\partial c_1}{\partial y} = \cancel{\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial (p x)}{\partial y}} + p x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$= -\frac{1}{\mu} p x \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{-x}{2\mu}\frac{\partial (p^2)}{\partial x}$

$\frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} = 0$

$\frac{\partial c_1}{\partial y} = \mathrm{fc}(x,t) = c_2$

$c_1 = c_2 y + c_3 \quad \| c_2, c_3 = \mathrm{fc}(x,t)$

weil c_1 aber blos $\mathrm{fc}(y,t)$ ist und y beliebig so ist c_2 und c_3 blos $\mathrm{fc}(t)$ also:

$c_1 = c_2 y + c_3 \qquad c_2, c_3 = \mathrm{fc}(t)$

$u = \frac{1}{p x}\left\{\frac{c_2 y^2}{2} + c_3 y\right\} + e_1$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{p x}\{c_2 y + c_3\}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{c_2}{p x}$

$-\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\mu c_2}{p x} = \frac{\partial p}{\partial x}$

$-\mu c_2 \frac{dx}{x} = p\, dp$

$c - \mu c_2 \log x = \frac{p^2}{2}$

$p^2 = \mathrm{const} - 2\mu c_2 \log x$

$= 2\mu c_2 \underbrace{\left\{\frac{\mathrm{const}}{\mu c_2} - \log x\right\}}_{-\log \mathrm{const}' x}$

$= -\mu c_2 \log \mathrm{const}'' x^2$

$p^2 = \mu c_2 \log \frac{c_4}{x^2} \qquad c_2, c_4 = \mathrm{fc}(t)$ wird $= \infty$ für $x = 0$; bei obiger Annahme selbstverständlich

$\cancel{\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{p x^2}\left\{\frac{c_2 y^2}{2} + c_3 y\right\} + \frac{\partial e_1}{\partial x} - \frac{1}{p^2 x}}$

$\frac{\partial c}{\partial x} = 0 = \frac{\partial (p x)}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + p x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \cancel{\frac{\partial (p x)}{\partial x}\frac{c_2 y + c_3}{p x} + \frac{p x}{\partial (x)}\frac{\partial}{\partial x}}$

$\cancel{\frac{\partial (p x)}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\frac{\partial u}{\partial y}}}$

$\log p x$

$$\frac{d(\alpha+2u_1)}{dt} = -\frac{B}{2}\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\frac{1}{\alpha^2}+c_2-c_1$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}+2\frac{d^2u_1}{dt^2} = -\frac{B}{2}\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\frac{d(\frac{1}{\alpha^2})}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}+2\omega^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=l_1} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}A_1\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l_1}$$

$$\cancel{\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d^2x_2}{dt^2}-\frac{d^2x_1}{dt^2}-\frac{d^2u}{dt^2}\Big|_{l_1}-\frac{d^2u_2}{dt^2}\Big|_{l_2}}$$

$$=$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}A_1\left[f'(l_1+\omega t)+f'(-3l_1+\omega t)\right]-2\omega^2\left[f''(l_1+\omega t)+f''(-3l_1+\omega t)\right]$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\frac{A_1}{\omega}\left[f(l_1+\omega t)+f(-3l_1+\omega t)\right]-2\omega\left[f'(l_1+\omega t)+f(-3l_1+\omega t)\right]+c_2-c_1$$

$$\alpha = \frac{m_1 m_2}{}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\lg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right\} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\frac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2} = +\frac{1}{2}\frac{2}{1-x^2} = +\frac{1}{1-x^2}$$

$$-1+\frac{1}{1-x^2} = +\frac{x^2}{1-x^2}$$

$$\lg\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x+1}\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{1-x^2}$$

$$A_1 \left\{ f'(l_1+\omega t) + \varphi(l_1-\omega t) \right\} = -\frac{B_1}{2} \frac{d\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{dt}$$ $$f'(-l_1+\omega t) + \varphi'(-l_1-\omega t) = 0$$

$$A_1 \int \Big\{ \qquad \Big\} dt = -\frac{B_1}{2} \frac{1}{\alpha^2}$$

$$A_1 \left\{ \frac{f(l_1+\omega t)}{\omega} - \frac{\varphi(l_1-\omega t)}{\omega} \right\} = -\frac{B_1 \omega}{2\alpha^2} + \text{const}$$ $$f(-l_1+\omega t) - \varphi(-l_1-\omega t) = \text{const}$$

$$= \cancel{\frac{m_2+m_1}{m_2 m_1}}$$ $$f(-l_1+\omega t) = \varphi(-l_1-\omega t)$$

$$= \text{const} + \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \left\{ \frac{d(\alpha+u_1+u_2)}{dt} + c_1 - c_2 \right\}$$

$$A_1 \Big\{$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_1 = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_2$$

$$f'(l_1+\omega t) + \varphi(l_1-\omega t) = F'(l_2+\omega t) + \Phi(l_2-\omega t)$$

$$f'(l_1+\omega t) + f'(-3l_1+\omega t) = F'(l_2+\omega t) + F'(-3l_2+\omega t)$$

$$\underbrace{f(l_1+\omega t) + f(-3l_1+\omega t)}_{u_1} = \underbrace{F(l_2+\omega t) + F(-3l_2+\omega t) + \phi}_{u_2}$$

$$u_1 = u_2 \;!\;?$$

$$\frac{d(\alpha+2u_1)}{dt} = -\frac{B(m_1+m_2)}{2m_1 m_2}\frac{1}{\alpha^2} + c_2 - c_1$$

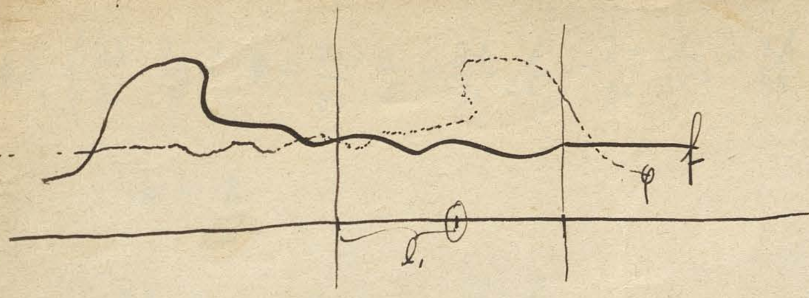
$$= \frac{(m_1+m_2)}{m_1 m_2} \frac{A_1}{\omega} \left[f(l_1+\omega t) - f(-3l_1+\omega t) \right] + c_2 - c_1$$

$$\alpha + 2u_1 = \frac{A_1}{\omega} \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}$$

$$\sqrt{\frac{B_1 \omega}{2A_1} \frac{1}{f(\omega t-3l_1) - f(\omega t+l_1)}} + 2\left\{ f(l_1+\omega t) + f(-3l_1+\omega t) \right\} = \frac{A_1}{\omega} \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} \int \left[f(l_1+\omega t) - f(-3l_1+\omega t) \right] dt + c_2 - c_1$$

$$f(\omega t+l_1) = x \qquad \int f(\omega t+l_1)\, dt = \int x$$

$$x' = \omega\, dt\, f'(\omega t+l_1)$$



$$u_1 = f(l_1+wt) + \varphi(l_1 - wt)$$

$$\varphi(l_1-wt) = \varphi[-l_1 - \{wt - 2l_1\}]$$
$$= f\{-l_1 + wt - 2l_1\}$$
$$= f(l_1+wt) + f(-3l_1+wt)$$

15

$$\varphi(l_1 - wt) = \varphi(-l_1 - \{wt - 2l_1\}) = f(-l_1 + wt - 2l_1) = f(-3l_1 + wt)$$

$$A_1\{f(l_1+wt) - f(-3l_1+wt)\} = -\frac{B_1 w}{2\alpha_t^2} + \cancel{\dots}$$

$$u_1 = f(l_1+wt) + f_1(-3l_1+wt)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{+\frac{B_1 w}{A_1^2}\left[f(wt-3l_1) - f(wt+l_1)\right]}}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{+1}{2}\sqrt{\frac{B_1 w}{2A_1}}\;\frac{w\left[\overbrace{f'(wt-3l_1)}^{\varphi'(l_1-wt)} - f(wt+l_1)\right]}{[\qquad]^{\frac{3}{2}}} = \alpha$$

$$p = \frac{du}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{p}{Aw}$$

$$u_1 = a_1 + \frac{b_1}{t} + \frac{c_1}{t^2} \qquad a_1 = M_1 x + N_1 \qquad a_2 = M_1' x + N_1'$$

$$b_1 = M_2 x + N_2 \qquad —$$

$$u_2 = a_2 + \frac{b_2}{t} + \frac{c_2}{t^2} \qquad c_1 = M_3 x + N_3 \qquad — — —$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=-l_1} = 0 \qquad M_1 + \frac{M_2}{t} + \frac{M_3}{t^2} = 0$$

$$M_1' + \frac{M_2'}{t} + \frac{M_3'}{t^2} = 0$$

A_1

$$A_1 \left\{ \frac{\partial b_1}{\partial x} \log t - \frac{\partial c_1}{\partial x} \frac{1}{t} - \frac{\partial d_1}{\partial x} \frac{1}{2t^2} - \frac{\partial e_1}{\partial x} \frac{1}{3t^3} - \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{1}{4t^4} - \right\}$$

$$= - \frac{B}{2\alpha^2}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} - \left\{ \frac{b_1 + b_2}{t^2} + 2 \frac{c_1 + c_2}{t^3} + 3 \frac{d_1 + d_2}{t^4} + \cdots \right\} =$$

$$= c_2 - c_1 + \frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2} A_1 \left\{ \frac{\partial b_1}{\partial x} \log t + - \frac{\partial c_1}{\partial x} \frac{1}{t} - \frac{\partial d_1}{\partial x} \frac{1}{2t^2} - \cdots \right\}$$

$b = l_1$

$$\frac{d^2(\alpha+u_1+u_2)}{dt^2} = -\frac{B(m_1+m_2)}{2m_1m_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) = -\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}A_1\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=l_1}$$

$$d\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) = -\frac{2A_1}{B_1}\,dt\,\underbrace{\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|^{x=l_1}}_{\substack{=\text{const}_x\\ =\text{variable}_t\\ =\varphi(t)}}$$

$$\frac{1}{\alpha^2} = -\frac{2A_1}{B_1}\int\varphi(t)\,dt$$

$$d\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) = -\frac{2A_1}{B_1}\varphi(t)\,dt$$

$$\alpha = \left[-\frac{B_1}{2A_1}\frac{1}{\int\varphi(t)\,dt}\right]^{+\frac{1}{2}} = \sqrt{-\frac{B_1}{2A_1}}\frac{1}{\sqrt{\int\varphi(t)\,dt}}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{B_1}{2A_1}}\frac{\varphi(t)}{\left[\int\varphi(t)\,dt\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\alpha}{2}\frac{\varphi(t)}{\int\varphi(t)\,dt}$$

$$\alpha+u_1+u_2 = -\frac{B}{2}\frac{m_2+m_1}{m_1m_2}\int\frac{dt}{\alpha^2} + (c_2-c_1)t + \text{const}$$

$$\sqrt{\frac{-B_1}{2A_1\int\varphi(t)\,dt}} + u_1+u_2 = +\frac{B}{2}\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2}\int\left[+\frac{2A_1}{B_1}\int\varphi(t)\,dt\right]dt + (c_2-c_1)t + \text{const}$$

$$\alpha+u_1+u_2 = \frac{m_1+m_2}{m_1m_2}A_1\int dt\int\varphi(t)\,dt + (c_2-c_1)t + \text{const}$$

$$= \frac{m_1+m_2}{m_1m_2}A_1\int dt\int\left.\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\right|_{x=l_1}dt + \cdots$$

2D:

$$\alpha_t = \sqrt{\frac{B}{2Awc\tau}} \qquad \alpha_{t-\tau} = \alpha - \frac{B}{2Aw}\frac{1}{\alpha^2} + c\tau$$

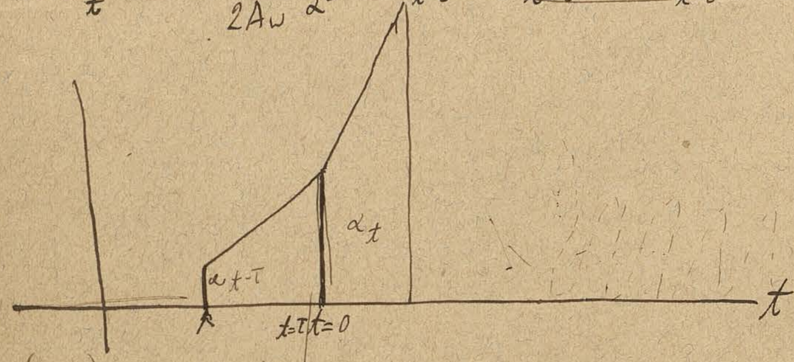
$$= \sqrt{} - \cancel{\frac{B}{2Aw}\frac{2Awc\tau}{B} + c\tau}$$

$$\alpha_{t-\tau} = \text{const}_{t-\tau} - c\tau + \frac{B}{2Aw}\frac{1}{\alpha^2_{t-\tau}} + \alpha_{t-2\tau} - \text{const}_{t-2\tau}$$

$$\alpha_t = \text{const}_t - c\tau + \frac{B}{2Aw}\frac{1}{\alpha^2} + \alpha_{t-\tau} - \text{const}_{t-\tau} \quad \Bigg\|_{t=0}$$

$$\cancel{\alpha_{t=0} = 2\alpha_{t-\tau}}$$

$$\cancel{\text{const}_t - c\tau + \frac{B}{2Aw}\frac{1}{\alpha^2} + \alpha_{t-\tau} - \text{const}_{t-\tau} = \text{const}_{t-\tau} - c\tau + \frac{B}{2Aw}\frac{1}{\alpha^2_{t-\tau}} + \alpha_{t-2\tau} - \text{const}_{t-2\tau}}$$



$$\left(\alpha_{t-\tau}\right)_{t=\tau} = \left(\alpha_t\right)_{t=0}$$

$$\text{const}_{t-\tau} - \cancel{c\tau} + \cancel{\frac{B}{2Aw}\left(\frac{1}{\alpha^2_{t-\tau}}\right)_{t=\tau}} + \cancel{\left(\alpha_{t-2\tau}\right)_{t=\tau}} - \text{const}_{t-2\tau} = \text{const}_t - \cancel{c\tau} + \cancel{\frac{B}{2Aw}\left(\frac{1}{\alpha^2_t}\right)_{t=0}} + \cancel{\left(\alpha_{t-\tau}\right)_{t=0}} - \text{const}_{t-\tau}$$

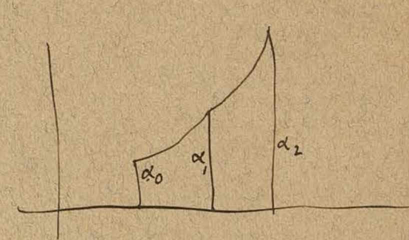
$$\text{const}_t = 2\,\text{const}_{t-\tau} - \text{const}_{t-2\tau}$$

Zum Beispiel.

I

$$\alpha = \text{const} - ct + \frac{B}{2Aw}\frac{1}{\alpha^2} \qquad \text{const}_{I} = \alpha_0 - \frac{B}{2Aw}\frac{1}{\alpha_0^2}$$

$$\alpha_0 = \text{const} + \frac{B}{2A}\frac{1}{\alpha_0^2} \qquad \alpha_1 = \text{const}_I - c\tau + \frac{B}{2Aw}\frac{1}{\alpha_1^2}$$



II

$$\alpha = \text{const}_{II} - ct + \frac{B}{2Aw}\left[\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)_{t-\tau} + \frac{1}{\alpha^2}\right]$$

$$\alpha_1 = \text{const}_{II} - c\tau + \frac{B}{2Aw}\left[\left(\frac{1}{\alpha_0^2}\right) + \frac{1}{\alpha_1^2}\right] =$$

$$\alpha_1 = \text{const}_{II} - c\tau + \alpha_0 - \text{const}_I + \frac{B}{2Aw}\frac{1}{\alpha_1^2}$$

$$\alpha_1 = -c\tau + \alpha_0 + \frac{B}{2Aw}\left[\frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{1}{\alpha_0^2}\right]$$

$$\text{const}\, II + \frac{B}{2Aw}\frac{1}{\alpha_0^2} = \text{const}_I$$

$$= \text{const}\, II - c\tau + \frac{B}{2Aw}\left[\frac{1}{\alpha_0^2} + \frac{1}{\alpha_1^2}\right]$$

$$\text{const}\, II = \alpha_0 - 2\frac{B}{2Aw}\frac{1}{\alpha_0^2} \qquad \text{const}\, II = \alpha_0 - 2\frac{B}{2Aw}\frac{1}{\alpha_0^2}$$

III

$$\alpha = \text{const}_{III} - ct + \frac{B}{2Aw}\left[\frac{1}{\alpha^2}\right] + \alpha_{t-\tau} - \text{const}_{II} \qquad \alpha_2 = \text{const}\, II - 2c\tau + \frac{B}{2Aw}\left[\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2}\right]$$

$$\alpha_2 = \text{const}_{III} - c\tau + \frac{B}{2Aw}\frac{1}{\alpha_2^2} + \alpha_1 - \text{const}\, II = \text{const}\, II - 2c\tau + \frac{B}{2Aw}\left[\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2}\right]$$

$$\text{const}\, III = 2\,\text{const}\, II - c\tau + \underbrace{\frac{B}{2Aw}\frac{1}{\alpha_1^2} - \alpha_1}_{c\tau - \text{const}\, I - \frac{B}{2Aw}\frac{1}{\alpha_0^2}}$$

$$= \text{const}\, II - \frac{B}{2Aw}\frac{1}{\alpha_0^2}$$

Also folgende Bewegung

Schwingungsdauer:

I $\qquad \alpha = const_{I} - ct + \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha^2} \qquad const_{I} = \alpha_0 + \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha_0^2}$

II $\qquad \alpha = const_{II} - c\tau + \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha^2} + \alpha_{t-\tau} - const_{I} \qquad const_{II} = const_{I} - \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha_0^2}$

$$\alpha = \alpha_{t-\tau} - c\tau + \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha^2} - \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha_0^2}$$

III $\qquad \alpha = const_{III} - c\tau + \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha^2} + \alpha_{t-\tau} - const_{II} \qquad const_{III} = const_{II} - \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha_0^2}$

$$\alpha = \alpha_{t-\tau} - c\tau + \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha^2} - \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha_0^2}$$

Ao.

$$\alpha_t - \alpha_{t-\tau} = \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha_t^2} - \frac{B}{2A\omega}\frac{1}{\alpha_0^2} - c\tau$$

Solange sich der Stab in der Richtung der Geschwindigkeit c bewegt, wird die linke Seite < 0, also

$$\cancel{\frac{B}{2A\omega}}\frac{1}{\alpha_t^2} < \cancel{\frac{B}{2A\omega}}\frac{1}{\alpha_0^2} + c\tau\cdot\frac{2A\omega}{B}$$

$$\text{also } \alpha_t > \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_0^2} + \frac{2A\omega}{B}\cdot c\tau}}$$

Wenn ~~[illegible]~~ das $\alpha_t < \sqrt{}$ wird so kann er sich nicht mehr in dieser Richtung bewegen

Allgemein $\qquad \frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t-\tau} - \frac{B}{A\omega}\frac{1}{\alpha^3}\frac{d\alpha}{dt}$

$$v_t = v_{t-\tau} - \frac{B}{A\omega}\frac{1}{\alpha^3}v_t$$

$$v_t = \frac{v_{t-\tau}}{1 + \frac{B}{A\omega}\frac{1}{\alpha^3}}$$

III s IV :

v_1	v_2		
6.7	26.4	7.0	24.5
11.6	52.6	15.2	47.6
28.7	101.5	32.2	92.1
45.0	148.0	49.6	137.3

IXV ↑ 6 z

6.7	26.7	10	20
13.3	55.3	20	40
26.7	106.7	40	80
42.1	162.1	60	120

Korth / L K

6.6	25.2	7.0	24.5
14.1	48.3	15.2	47.6
31.0	96.3	32.2	92.1
47.0	142.0	49.6	137.3

matt / blank

Correction t. n.M.

18

$$y = \frac{a_1}{b_1} \operatorname{ctg} x \frac{l_1}{a_1} + \frac{a_2}{b_2} \operatorname{ctg} x \frac{l_2}{a_2}$$

$$y = \frac{x}{c} \qquad x = v_2$$

Vermechlarung

$$v_1 = \frac{m_1 V_1^0 + m_2 V_2^0}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 (V_1^0 - V_2^0)}{m_1 + m_2} \cos v_0 t$$

$$v_2 = \frac{m_1 V_1^0 + m_2 V_2^0}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 (V_1^0 - V_2^0)}{m_1 + m_2} \cos v_0 t$$

$$v_0 = \sqrt{c\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)} \qquad \frac{n}{v_0} = e^{r} \cdot C_0$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -A_0 \sin v_0 t \quad / 436$$

[illegible]

I s II :

V_1^0	20	40	80	120
V_1	1.7	2.4	2.8	3.0
V_2	18.1	38.0	76.8	117.0

2

Voigt: Wied. Ann. 19, p. 43 1883
52

Boltz. Wien Ber. 84, p. 1225 1881

Hausmaninger " 88 768 1883

8 [illegible] ; 20-40cm [illegible]

$2\frac{1}{3}$ m[illegible]

$L_{I} = L_{II} = 30$ cm; $L_{III} = 20$ cm, $L_{IV} = 40$ cm

V^0_{I}	$V_{1\,I}$	$V_{2\,II}$	I	I	III
20	0·3	19·7	20	4·2	23·2
40	0·5	39·2	40	8·4	46·2
80	1·1	78·8	80	18·0	91·6
120	1·6	117·9	160·4	37·6	183·6
160	2·3	156·8			

III	III	I
20	−3·2	15·9
40	−6·8	31·2
80	−12·0	61·4
160·8	−22·0	122·0

$m_{I} = 226·0\,g$

$m_{II} = 151·4\,g$

$m_{III} = 226·1\,g$

$m_{IV} = 302·5\,g$

III	III	IV
20	-6·0	13·0
40	-11·4	25·8
80·4	-20·8	50·4
160·8	-35·4	98·0

Próby mechanicznego wytłumaczenia

przewodnictwa cieplnego w

ciałach stałych

(zima 1911/12)

(bez skutku)

Za czas $t=0$ wszystkie $y_k=0$

$y'_k=0$ tylko $y'_0=1$

$$\dot y_k = J_{2k}(2ct) \qquad y_{k+1}-2y_k+y_{k-1} = \int_0^t dt\,(J_{2k+2}-2J_{2k}+J_{2k-2}) = 2\int_0^t dt\,(J'_{2k+1}-J'_{2k-1})$$

$$= \frac{1}{c}(J_{2k+1}-J_{2k-1})$$

$$\ddot y_k = 2c\,J'_{2k} \qquad = \frac{2}{c}J'_{2k}$$

$$y_k = \int_0^t J_{2k}\,dt$$

Np. $k=0$: $= 2\int(J_2-J_0)\,dt$ $\underbrace{}_{-2J'_1}$ $= \frac{4}{c}J_1$

$$\ddot y_0 = 2c\,J'_0 = -2c\,J_1$$

$$\ddot y_k = \frac{c^2}{\cancel{h}}(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})$$

$$V = \alpha\sum_{-\infty}^{+\infty}(y_{k+1}-y_k)^2 \qquad m\ddot y_k = -2\alpha\left[(-y_k+y_{k+1})+y_k-y_{k-1}\right]$$

$$T = \frac{m}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\dot y_k^2 \qquad = \cancel{2\alpha\ y_k\ 1}$$

$$= 2\alpha\left[y_{k-1}-2y_k+y_{k+1}\right]$$

$$\ddot y_k = \frac{2\alpha}{m}\left[y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}\right] \qquad \boxed{c^2=\frac{2\alpha}{m}}$$

$$V = \alpha\sum\Big[\int_0^t\underbrace{(J_{2k+2}-J_{2k})\,dt}_{=2J'_{2k+1}}\Big]^2 = \frac{\alpha}{c^2}\sum(J_{2k+1})^2 = \frac{\alpha}{c^2}\sum_{-\infty}^{+\infty}J_{2k}^2 = \frac{m}{2}\sum\dot y^2 = T$$

Energja potencj. nerwu od $-k$ do $+k$

$$V_{-k}^{k} = \alpha\sum\left[(y_{-k-1}-y_{-k})^2+(y_{-k}-y_{-k+1})^2+\cdots(y_k-y_{k+1})^2\right]$$

$$= \frac{\alpha}{c^2}\sum\left[J_{-2k-1}^2+J_{-2k+1}^2+\cdots J_{-1}^2+J_{+1}^2+\cdots J_{2k-1}^2+J_{2k+1}^2\right]$$

Energja kinet. nerwu od $-k$ do $+k$

$$T_{-k}^{k} = \frac{m}{2}\left[J_{-2k}^2+\cdots\cdots+J_{2k}^2\right] \qquad \left[J_\nu(z)\right]^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi J_{2\nu}(2z\sin\theta)\,d\theta$$

zatem całkowita energja nerwu od $-k$ do $+k$

$$E_{-k}^{k} = \frac{m}{2}\sum_{\nu=-2k-1}^{2k+1}J_\nu^2 = \frac{m}{2\pi}\int_0^\pi\sum J_{2\nu}(2z\sin\theta)\,.\,d\theta$$

$$= \frac{m}{2\pi}\int_0^\pi\left[J_{4k+2}+J_{4k}+\cdots J_{-4k-2}\right]d\theta$$

Maksymalne zmiany w $\frac{\partial E}{\partial t} = -2mc \, J_{2k+2} J_{2k+1}(2ct)$

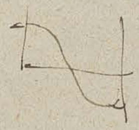
Dla małych $(2ct)$: $\quad J_{2k+2} J_{2k+1} \neq z^{4k+3}$

Dla bardzo dużych z

$$\neq \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{4k+3}{4}\pi\right) \cos\left(z - \frac{4k+3}{4}\pi\right)}$$

$$= \frac{1}{\pi z} \sin\left(2z - \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi z} \cos 2z$$

więc muszą być maksym. wahania pośrodku



przeciętna wartość podczas jednego wahania:

$$\frac{1}{\pi} \int_{z=k\pi}^{(k+\frac{1}{2})\pi} \frac{1}{\pi z} \cos 2z \, dz = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{k\pi+\varphi} - \frac{1}{k\pi+\pi-\varphi}\right] \cos\varphi \, d\varphi$$

$$\frac{\cancel{k\pi}+\pi-\varphi-\cancel{k\pi}-\varphi}{(k\pi)^2}$$

$$= \frac{1}{k^2\pi^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2\varphi) \cos\varphi \, d\varphi = \frac{1}{k^2\pi^4}\left(\pi - \frac{\pi}{2} + 1\right) = \frac{\frac{\pi}{2}+1}{k^2\pi^4}$$

$$\int \varphi \cos\varphi \, d\varphi = +\sin\varphi \cdot \varphi - \int \sin\varphi \, d\varphi$$

$$= \cos\varphi + \varphi \sin\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = -\frac{2mc}{(ct)^2} \sim \underline{\underline{\frac{1}{t^2}}}\,!$$

$$E_{-k}^{+k} = \frac{m}{2\pi^2}\int_0^{\pi} d\theta \sum_{-(2k+1)}^{2k+1} \int_0^{\pi} \cos(x \sin\omega - 2\nu\omega)\, d\omega$$

$$= \frac{m}{2\pi^2}\int d\theta \int \cos(x\sin\omega)\, d\omega \sum_{-(2k+1)}^{2k+1} \cos 2\nu\omega + \sin(x\sin\omega)\sum \sin 2\nu\omega$$

$$e^{-(4k+2)i\omega} + e^{-4ki\omega} + \dots + 1 + \dots e^{4ki\omega} + e^{(4k+2)i\omega} = \quad = \sum \cos(2\nu\omega) + i\sum \sin(2\nu\omega)$$

$$= e^{-(4k+2)i\omega}\Big[\underbrace{1 + e^{2i\omega} + \dots \quad e^{(8k+4)i\omega}}_{\frac{1-(e^{2i\omega})^{4k+3}}{1-e^{2i\omega}}}\Big] \quad {}^{``}(e^{2i\omega})^{4k+2}$$

$$= \frac{e^{-(4k+2)i\omega} - e^{(4k+4)i\omega}}{1-e^{2i\omega}} = \frac{e^{-(4k+3)i\omega} - e^{(4k+3)i\omega}}{e^{-i\omega}-e^{i\omega}}$$

$$= \frac{\sin(4k+3)\omega}{\sin\omega}$$

$$E = \frac{m}{2\pi^2}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\omega\, \frac{\cos(x\sin\omega)\,\sin(4k+3)\omega}{\sin\omega} \qquad x = 2z\sin\theta$$

$$= 4ct\sin\theta$$

$$\frac{\partial E|_k^k}{\partial t} = -\frac{2mc}{\pi^2}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_0^{\pi} d\omega\, \underbrace{\sin(x\sin\omega)\,\sin(\overbrace{4k+3}^{\equiv\mu})\omega}_{\frac{1}{2}[\cos(x\sin\omega-\mu\omega)-\cos(x\sin\omega+\mu\omega)]}$$

$$= -\frac{mc}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\, [J_\mu - J_{-\mu}] = -\frac{2mc}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\, J_{4k+3}(4ct\sin\theta)$$

$$4ct\sin\theta = u$$

$$4ct\cos\theta\, d\theta = du \qquad d\theta = \frac{du}{4ct\sqrt{1-\left(\frac{u}{4ct}\right)^2}} = \frac{du}{\sqrt{(4ct)^2-u^2}}$$

$$\alpha = 4ct$$
$$\alpha\theta = u$$

$$= -\frac{m}{\pi t}\int_0^{4ct}\frac{u\, du}{\sqrt{(4ct)^2-u^2}} J_{4k+3}(u) = -\frac{2mc}{\pi}\int_0^1 \frac{u\,du}{\sqrt{1-u^2}} J_{4k+3}(\alpha u)$$

dla bardzo dużych $4ct \gg 4k+3$ (tzn. także)

$n = 2k+2 \qquad z = 2ct$

$$\int \sin\theta\, d\theta\, J_{..} \neq \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\, \sqrt{\frac{2}{\pi\, 4ct\sin\theta}}\,\sin\!\left(4ct\sin\theta - \frac{4k+3}{4}\pi\right)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\, J_{2n-1}(2z\sin\theta) = J_n J_{n-1}(z)$$

$$\frac{\partial E_k^k}{\partial t} = -2mc\, J_{2k+2} J_{2k+1}(2ct)$$

23e

$$y e^{2ix} = \alpha$$

$$\Sigma \quad \alpha + \alpha^3 + \alpha^5 \dots = \frac{\alpha}{1-\alpha^2} = \frac{y e^{2ix}}{1 - y^2 e^{4ix}} = \cancel{y e^{2ix} (1+y^2 e \dots)}$$

$$= \frac{y(\cos 2x + i \sin 2x)}{[1 - y^2 \cos 4x - i y^2 \sin 4x][1 - y^2 \cos 4x + i y^2 \sin 4x]}$$

$$= \frac{y \cos 2x (1 - y^2 \cos 4x) - y^3 \sin 2x \sin 4x + i \{ y \sin 2x (1 - y^2 \cos 4x) + y^3 \sin 4x \cos 2x \}}{(1 - y^2 \cos 4x)^2 + y^4 \sin^2 4x}$$

$$\sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} y^n \sin 2nx = \frac{y \sin 2x + y^3 (\sin 4x \cos 2x - \cos 4x \sin 2x)}{1 - 2y^2 \cos 4x + y^4}$$

$$= \frac{y(1+y^2) \sin 2x}{1 - 2y^2 \cos 4x + y^4} \qquad \cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi$$

$$= \frac{y(1+y^2) \sin 2x}{(1-y^2)^2 + 4y^2 \sin^2 2x}$$

$$\frac{y(1+y^2)}{1+2y^2+y^4}$$

$$y - y^3 + y^5 - y^3 \dots = \frac{y}{1+y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \Sigma y^n \sin 2nx = \cancel{\dots} + 3y^2 \dots$$

$$= \frac{(1+3y^2) \sin 2x}{1 - 2y^2 \cos 4x + y^4} + \frac{y(1+y^2) \sin 2x [4y \cos 4x - 4y^3]}{[1 - 2y^2 \cos 4x + y^4]^2}$$

$$4.2(1 - \cos 4x)$$
$$+ 2.4.(\cos 4x - 1)$$

$$\Big|_{y=1} = \frac{1}{\sin 2x} - \frac{2 \sin 2x \cdot \cancel{4(\cos 4x \dots)}}{\cancel{4(1 - \cos 4x)^2}}$$

$$2(1 - \cos 4x) = 4 \sin^2 2x$$

$$1 + 3y^2 - 3y^4 - 5y^4 \cos 4x - y^6$$

$$= 0$$

dowody.?

$$1 + 3y^2 - \cancel{2y^2 \cos 4x} - 6y^4 \cos 4x + y^4 + 3y^6$$
$$+ 4(y^2 + y^4) \cos 4x - 4y^4 - 4y^6$$
$$\overline{(1 - 2y^2 \cos 4x + y^4)^2}$$

$$\sum_{1,3\dots}^{\infty} n \sin 2nx = 0$$

$$y \sin 2x + 3y^3 \sin 6x + 5y^5 \sin 10x + \dots = \sin 2x \left\{ \frac{(y + 3y^3)}{1 - 2y^2 \cos 4x + y^4} + \frac{4(y^3 + y^5)(\cos 4x - y^2)}{(1 - 2y^2 \cos 4x + y^4)^2} \right.$$

$$= \cancel{\sin 2x}$$

$$1 + 3y^2 + 2y^2 \cos 4x - 3y^4 - 2y^4 \cos 4x - y^6$$

$$= \sin 2x \cdot \frac{y + 3y^3 + 2y^3 \cos 4x - 3y^5 - 2y^5 \cos 4x - y^7}{(1 - 2y^2 \cos 4x + y^4)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin 2x \left\{ \frac{1 + 9y^2 + 6y^2 \cos 4x - 15y^4 - 10y^4 \cos 4x - 7y^6}{(1 - 2y^2 \cos 4x + y^4)^2} - \frac{2\{y + 3y^3 + 2y^3 \cos 4x - 3y^5 - 2y^5 \cos 4x - y^7\}[-4y \cos 4x + 4y^3]}{[1 \dots]^3} \right.$$

$$y = 1 = \frac{-12 - 4\cos 4x}{4(1 - \cos 4x)^2} \sin 2x = \frac{-16 + 8 \sin^2 2x}{16 \sin^4 2x} \sin 2x$$

Drugie przybliżenie: $J_\nu = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sin\left(x - \frac{2\nu - 1}{4}\pi\right) + \frac{\mu^2}{2x} \cos\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) \right]$

$J'_\nu = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) - \frac{\mu^2}{2x} \sin\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) \right]$

$$\sum_{m=0}^{m}(-1)^m\left[J'_{4mn+2\nu} - J'_{4(m+1)n-2\nu}\right]$$

w pierwszym przybliż...

$$\sum(-1)^m\left[J_{4mn+2\nu} - J_{4mn+4n-2\nu}\right] =$$

$J_0 \; J_1$ — sin cos

$-J_0 \; J_1$

$+J_1 \; J_1$

pierwsze przybliżenie: $J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right)$

$$J'_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) - \sqrt{\frac{1}{2\pi x^3}}\sin\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right)$$

pomijające

$$\underline{J'_{2\nu} - \left(J'_{4n-2\nu} + J'_{4n+2\nu}\right) + \left(J'_{8n-2\nu} + J'_{8n+2\nu}\right) - J'} \quad \left[-J'_{4mn+2\nu}\right.$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\underbrace{\cos\left(x - \frac{4\nu-1}{4}\pi\right)} - \left[\cos\left(x - \frac{8n-4\nu-1}{4}\pi\right) + \cos\left(x - \frac{8n+4\nu-1}{4}\pi\right)\right] + \left[\cos\left(x - \frac{16n-4\nu-1}{4}\pi\right) + \dots\right] - \right]$$

$$\underbrace{\left[\cos\left(x + \frac{4\nu+1}{4}\pi\right) + \cos\left(x - \frac{(4\nu-1)}{4}\pi\right)\right]}$$

$$(-1)^\nu\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad - \quad (-1)^\nu 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad + \quad (-1)^\nu 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= (-1)^\nu\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\left\{1 - 2 + 2 - \dots + (-1)^m 2\right\} = (-1)^{\nu+m}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\underline{-J'_{2\nu-1} + \left(J'_{4n-2\nu-1} - J'_{4n+2\nu+1}\right) + \left(J'_{8n-2\nu+1} - J'_{8n+2\nu-1}\right) + \left(J'_{12n-2\nu-1} - J'_{12n+2\nu+1}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\cos\left(x - \frac{4\nu-3}{4}\pi\right) + \cos\left(x - \frac{8n-4\nu-3}{4}\pi\right) - \cos\left(x - \frac{8n+4\nu+1}{4}\pi\right) + \cos\left(x - \frac{16n-4\nu+1}{4}\pi\right) - \cos\left(x - \frac{16n+4\nu-3}{4}\pi\right)\right.$$

$$-(-1)^\nu\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) + \underbrace{(-1)^\nu\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) - (-1)^\nu\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}_{2(-1)^\nu\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)} \quad \underbrace{+(-1)^\nu\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - (-1)^\nu\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)}_{-2(-1)^\nu\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$= (-1)^\nu\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)\left[-1 + 2 - 2 \dots + (-1)^m 2\right] = (-1)^{\nu+m+1}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = (-1)^{\nu+m}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$J'_{2\nu+1} - \underbrace{J'_{4n-2\nu+1} + J'_{4n+2\nu-1}} - \underbrace{J'_{8n-2\nu-1} + J'_{8n+2\nu+1}} \dots$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\cos\left(x - \frac{4\nu+1}{4}\pi\right) - \cos\left(x - \frac{8n-4\nu+1}{4}\pi\right) + \cos\left(x - \frac{8n+4\nu-3}{4}\pi\right) - \cos\left(x - \frac{16n-4\nu-3}{4}\pi\right) + \cos\left(x - \frac{16n+4\nu+1}{4}\pi\right)\right.$$

$$(-1)^\nu\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - (-1)^\nu\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + (-1)^\nu\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) - (-1)^\nu\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) + (-1)^\nu\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= (-1)^\nu\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left[1 - 2 + 2 \dots\right] = (-1)^{\nu+m}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = (-1)^{\nu+m}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$J'_{2\nu} - (J'_{4n-2\nu} + J'_{4n+2\nu}) + (J'_{8n-2\nu} + J'_{8n+2\nu}) \dots$

$$= (-1)^{\nu+m}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right] \underbrace{+(-1)^{\nu}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2x}\left[\cancel{4} - 32\,\frac{n^2m^2}{2}(-1)^{m+1}\right]}$$

$$= (-1)^{\nu+m}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{8\,n^2m^2}{x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad \begin{matrix} x+(\nu+1)\pi \\ x-\frac{4\nu-4}{4}\pi \end{matrix}$$

$J_{2(\nu+1)} - J$

$$J_{2\nu-2} - J_{2\nu+2} \underbrace{- J_{4n-2\nu-2} + J_{4n-2\nu+2} + J_{4n+2\nu-2} - J_{4n+2\nu+2}} - J_{8n-2\nu} \dots$$

$$(-1)^{\nu+1}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cancel{\sin}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\cancel{4}^2}{2x}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$+(-1)^{\nu}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2x}\left[(4\overset{m}{n}-2\nu-2)^2 + (4\overset{m}{n}+2\nu+2)^2 - (4\overset{m}{n}-2\nu+2)^2 - (4\overset{m}{n}+2\nu-2)^2\right]$$

$$\cancel{(4mn-2\nu)^2} - 4(4mn-2\nu) + \cancel{4} \quad + \cancel{(4mn+2\nu)^2} + 4(4mn+2\nu) + \cancel{4}$$

$$-\left[\cancel{(4mn-2\nu)^2} + 4(4mn-2\nu) + \cancel{4}\right] \quad + 4(4mn+2\nu)$$

$$= 32\nu$$

$$\sum J_{2\nu-2} - J_{2\nu+2} \dots \quad J_{4mn-2\nu} \dots = 32m\nu\,(-1)^{\nu}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2x}$$

$$(-1)^{\nu+m}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\overline{y_0^2}\beta\,(-1)^{\nu}\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi x}}}{2x}\;32m\sum\nu^2 \quad = (-1)^m\,\frac{32\,m\,\nu^3}{3\pi x^2}\,\overline{y_0^2}\beta\,.\,2c\alpha$$

$$x = 2ct \qquad = \cancel{\dots}\;32ct$$

$$2m\nu = 2ct$$

$$J_{2\nu-2} - J_{2\nu+2} = (-1)^{\nu+1}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right] + (-1)^{\nu}\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2x}\left[(2\nu-2)^2 - (2\nu+2)^2\right]$$

$$16\nu$$

$$\overline{y_0^2}\beta\,2c\alpha\,\frac{32}{3\pi}(-1)^{\frac{ct}{\nu}}\frac{\frac{ct}{\nu}\nu^3}{c^2t^2} \qquad \frac{\nu^2}{ct}(-1)^{\frac{ct}{\nu}}$$

$$\sin\left[x+\frac{\pi}{4}+\frac{(4n-2\nu+2)^2}{2x}\right] - \sin\left[x+\frac{\pi}{4}+\frac{(4n-2\nu-2)^2}{2x}\right] + \sin\left[x+\frac{\pi}{4}+\frac{(4n+2\nu-2)^2}{2x}\right] - \sin\left[x+\frac{\pi}{4}+\frac{(4n+2\nu+2)^2}{2x}\right]$$

$$\cos\left[x+\frac{\pi}{4}+\frac{(4n-2\nu)^2}{2x}\right]\sin\frac{(4n-2\nu)4}{x} \qquad -\cos\left[x+\frac{\pi}{4}+\frac{(4n+2\nu)^2}{2x}\right]\sin\left(\frac{4n+2\nu}{x}\right)$$

$$\frac{4n}{x}\left\{\cos\left[x+\frac{\pi}{4}+8\frac{n^2}{x}-8\frac{n\nu}{x}\right] - \cos\left[x+\frac{\pi}{4}+\frac{8n^2}{x}+\frac{8n\nu}{x}\right]\right\} = \frac{4n^2\nu}{x^2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}+\frac{8n^2}{x}\right) \qquad \frac{n^2}{x^2}\frac{\nu^3}{x}m^2$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}+\frac{8n^2}{x}\right)\left[\cancel{\dots}\;\frac{4n}{x} - \cancel{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}+\frac{8n^2}{x}\right)}\right.$$

$$= \frac{4n}{x}\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{8n^2}{x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$J'_{4mn-\nu+1} + J'_{4mn-\nu-1} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2(4mn-\nu)}{x} J_{4mn-\nu}\right]$$

$$J'_{\cdots} + \cdots = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2(4mn+\nu)}{x} J_{4mn+\nu}\right]$$

$$= \frac{2}{\partial x}\left[\frac{8mn}{x}\left(J_{4mn-\nu} - J_{4mn+\nu}\right) \frac{2\nu}{x}\left(J_{4mn-\nu} + J_{4mn+\nu}\right)\right]$$

$$\cancel{J_{\nu-1} - J_{\nu+1} = 2J'_{\nu}}$$

$$\cancel{J_{\nu-3} - J_{\nu-1} = 2J'_{\nu-2}}$$

$$Y_0 = y_0 J_0 + (y_1 + y_{-1}) J_1 + (y_2 + y_{-2}) J_2 + (y_3 + y_{-3}) J_3 + \cdots \quad (y_{n-2} + y_{-n+2}) J_{n-2} + (y_{n-1} + y_{-n+1}) J_{n-1}$$

$$- (y_1 + y_{-1}) J_{2n-1} - (y_2 + y_{-2}) J_{2n-2} - (y_3 + y_{-3}) J_{2n-3} \quad - (y_{n-2} + y_{n+2}) J_{n+2} - (y_{n-1} + y_{-n+1}) J_{n+1}$$

$$- 2 y_0 J_{2n}$$

$$- (y_1 + y_{-1}) J_{2n+1} - (\ \text{"}\ ) J_{2n+2} - (\ \text{"}\ ) J_{2n+3} \quad \cdots \quad - (\ \text{"}\ ) J_{3n-2} - (y \ \cdots\ ) J_{3n-1}$$

$$+ (\quad) J_{4n-1} + (\quad) J_{4n-2} + (\quad) J_{4n-3} \quad + (\quad) J_{3n+2} + (\quad) J_{3n+1}$$

$$+ 2 y_0 J_{4n}$$

$$+ (\quad) J_{4n+1} \cdots$$

$$Y_1 = y_1 J_0 + (y_2 + y_0) J_1 + (y_3 + y_{-1}) J_2 + (y_4 + y_{-2}) J_3 + \cdots \quad + (y_{n-2} + y_{-n+4}) J_{n-3} + (y_{n-1} + y_{-n+3}) J_{n-2} + (\cancel{y_n} + y_{n+2}) J_{n-1}$$

$$+ (-y_{n-1} + y_{-n+1}) J_n$$

$$- (y_0 + y_{-2}) J_{2n-1} - (y_1 + y_{-3}) J_{2n-2} - (y_2 + y_{-4}) J_{2n-3} \quad - (y_{n-4} + y_{-n+2}) J_{n+3} - (y_{n-3} + y_{-n+1}) J_{n+2} - (y_{n-2} + \cancel{y_n}) J_{n+1}$$

$$- 2 y_{-1} J_{2n}$$

$$- (y_0 + y_{-2}) J_{2n+1} - (\ \text{"}\ ) J_{2n+2} - (\ \text{"}\ ) J_{2n+3} \quad \cdots \quad - (\quad) J_{3n-3} - (\quad) J_{3n-2} - (\quad) J_{3n-1}$$

$$- (y_{n-1} - y_{-n+1}) J_{3n}$$

$$(y_2 + y_0) J_{4n-1} + (y_3 + y_{-1}) J_{4n-2} + (y_4 + y_{-2}) J_{4n-3} \quad + (y_{n-2} + y_{-n+4}) J_{3n+3} + (y_{n-1} + y_{-n+3}) J_{3n+2} + (\cancel{y_n} + y_{-n+2}) J_{3n+1}$$

$$+ 2 y_1 J_{4n}$$

$$+ (\ \text{"}\ ) J_{4n+1} + (\quad) J_{4n+2} + \cdots$$

$$Y_1 - Y_0 = y_0 \left[-J_0 + J_1 \,|\, - J_{2n-1} + 2 J_{2n} - J_{2n+1} \,|\, + J_{4n-1} - 2 J_{4n} + J_{4n+1} \,|\, - J_{6n-1} + 2 J_{6n} - J_{6n+1} \cdots \right]$$

$$+ y_1 \left[J_0 - J_1 \,|\, - J_{2n-2} + J_{2n-1} + J_{2n+1} - J_{2n+2} \,|\, - J_{4n-1} + 2 J_{4n} - J_{4n+1} \,|\, - J_{6n-2} + J_{6n-1} + J_{6n+1} - J_{6n+2} \,|\, - J_{8n-1} + 2 J_{8n} - J_{8n+1} \,|\, - \right]$$

$$+ y_{-1} \left[- \cancel{J_1} + J_2 \,|\, + J_{2n-1} - 2 J_{2n} + J_{2n+1} \,|\, + J_{4n-2} - J_{4n-1} - J_{4n+1} + J_{4n+2} \,|\, + J_{6n-1} - 2 J_{6n} + J_{6n+1} \,|\, + J_{8n-2} \cdots \right.$$

$$+y_2\Big[J_1 - J_2 \;\Big|\; -J_{2n-3} + J_{2n-2} + J_{2n+2} - J_{2n+3} \;\Big|\; + J_{4n-2} + J_{4n-1} + J_{4n+1} - J_{4n+2} \;\Big|\; - J_{6n-3} + J_{6n-2} \dots$$

$$+y_{-2}\Big[-J_2 + J_3 + J_{2n-2} + J_{2n-1} - J_{2n+1} + J_{2n+2} \;\Big|\; + J_{4n-3} - J_{4n-2} - J_{4n+2} + J_{4n+3} \;\Big|\; + J_{6n-2} - J_{6n-1} -$$

$$+y_3\Big[J_2 - J_3 - J_{2n-4} + J_{2n-3} + J_{2n+3} - J_{2n+4} \;\Big|\; + J_{4n-3} + J_{4n-2} + J_{4n+2} - J_{4n+3} \;\Big|\; - J_{6n-4} + J_{6n-3}$$

$$+y_{-3}\Big[-J_3 + J_4 + J_{2n-3} - J_{2n-2} - J_{2n+2} + J_{2n+3} + J_{4n-4} - J_{4n-3} - J_{4n+3} + J_{4n+4} \;\Big|\; -$$

wszędzie indeksy podwójne i użyj wzoru $J_{\nu-1} - J_{\nu+1} = 2J'_\nu$

$$\frac{y_1 - y_0}{2} = y_0\Big[J'_1 + J'_{4n-1} - J'_{4n+1} - J'_{8n-1} + J'_{8n+1} + J'_{12n-1} - J'_{12n+1} \dots\Big]$$

$$+y_1\Big[-J'_1 + J'_{4n-3} - J'_{4n+3} + J'_{8n-1} - J'_{8n+1} + J'_{12n-3} - J'_{12n+3} \dots\Big]$$

$$+y_{-1}\Big[J'_3 - J'_{4n-1} + J'_{4n+1} - J'_{8n-3} + J'_{8n+3} - J'_{12n-1} + J'_{12n+1}\Big]$$

$$+y_2\Big[-J'_3 + J'_{4n-5} - J'_{4n+5} + J'_{8n-3} - J'_{8n+3} + \quad - \Big]$$

$$+y_{-2}\Big[J'_5 - J'_{4n-3} + J'_{4n+3} - J'_{8n-5} + J'_{8n+5} - \Big]$$

$$+y_3\Big[-J'_5 + J'_{4n-7} - J'_{4n+7} + J'_{8n-5} - J'_{8n+5} + \quad - \Big]$$

$$J'_0 - 2J'_{4n} + 2J'_{8n} - 2J'_{12n}$$

$$J'_2 - J'_{4n-2} - J'_{4n+2} + J'_{8n-2} + J'_{8n+2}$$

$$J'_4 - J'_{4n-4} - J'_{4n+4} + J'_{8n-4} + J'_{8n+4}$$

$$J'_6 - J'_{4n-6} - J'_{4n+6} + J'_{8n-6} + J'_{8n+6} \dots$$

o ile punkty stosunkowo do n nie ~~[illegible]~~ odległe, a n b. duże, można to wszystko uważać za identyczne z

$$y_0\frac{(y_1 - y_0)}{2} = \overline{y_0^2}\Big[J'_0 - 2J'_{4n} + 2J'_{8n} - 2J'_{12n} \dots\Big]\Big[J'_1 + J'_{4n-1} - J'_{4n+1}$$

suponując od razu: $\overline{y_k^2} = \overline{y_0^2}(1 + \rho k)$

$$= \overline{y_0^2}\Big\{\dots\Big[J'_1 - 2J''_{4n} + 2J''_{8n} - 2J''_{12n} \dots\Big]\Big[J'_0 - 2J'_{4n} + 2J'_{8n} - 2J'_{12n} \dots\Big]$$

$$+2\Big[J''_2 - J''_{4n-2} + J''_{4n+2} - J''_{8n-2} + J''_{8n+2} \dots\Big]\Big[J'_2 - J'_{4n-2} - J'_{4n+2} + J'_{8n-2} + J'_{8n+2} \dots\Big] \quad \cancel{+2\Big[\dots J}$$

Drugie przybliżenie: $J'_\nu = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) - \frac{\nu^2}{2x}\sin\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right)\right]$

27

$J'_{2\nu} - (J'_{4n-2\nu} + J'_{4n+2\nu}) + (J'_{8n-2\nu} + J'_{8n+2\nu}) - \dots =$

$= (-1)^{\nu+m}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right] - \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[1 - 2(4n)^2 + 2(8n)^2 - \dots 2(4mn)^2\right]$

$\left\{1 - 32n^2\left[1 - 4 + 9 - 16 \dots - m^2\right]\right\}$

$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 \dots \quad m^2$

$\cancel{\sum\left[\left(\frac{1}{m}\right)^2 - \left(\frac{2}{m}\right)^2 + \left(\frac{3}{m}\right)^2 \dots - \left(\frac{m}{m}\right)^2\right]} = F(1, m)$

$\cancel{\left(\frac{1}{m}\right)^2 - \left(\frac{2}{m}\right)^2 x + \left(\frac{3}{m}\right)^2 x^2 - \dots} = F(x, m)$

$\cancel{m\int F(x,m)\,dx = \frac{x}{m} - \frac{2x^2}{m} + \frac{3x^3}{m} \dots}$

$\int\frac{dx}{x}\int F_{(x)}\,dx = x - x^2 + x^3 \dots = \frac{x - x^{m+1}}{1-x}$

$\cancel{\int F_{(x)}\,dx = x\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{1-x} - \frac{x^{m+1}}{1-x}\right]} = x\left[\frac{1-(m+1)x^m}{1-x} + \frac{(x - x^{m+1})}{(1-x)^2}\right]$

$= x\,\frac{1 - x - mx^m - x^m + mx^{m+1} + x^{m+1} + x}{(1-x)^2}$

$= x\,\frac{1-x^m}{(1-x)^2} - \frac{mx^{m+1}}{1-x}$

$F(x) = \frac{1-x^m}{(1-x)^2} - \frac{(m+1)x^m}{(1-x)^2} + \frac{2x(1-x^m)}{(1-x)^3} - m\frac{(m+1)x^m}{1-x} + \frac{mx^{m+1}}{(1-x)^2}$

$= \frac{1 - 2x^m - mx^m - x^m + mx^{m+1} - (m^2+2m)x^m + (m^2+2m)x^{m+1}}{(1-x)^2}$

$\cancel{= \frac{1-2x^m}{(1-x)^2} - \frac{m(m+2)x^m}{1-x}}$

$\frac{2}{(1-x)^2}\,\frac{x^{m}-x}{x-1} = \frac{2}{(1-x)^2}\,\frac{x^{m+1} - x^m + x^m - x}{x-1} = \frac{2x^m}{(1-x)^2} + 2\frac{x^m - 1}{(x-1)^3} - \frac{2}{(1-x)^2}$

$x - x^2 + x^3 \dots + (-1)^{m+1}x^m = S_m$

$\cancel{\quad (-1)^m x^m (-1)^{m+1} x^{m+1} \quad}$

$x + (-1)^{m+1}x^{m+1} = (1+x)S_m$

$= \frac{x + (-1)^{m+1}x^{m+1}}{1+x}$

$x - 2x^2 + 3x^3 \dots + (-1)^{m+1} m x^m = x\frac{\partial}{\partial x}(S_m)$

$1 - 2^2 + 3^3 \dots \quad (-1)^{m+1}m^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left[x\frac{\partial}{\partial x}(S_m)\right]\Big|^{x=1} = \frac{\partial}{\partial x}S_m\Big|_{x=1} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\Big|_{x=1}.$

$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1 + (-1)^{m+1}(m+1)x^m}{1+x} - \frac{x + (-1)^{m+1}x^{m+1}}{(1+x)^2}\Big|^{x=1} = \frac{1}{4} + (-1)^{m+1}\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{4}\right)$

$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{(-1)^{m+1}m(m+1)x^{m-1}}{1+x} - 2\,\frac{1 + (-1)^{m+1}(m+1)x^m}{(1+x)^2} + 2\,\frac{x + (-1)^{m+1}x^{m+1}}{(1+x)^3} = -\frac{1}{4} + (-1)^{m+1}\left[\frac{m^2}{2} - \frac{1}{4}\right]$

$\frac{m^2+m}{2} - \frac{(m+1)}{2} + \frac{1}{4} \quad -\frac{2}{4} + \frac{2}{8}$

$1 - 2^2 + 3^2 \dots (-1)^{m+1}m^2 = (-1)^{m+1}\left[\frac{m^2}{2} + \frac{m}{2}\right]$

$(15, 8)$ $\varkappa = 2$

$$1 = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\nu!}{\lambda!} J_{\nu+\lambda} = \nu! \left[J_{\nu}(1) + \frac{J_{\nu+1}(1)}{1!} + \frac{J_{\nu+2}(1)}{2!} + \frac{J_{\nu+3}(1)}{3!} + \dots \right]$$

$$y \sin 2x + 3^2 y^3 \sin 6x + 5^2 y^5 \sin 10x + \dots =$$

$$= \sin 2x \left\{ \frac{y + 9y^3 + 6y^3 \cos 4x - 15y^5 - 10y^5 \cos 4x - 7y^7}{(1 - 2y^2 \cos 4x + y^4)^2} + \right.$$

$$\left. + 8 \cdot \frac{\cos 4x \cdot [y^3 + 3y^5 + 2y^5 \cos 4x - 3y^7 - 2y^7 \cos 4x - y^9] - [y^5 + 3y^7 + 2y^7 \cos 4x - 3y^9 - 2y^9 \cos 4x - y^{11}]}{(1 - 2y^2 \cos 4x + y^4)^3} \right\}$$

$$\sin 2x + 3^3 \sin 6x + 5^3 \sin 10x \dots = \sin 2x \left\{ \frac{1 + 27 + 18 \cos 4x - 75 - 50 \cos 4x - 49}{16 \sin^4 2x} - \right.$$

$$- \frac{(-12 - 4\cos 4x)\, 2\, (-4 \cos 4x + 4)}{64 \sin^6 2x} +$$

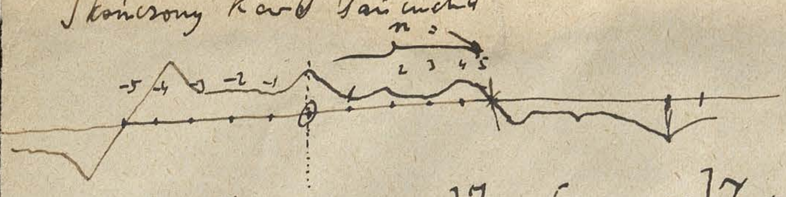
$$\left. + 8 \frac{\cos 4x [3 + 15 + 10 \cos 4x - 21 - 14 \cos 4x - 9] - [5 + 21 + 14 \cos 4x - 27 - 18 \cos 4x - 11]}{64 \sin^6 2x} \right\}$$

$-\,{}^{28}_{124}$

$$= \sin 2x \left\{ \frac{-96 - 32 \cos 4x}{16 \sin^4 2x} + \frac{8 (1 - \cos 4x)(3 + \cos 4x)}{\sin^6 2x} \right\} + \cancel{\frac{\cos 4x [-12 - 4\cos 4x] - [-12 - 4 \cos 4x]}{8 \sin^6 2x}}$$

$$\frac{-6 - 2 \cos 4x + 2 (3 + \cos 4x)}{\sin^4 2x} = 0 \; !!!$$

Skończony kawał łańcucha



$$y_0 = y_0(0)\,J_0 + [y_1(0) + y_{-1}(0)]J_1 + [y_2 + y_{-2}(0)]J_2 + \cdots [y_{n-1} + y_{-n+1}(0)]J_{n-1} + [y_n + y_{-n}(0)]J_n +$$

$$-[y_{n-1} + y_{-n+1}(0)]J_{n+1}$$

$$-\cancel{2y_0}\,J_{2n} - [y_1 + y_{-1}]J_{2n-1} \quad -[y_2 + y_{-2}(0)]J_{2n-2}$$

$$-[y_1 + y_{-1}]J_{2n+1} \quad -[y_2 + y_{-2}]J_{2n+2} \quad \cdots -[y_{n-1} + y_{-}\ ]J_{3n-1} \pm [y_n + y_{-n}]J_{3n}$$

$$+2y_0\,J_{4n} + [y_1 + y_{-1}]J_{4n-1} \quad +[y_2 + y_{-2}]J_{4n-2} \quad + \qquad J_{3n+1}$$

$$y_1 = y_1(0)\,J_0 + [y_2 + y_0]J_1 + [y_3 + y_{-1}]J_2 + \quad + [\cancel{y_n} + y_{-n+2}]J_{n-1} + [y_{n-1} + y_{-n+1}]J_n$$

$$\cancel{2y_1}\,J_{2n} \quad -[y_2 + y_0]J_{2n-1} \quad -[y_1 + y_{-3}]J_{2n-2} - [y_{n-3} + y_{-n+1}]J_{n-2} - [+y_{n-2} + \cancel{y_{-n}}]J_{n+1}$$

$$-(y_2 + y_{-4})J_{2n-3}$$

$$-[y_0 + y_{-2}]J_{2n+1} \quad -[y_1 + y_{-3}]J_{2n+2} - (y_2 + y_{-4})J_{2n+3} \quad + \cdots \quad -[y_{n-2} + y_{-n}]J_{3n-1} - [+y_{n-1} - y_{-n+1}]J_{3n}$$

$$+2y_1\,J_{4n} \qquad y \qquad J_{4n-1} \qquad + [y_n + y_{-n+2}]J_{3n+1}$$

$$(y_1 - y_0) = (y_1 - y_0)J_0 + [y_2 + y_0 - y_1 - y_{-1}]J_1 + [y_3 + y_{-1} - y_2 - y_{-2}]J_2 + \cdots [y_n + y_{-n+2} - y_{n-1} - y_{-n+1}]J_{n-1} +$$

$$+[-y_{n-1} + y_{-n+1} - \cancel{y_n - y_{-n}}]J_n - [\cancel{y_n} + y_{n-2} - y_{-n+1} - y_{n-1}]J_{n+1} + \cdots \quad -[y_2 + y_0 - y_1 - y_{-1}]J_{2n-1} -$$

$$+-[y_2 + y_{-4} - y_1 - y_{-3}]J_{2n-3} - [y_1 + y_{-3} - y_2 - y_{-2}]J_{2n-2}$$

$$-2(y_{-1} - y_0)\,J_{2n} - [y_{-2} + y_0 - y_1 - y_{-1}]J_{2n+1} \quad \cdots\cdots \quad -[y_{n-1} - y_{-n+1} - \cancel{y_n + y_{-n}}]J_{3n} +$$

$$+[y_n + y_{-n+2} - y_{n-1} - y_{-n+1}]J_{3n+1} \quad + [y_{n+1} + y_{-n+3} - y_{n-2} - y_{-n+2}]J_{3n+2} \quad \cdots + [y_2 + y_0 - y_1 - y_{-1}]J_{4n-1}$$

$$\# \ +2(y_1 - y_0)\,J_{4n} + [y_0 + y_2 - y_1 - y_{-1}]J_{4n+1}$$

$$y_1 - y_0 = (y_1 - y_0)[J_0 + 2J_{4n} + 2J_{8n} + \cdots] + [y_2 + y_0 - y_1 - y_{-1}][J_1 + J_{4n-1} + J_{4n+1} + \cdots] +$$

$$[y_3 + y_{-1} - y_2 - y_{-2}][J_2 + J_{4n-2} + J_{4n+2} + \cdots] + \cdots\cdots + [y_n + y_{-n+2} - y_{n-1} - y_{-n+1}][J_{n-1} + J_{3n+1} + J_{5n-1} + \cdots]$$

$$+ [-y_{n-1} + y_{-n+1} - y_n - y_{-n}][J_n + J_{3n} + J_{5n} + \cdots] + [-y_n - y_{n-2} + y_{-n+1} + y_{n-1}][J_{n+1} + J_{3n-1} + J_{5n+1} + \cdots]$$

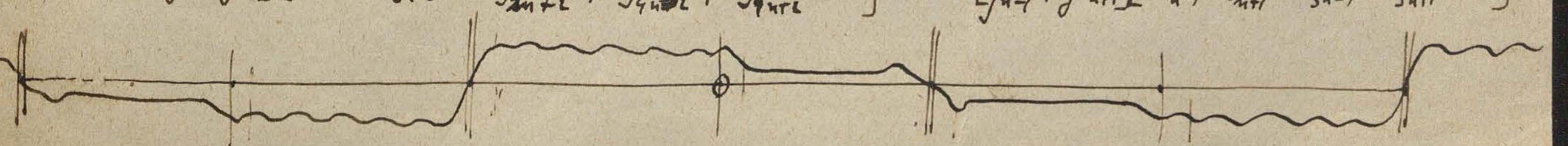
$$[-y_{-3} - y_1 + y_2 + y_2]$$

$$+ \cdots\cdots [-y_{-2} - y_0 + y_1 + y_{-1}][J_{2n-1} + J_{2n+1} + J_{6n-1} + \cdots] + [2y_0 - 2y_{-1}][J_{2n} + J_{6n} + \cdots]$$

$$\frac{1}{2c}\dot{y}_0 = \cancel{y_0(0)J_0 + [y_1 + y_{-1}]J_1 + [y_2 + y_{-2}]J_2 + \cdots}$$

$$y_0(0)[J_0' + 2J_{2n}' + 2J_{4n}' + \cdots] + [y_1 + y_{-1}][J_1' - J_{2n-1}' - J_{2n+1}' + J_{4n-1}' + J_{4n+1}' + \cdots] +$$

$$+ [y_2 + y_{-2}][J_2' + J_{4n-2}' + J_{2n+2}' + J_{4n-2}' + J_{4n+2}' \cdots] \cdots [y_{n-1} + y_{-n+1}][J_{n-1}' - J_{n+1}' - J_{3n-1}' + J_{3n+1}' \cdots]$$



30

$$W = \frac{2\alpha}{m}\,\overline{\dot{y}_0(y_1-y_0)}$$

$$= \frac{4\alpha c}{m}\Big\{\,.$$

$$-\overline{y_0}^2\,\big[J_0+2J_{4n}+2J_{8n}\cdots\big]\big[J_0'-2J_{2n}'+J_{4n}'\big] + \big[J_1+J_{4n-1}+J_{4n+1}+\cdots\big]\big[\cancel{J_0'+J_{2n}'+J_{4n}'+\cdots}\big]\overline{y_0}^2$$

$$-\big[J_{2n-1}+J_{2n+1}+J_{6n-1}\cdots\big] + \big[J_{2n}+J_{6n}+\cdots\big]$$

$$+\overline{y_1}^2\Big\{\big[J_0+2J_{4n}+2J_{8n}+\cdots\big]\big[J_1'-J_{2n-1}'-J_{2n+1}'+J_{4n-1}'+\cdots\big]-\big[J_1+J_{4n-1}+J_{4n+1}+\cdots\big]\big[J_1'-J_{2n-1}'-J_{2n+1}'+\cdots\big]$$

$$-\big[J_{2n-2}+J_{2n+2}+J_{6n-2}\cdots\big]\big[J_1'-J_{2n-1}'-J_{2n+1}'+J_{4n-1}'+\cdots\big]+\big[J_{2n-1}+J_{2n+1}+J_{6n-1}+\cdots\big]\big[J_1'-J_{2n-1}'-\cdots\big]\Big\}$$

$$+\overline{y_{-1}}^2\,\big[J_1'-J_{2n-1}'-J_{2n+1}'+J_{4n-1}'-\cdots\big]\Big\{-\big[J_1+J_{4n-1}+J_{4n+1}+\cdots\big]+\big[J_2+J_{4n-2}+J_{4n+2}\cdots\big]-$$

$$-\big[J_{2n-2}+J_{2n+2}+J_{6n-2}\cdots\big]+\big[J_{2n-1}+J_{2n+1}+\cdots\big]\Big\}$$

---

wszędzie indeksy powinny być podwójnie większe!

$$W = \frac{4\alpha c}{m}\Big\{$$

$$+\overline{y_0}^2\,\big[J_0'-2J_{2n}'+2J_{4n}'+\cdots\big]\big[\cancel{J_1'+J_{2n-1}'+J_{2n+1}'+\cdots}\big]\cancel{+J_{4n-1}+J_{6n}}$$

$$\big[-J_0-J_{2n-1}+2J_{2n}-J_{2n+1}+J_{4n-1}-2J_{4n}+J_{4n+1}-J_{6n-1}+2J_{6n}-J_{6n+1}\big]$$

$$+\overline{y_1}^2\,\big[J_1'-J_{2n-1}'-J_{2n+1}'+J_{4n-1}'\cdots\big]\big[J_0-J_1-J_{2n-2}+J_{2n-1}+J_{2n+1}-J_{2n+2}-J_{4n-1}+2J_{4n}-J_{4n+1}$$

$$+\overline{y_{-1}}^2\big[\qquad\big]\big[-J_1+J_2-J_{2n-2}+J_{2n-1}+J_{2n+1}-J_{2n+2}\,|+J_{4n-2}-J_{4n-1}-J_{4n+1}+J_{4n+2}\,|$$

$$+\overline{y_2}^2\big[J_2'-J_{2n-2}'-J_{2n+2}'+J_{4n-2}'+\cdots\big]\big[J_1-J_2-J_{2n-3}+J_{2n-2}+J_{2n+2}-J_{2n+3}\,|-J_{4n-2}+J_{4n-1}+J_{4n+1}-J_{4n+2}\big\}$$

$$+\overline{y_{-2}}^2\big[\qquad\big]\big[-J_2+J_3$$

$$\int_{-2ct}^{+2ct}(1+\beta x)\,dx$$

$$\int_0^{2ct}(1+\beta x)\,dx-\int_0^{2ct}(1-\beta x)\,dx=2\int_0^{2ct}\beta x\,dx=2\beta\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2ct}$$

$$\overline{c\dot{y}_0(y_1-y_0)}$$

$$\overline{W}=$$

$$=-\frac{2\alpha}{m}\,2\left[\dot{y}^2+2c\dot{y}^2\right]$$

$$\dot{y}_0^2\left[\sum_{k=2}(1+\beta k)\,J_k J_{k-1}-\sum_{k=0}'(1-\beta k)\,J_k J_{k+1}\right]$$

$$=\sum_{k=2}^{k}{}'\,J_k\Big[\underbrace{J_{k-1}-J_{k+1}}_{2J_k'}+\beta k\underbrace{(J_{k-1}+J_{k+1})}_{\frac{2k J_k}{x}}\Big]-J_0J_1$$

$$\overline{W}=$$

$$=\frac{2\alpha}{m}\,2\dot{y}_0^2\sum_{k=2}^{k=2ct}{}'\,J_k\left[J_k'+\beta\frac{k^2}{x}J_k\right]-J_0J_1\Big\}$$

$$\overline{W}\overset{?}{=}\frac{4\alpha}{m}\,\overline{\dot{y}_0^2}\,\beta\underbrace{\sum_{k=2}^{k=2ct}\frac{k^2\,\overline{J_k^2}}{x}}_{\neq\underbrace{\frac{8c^3t^3}{3(2ct)^2\pi}\,\frac{2}{\pi}\,\frac{\pi}{4}}_{\frac{ct}{3}}}$$

Czy nie trzeba lepiej wypowiadać ~~zachodzi~~ tylko o skończonych ~~...~~ Twierdzenie?

Semiconverg.:

$$J_{\nu}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\left[1-\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!(8x)^2}+\dots\right]\sin\left(x-\frac{2\nu-1}{4}\pi\right)+\left[\frac{4\nu^2-1^2}{8x}-\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)(4\nu^2-5^2)}{3!\,(8x)^3}\right]\cos\left(x-\frac{2\nu-1}{4}\pi\right)\right\}$$

dla ν parzystych:

$$=(-1)^{\frac{\nu}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\underbrace{\left[1-\frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-3^2)}{2!(8x)^2}+\dots\right]}_{1-\frac{\nu^4-\frac{5}{2}\nu^2+\frac{9}{16}}{8x^2}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\underbrace{\left[-\qquad\right]}_{\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{2x}-}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

w razie jeśli $\frac{\nu^2}{x}$ małe ale ν bardzo duże

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\neq\cos\left(\frac{\nu^2}{2x}\right)}\qquad\qquad\underbrace{\qquad\qquad}_{\neq\sin\left(\frac{\nu^2}{2x}\right)}$$

$$=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}+\frac{\nu^2}{2x}\right)$$

$$y_1 - y_0 = [y_1(0) - y_0(0)]\left[1 - c^2t^2 + \frac{c^4t^4}{4}\right] + [y_2(0) + y_0(0) - y_1(0) - y_{-1}(0)]\left[\frac{c^2t^2}{2} - \frac{c^4t^4}{6}\right] + [y_3 + y_{-1} - y_2 - y_{-2}]\frac{c^4t^4}{4!}$$

$$+[\dot y_1(0) - \dot y_0]\left[t - \frac{c^2t^3}{3} + \frac{c^4t^5}{20}\right] + [\dot y_2(0) + \dot y_0(0) - \dot y_1 - \dot y_{-1}]\left[\frac{c^2t^3}{6} - \frac{c^4t^5}{36}\right] +$$

$\dot y_0 =$

$$\cancel{[\dot y_0 = y_0(y_1 - y_0)(1 - 2c^2t^2) + y_0[y_2 + y_0 - y_1 - y_{-1}]\frac{c^2t^2}{2} + y_0[\dot y_1 - \dot y_0][t - \tfrac{4}{3}c^2t^3] + y_0[\dot y_2 + \dot y_0 - \dot y_1 - \dot y_{-1}]\tfrac{c^2t^3}{6}}$$

$$\dot y_0 = -y_0\left[2c^2t + c^4t^3\right] + [y_1 + y_{-1}]\left[c^2t - \frac{2c^4t^3}{3}\right] + [y_2 + y_{-2}]\frac{c^4t^3}{6}$$

$$+\dot y_0\left[1 - \frac{c^2t^2}{2} + \frac{c^4t^4}{4}\right] + [\dot y_1 + \dot y_{-1}]\left[\frac{c^2t^2}{2} - \frac{c^4t^4}{6}\right] + [\dot y_2 + \dot y_{-2}]\frac{c^4t^4}{4!}$$

$$W = y_0[y_1 - y_0][-2c^2t + \cancel{3c^4t^3}] + y_0\cancel{[y_2 + y_0 - y_1 - y_{-1}]c^4t^3} + y_0[\dot y_1 - \dot y_0][-2c^2t^2 + \cancel{\tfrac{5}{3}c^4t^4}]$$

$$+y_0\cancel{[\dot y_2 + \dot y_0 - \dot y_1 - \dot y_{-1}]\left(-\frac{c^4t^4}{3}\right)}$$

$$+[y_1 + y_{-1}][y_1 - y_0]\,c^2t + [y_1 + y_{-1}][\dot y_1 - \dot y_0]\,c^2t^2 + \cancel{[\dot y_1 - \dot y_0](-2c^2t)}$$

$$+\dot y_0[y_1 - y_0]\left[1 - \frac{3}{2}c^2t^2\right] + \dot y_0[\dot y_1 - \dot y_0]\,t \qquad + \dot y_0[y_2 + y_0 - y_1 - y_{-1}]\frac{c^2t^2}{2}$$

$$+(y_1 - y_0)(\dot y_1 + \dot y_{-1})\frac{c^2t^2}{2} + \cancel{(y_1 - y_0)(\dot y_2 + \dot y_{-2})}$$

$$= c^2t\left\{(y_1 + y_{-1} - 2y_0)(y_1 - y_0)\right\} + \dot y_0(y_1 - y_0) + c^2t^2\Big\{(y_1 + y_{-1} - 2y_0)(\dot y_1 - \dot y_0) - \frac{3}{2}\dot y_0(y_1 - y_0)$$

$$+\dot y_0(\dot y_1 - \dot y_0)t \qquad + \frac{\dot y_0}{2}(y_2 + y_0 - y_1 - y_{-1}) + \frac{(y_1 - y_0)(\dot y_1 + \dot y_{-1})}{2}\Big\}$$

$$W_0 = \dot y_0(y_1 - y_0)$$

$$\cancel{\dot y_0\int_{-\infty}^{+\infty}(y_1 - y_0)\,e^{\frac{-cy_1^2}{\alpha\theta_0}(1+\beta)}dy_1 = \dot y_0\frac{\alpha\theta_0}{2c(1+\beta)} \quad \dot y_0\,y_0\sqrt{\frac{\pi\,\alpha\theta_0}{c(1+\beta)}}}$$

$c\rho l^3 \cancel{\lambda - \lambda}$

$c_v\rho \sim \frac{1}{l^3}$

$\frac{c\lambda}{l^3} = \frac{c}{l^2}$

$\kappa = c_v\frac{c\rho\lambda}{3}$

$\mu = \frac{c\rho\lambda}{3}$

$$\kappa\frac{\partial\theta}{\partial x}qt = Q$$

$$\kappa = \frac{Q}{qt\frac{\partial\theta}{\partial x}} = \cancel{\frac{l}{dt}}\frac{1}{at} = \frac{c}{a^2}\;\cancel{[\ ]}\times\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{1^\circ}{1\,\mathrm{cal}} = \frac{0.0013\cdot(48000)^2}{4\cdot10^{19}\cdot2\cdot273\cdot4.2\cdot10^7}$$

$$= \frac{\cancel{48^2}\cdot1.3\cdot10^5}{4\cdot\cancel{42\cdot546}\cdot10^{28}} = 3\cdot10^{-24}$$

$$\kappa = \frac{10^5}{(10^{-8})^2} = 10^{21}\cdot3\cdot10^{-24} = 0.003\left[\frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{cm}}\right]!$$

$$-hc\left[(y_0 - y_1)^2 + y_0^2 + y_1^2\right]$$

rovný tok: pravděp. $y_1\, y_0 \quad \sim \quad e$

W płaszczyźnie ograniczonym szerokości λa, w którym ten punkt wytrzymany: $\mu+\nu+\mu=\lambda$

$$\dot{y}_k = \int \dots \iint\left[\sin 2\omega\nu \frac{\cos[x\sin\omega - 2\omega k - 2\omega\lambda]}{\sin 2\omega\lambda} + \sin 2\omega\mu \frac{\cos[x\sin\omega + 2\omega k - 2\omega\lambda]}{\sin 2\omega\lambda}\right] d\omega$$

$$= \int \dots \int \frac{\begin{array}{l} -\sin[x\sin\omega + 2\omega(\mu+k) - 2\omega\lambda] \\ -\sin[x\sin\omega - 2\omega(\mu-k) - 2\omega\lambda] \\ +\sin[x\sin\omega + 2\omega(\nu-k) - 2\omega\lambda] \\ +\sin[x\sin\omega - 2\omega(\nu+k) - 2\omega\lambda]\end{array}}{2\sin 2\omega\lambda}$$

$$\int \frac{\sin(x\sin\omega - \alpha\omega)}{\sin\omega}\, d\omega \quad \text{lub} \quad \int \sin(x\sin\omega - \alpha\omega)\, \operatorname{ctg} 2\omega\lambda$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{n}{m} \qquad \int \cos(x\sin\omega - \alpha\omega)$$

czy to po upływie czasu $t=\infty$ dąży do linii takiego żeby prawdopod. danego $\dot{y}_k$ było $\infty e^{-\alpha \dot{y}_k^2}$?

$(\dot{y}_k)_t = f_k(t)$ odwrotnie: $t = \varphi_k(\dot{y}_k)$ wielowartościowa funkcja φ_k

$$dt = \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{y}_k}\, d\dot{y}_k$$

$$dt = d\dot{y}_k \frac{1}{n}\sum_n \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{y}_k} \qquad \text{czy} \quad \frac{1}{n}\sum_n \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi} = e^{-\frac{\dot{y}_k^2}{h}}$$

Punkty początkowe

jeżeli punkt (0) i (1) mają prędkości $\dot{y}_0(0)$ $\dot{y}_1(0)$

jak się to rozchodzi dalej? $\dot{y}_k = \dot{y}_0(0)\, J_{2k}(2ct) + \dot{y}_1(0)\, J_{2k-2}(2ct)$

ogólnie $\dot{y}_k = \sum_{\nu=-n}^{+n} \dot{y}_\nu(0)\, J_{2k-2\nu}(2ct)$ prawdopod. takiego układu $= \infty\, e^{-2h\sum_{\nu=-n}^{+n}\dot{y}_\nu^2(0)}$

Energia która się rozeszła w rzędzie łańcucha na zewnątrz

$$W = \frac{m}{2}\sum_{k=n}^{\infty} \dot{y}_k^2$$

Wówczas wytworzyć $\int_{-\infty}^{\infty} d\dot{y}_n \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{y}_{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{y}_{n-2} \dots e^{-2h\sum_{\nu=-n}^{+n}\dot{y}_\nu^2(0)}\, W$ powinno być analogiczne do ilości ciepła rozproszonego na zewnątrz

$$y_1 - y_0 = [y_1(0) - y_2(0)] J_0 + [y_0(0) + y_2(0) - y_1(0) - y_{-1}(0)] J_2 + [y_{-1}(0) + y_3 - y_2 - y_{-2}] J_4 -$$

$$+ [\dot y_1 - \dot y_0] \int J_0\, dt + [\dot y_0 + \dot y_2 - \dot y_1 - \dot y_{-1}] \int J_2\, dt + [\dot y_{-1} + \dot y_3 - \dot y_2 - \dot y_{-2}] \int J_4\, dt -$$

$$\dot y_0 = \overset{2c\, y_0 J_0' +}{(}\, 2c\, [y_1 + y_{-1}] J_2' + 2c\, [y_2 + y_{-2}] J_4' + \dots$$

$$+ \dot y_0 J_0 + [\dot y_{-1} + \dot y_{+1}] J_2 + [\dot y_{-2} + \dot y_{+2}] J_4 + \dots$$

Przyjmujemy że początkowe y_k $\dot y_k$ są ~~całkiem~~ wszystkie od siebie niezależne: $\int y_k y_i = 0$ itd.

$W =$

$$\frac{2\alpha}{m} \overline{\dot y_0 (y_1 - y_0)} = -2c\, \overline{y_0^2} J_0 J_0' + 2c\, \overline{y_0^2} J_2 J_0' +$$

$$+ 2c\, \overline{y_1^2} J_0 J_2' - 2c(\overline{y_1^2} + \overline{y_{-1}^2}) J_2 J_2' + 2c\, \overline{y_{-1}^2} J_4 J_2' +$$

$$+ 2c\, \overline{y_2^2} J_2 J_4' - 2c(\overline{y_2^2} + \overline{y_{-2}^2}) J_4 J_4' + 2c\, \overline{y_{-2}^2} J_6 J_4' + \dots$$

$$- \{ \overline{\dot y_0^2} J_0 \int J_0\, dt + \dots \}$$

$$= 2c\, \overline{y_0^2} J_0' \overbrace{(J_2 - J_0)}^{-2J_1'}$$

$$- 2c\, \overline{y_1^2} J_2' (J_2 - J_0) + 2c\, \overline{y_{-1}^2} J_2' \overbrace{(J_4 - J_2)}^{-2J_3'}$$

$$- 2c\, \overline{y_2^2} J_4' (J_4 - J_2) + 2c\, \overline{y_{-2}^2} J_4' (J_6 - J_4)$$

$$\dots$$

$$-2\overline{\dot y_0^2} J_0 J_1$$

$$+2\overline{\dot y_1^2} J_2 J_1 - 2\overline{\dot y_{-1}^2} J_2 J_3$$

$$+2\overline{\dot y_2^2} J_4 J_3 - 2\overline{\dot y_{-2}^2} J_4 J_5$$

$$\cancel{J_k J_{k+1} = \frac{1}{\pi} \int \cos(x \sin\omega - k\omega)\, d\omega \, \cos(x\sin\varphi - (k+1)\varphi)\, d\varphi}$$

Po upływie dużego czasu $J_{2k}(2ct) =$

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{2n-1}{4}\pi\right) \quad \text{dla } n < x$$

$$J_{n+1}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{2n-1}{4}\pi\right)$$

$$J'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{2n-1}{4}\pi\right)$$

$$J'_{n+1}(x) = \sqrt{\dots}\ \sin\left(x - \frac{2n-1}{\ }\right)$$

$$J_{n+1} J_n = \frac{1}{\pi x} \sin\left(2x - \frac{2n-1}{2}\pi\right) = (-1)^n \frac{1}{\pi x} \cos 2x$$

$$J'_{n+1} J'_n =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2x = 2k\pi}^{2k\pi + 2\pi} \frac{\cos 2x\, dx}{x} \overset{2x=\varphi}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x\, dx}{2k\pi + x} = \int_0^{\pi} \cos 2x\, dx \left[\frac{1}{2k\pi + x} - \frac{1}{(2k+1)\pi + x}\right] = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx \left[\frac{1}{2k\pi + x} - \frac{1}{(2k+1)\pi - x}\right]$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2k\pi}^{2k\pi + 2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\varphi} =$$

$$\neq \frac{\alpha}{(2k\pi)^2} \neq \frac{\alpha}{x^2}$$

$$y_1 - y_0 = y_0 \Big[- J_0 + J_2 \,|\, - J_{4n-2} + 2 J_{4n} - J_{4n+2} \,|\, + J_{8n-2} \dots$$

$$+ J_0 - J_2 \,|\, - J_{4n-4} + J_{4n-2} + J_{4n+2} - J_{4n+4} \,|\, - J_{8n-2} + 2 J_{8n} - J_{8n+2} \,| \quad \dots \Big]$$

$$+ y_0 \beta \Big\{ \Big[J_0 + \cancel{J_4} - J_2 \quad - J_{4n-4} + J_{4n-2} + J_{4n+2} - J_{4n+4} - J_{8n-2} + 2 J_{8n} - J_{8n+2}$$

$$+ J_2 \quad - J_4 \,|\, - J_{4n-2} + 2 J_{4n} \quad - J_{4n+2} \,|\, - J_{8n-4} + J_{8n-2} + J_{8n+2} - J_{8n+4}$$

$$= J_0 - J_4 \,|\, - J_{4n-4} + 2 J_{4n} - J_{4n+4} \,|\, - J_{8n-4} + 2 J_{8n} - J_{8n+4} \,|$$

$$+ 2 \Big[J_2 - J_4 \,|\, - J_{4n-6} + J_{4n-4} + J_{4n+4} - J_{4n+6} \,|\, - J_{8n-4} + J_{8n-2} + J_{8n+2} - J_{8n+4}$$

$$+ J_4 - J_6 \quad - J_{4n-4} + J_{4n-2} + J_{4n+2} - J_{4n+4} \,|\, - J_{8n-6} + J_{8n-4} + J_{8n+4} - J_{8n+6}$$

$$= J_2 - J_6 \,|\, - J_{4n-6} + J_{4n-2} + J_{4n+2} - J_{4n+6} \,|\, - J_{8n-6} + J_{8n-2} + J_{8n+2} - J_{8n+6} \,| -$$

$$+ 3 \Big[J_4 - J_6 \quad - J_{4n-8} + J_{4n-6} + J_{4n+6} - J_{4n+8}$$

$$+ J_6 - J_8 \quad - J_{4n-6} + J_{4n-4} + J_{4n+4} - J_{4n+6}$$

$$= J_4 - J_8 \,|\, - J_{4n-8} + J_{4n-4} + J_{4n+4} - J_{4n+8} \,| \dots$$

pamiętamy: $\frac{2\nu}{x} J'_\nu = J'_{\nu-1} + J'_{\nu+1}$

$$\{ \quad \} = y_0 \beta \Big\{ \Big[J'_1 \quad - J'_{4n-3} + J'_{4n+3} - J'_{8n-1} + J'_{8n+1} \dots$$

$$+ J'_3 \quad - J'_{4n-1} + J'_{4n+1} - J'_{8n-3} + J'_{8n+3} \Big]$$

$$+ 2 \Big[J'_3 \quad - J'_{4n-5} + J'_{4n+5} -$$

$$+ J'_5 \quad - J'_{4n-3} + J'_{4n+3} -$$

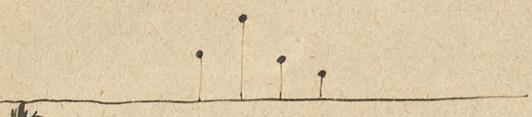
$$+ 3 \Big[J'_5 \quad - J'_{4n-7} \quad \dots$$

$$+ J'_7 \quad - J'_{4n-5}$$

$$= \frac{2 y_0 \beta}{x} \Big\{ \Big[2 J'_2 \; - (4n-2) J'_{4n-2} + (4n+2) J'_{4n+2} - (8n-2) J'_{8n-2} \Big] \times \Big[J'_2 - J'_{4n-2} - J'_{4n+2} + \dots \Big]$$

$$+ 2 \Big[4 J'_4 - (4n-4) J'_{4n-4} + (4n+4) J'_{4n+4} \dots \Big] \times \Big[J'_4 - J'_{4n-4} + \dots$$

$$+ 3 \Big[6 J'_6 - (4n-6) J'_{4n-6} + \quad \Big] \times \Big[J'_6 \dots \Big\}$$



Praca wykonana podczas czasu dt przez ruch punktu y_0 względem punktu y_1

$$W = \int_0^t \dot y_0\, c(y_1 - y_0)\, dt = c\int (y_1 - y_0)\, dy_0$$

$$y_0 = y_0(0) J_0(2ct) + y_1(0) J_2(2ct) + y_2(0) J_4(2ct) + y_{-1}(0) J_2(2ct) + y_{-2}(0) J_4(2ct)$$

$$y_1 = y_1 J_0(2ct) + y_0(0) J_2(2ct) + y_{-1}(0) J_4(2ct) + y_2(0) J_2(2ct) + \dots$$

$$\dot y_0 = \dot y_0(0) + 2c\left[y_1(0) J_2'(2ct) + y_2(0) J_4'(2ct) + y_{-1}(0) J_2'(2ct) + \dots\right]$$

$$y_1 - y_0 = [y_1(0) - y_0(0)] J_0(2ct) + [y_0(0) + y_2(0) - y_1(0) - y_{-1}(0)] J_2(2ct) + [y_{-1} + y_3 - y_2 - y_{-2}(0)] J_4(2ct) + \dots$$
$$+ [\dot y_1(0) - \dot y_0(0)]\int J_0(2ct)\,dt + [\dot y_0(0) + \dot y_2(0) - \dot y_1(0) - \dot y_{-1}(0)]\int J_2(2ct) + \dots$$

$$E = U + T = \sum \frac{m}{2}\dot y_k^2 + \alpha \sum\left[(y_1 - y_0)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (y_3 - y_2)^2 + \dots + (y_0 - y_{-1})^2 + (y_{-1} - y_{-2})^2 + \dots\right]$$

$$y_0 = y_0(0) J_0(2ct) + [y_1(0) + y_{-1}(0)] J_2(2ct) + [y_2(0) + y_{-2}(0)] J_4(2ct) + \dots$$
$$+ \dot y_0(0)\int_0^t J_0(2ct)\,dt + [\dot y_1(0) + \dot y_{-1}(0)]\int_0^t J_2(2ct)\,dt + \dots$$

$$\cancel{S = \int W e^{\frac{E}{R\theta_0 + \alpha k}} d}$$

W każdej części tekstu odchylenie jednego tu część się znajdowała w równowadze / równowaga

prawdop. ~~spotkania~~ $y_k\ \dot y_k \sim e^{-\frac{\dot y_k^2 + y_k^2 c}{\alpha\theta_k}}\, dy_k\, d\dot y_k$

$$S = \int \dots e^{-\frac{\left[\frac{m}{2}\dot y_k^2 + c y_k^2\right]}{\alpha\theta_0}[1 + \beta k]}\, dy_k\, d\dot y_k \int \dots W$$

W Pasierbi trzeba tworzyć $\iint E\, dy_i\, d\dot y_i$ przez całkowanie według wszystkich i z wyjątkiem $i = k$

$$c\int \dot y_0 (y_1 - y_0)\, dt = \cancel{c\,y_0(y_1 - y_0) - c\int y_0 (\dot y_1 - \dot y_0)\,dt}$$
$$= -c\frac{y_0^2}{2} + c\int \dot y_0 y_1\, dt$$

S powinno wypaść niezależne od czasu t

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \dots$$

$$J_2 = \frac{x^2}{8}\left[1 - \frac{x^2}{12} + \dots\right]$$

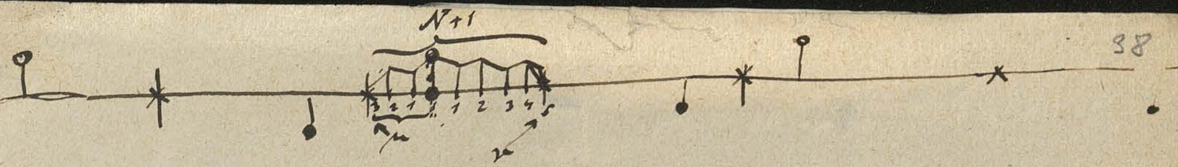
$$J_4 = \frac{x^4}{4!\, 2^4}\left[1 - \frac{x^2}{20} + \dots\right]$$

$$\int J_0\, dt = \left[t - \frac{c^2 t^3}{3} + \frac{c^4 t^5}{20}\right]$$

$$y_0 = y_0(0)\left[1 - c^2 t^2 + \frac{c^4 t^4}{4}\right] + [y_1(0) + y_{-1}(0)]\frac{c^2 t^2}{2!}\left[1 - \frac{c^2 t^2}{3}\right] + [y_2(0) + y_{-2}(0)]\frac{c^4 t^4}{4!}$$
$$+ \dot y_0(0)\left[t - \frac{c^2 t^3}{3} + \frac{c^4 t^5}{20}\right] + [\dot y_1(0) + \dot y_{-1}(0)]\left[\frac{c^2 t^3}{6} - \frac{c^4 t^5}{30}\right] + [\dot y_2(0) + \dot y_{-2}(0)]\frac{c^4 t^5}{5!}$$

$$y_0 = y_0(0) + \dot y_0(0)\, t + t^2 c^2\left[\frac{y_1(0) + y_{-1}(0)}{2} - y_0(0)\right] + \frac{c^2 t^3}{3}\left[\frac{\dot y_1(0) + \dot y_{-1}(0)}{2} - \dot y_0(0)\right] + \dots$$

Łańcuch (~~N+1~~) punktów



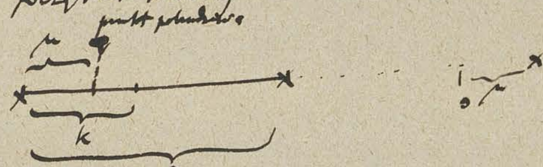
Końcowe w początku

$$y_K = J_{2K} - J_{2(2\nu-k)} - J_{2(2\mu+K)} + J_{2(2\nu+2\mu-K)} + J_{2(2\nu+2\mu+k)} - J_{-2(4\nu+2\mu-k)}$$

$$= \int^{\pi/2} \cos(x\sin\omega - 2K\omega) + \sum$$

$2\nu-k$	$2\nu+2\mu-k$
$4\nu+2\mu-k$	$4\nu+4\mu-k$
$6\nu+4\mu-k$	$6\nu+6\mu-k$
$2\mu+k$	$2\mu+2\nu+k$
$4\mu+2\nu+k$	$4\mu+4\nu+k$
. . . .	

Rachunek położenia punktu k względem początku stałego



$$y_K = J_{2(k-\mu)} - J_{2(2\lambda-\mu-k)} + J_{2(2\lambda+\mu-k)} - J_{2(4\lambda-\mu-k)} + J_{2(4\lambda+\mu-k)}$$

$$- J_{2(2\lambda-\nu+k)} + J_{2(2\lambda+\nu+k)} - \dots$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos[x\sin\omega - 2(k-\mu)\omega]\, d\omega$$

$$- \int \sum_{n=1}^{\infty} \cos[x\sin\omega - 2\omega(2\lambda n-(\mu+k))]\, d\omega + \sum \cos[x\sin\omega - 2\omega(2n\lambda+\mu-k)]$$

$$- \sum \cos[x\sin\omega - 2\omega(2n\lambda-\nu+k)]\, d\omega + \sum \cos[x\sin\omega - 2\omega(2n\lambda+\nu+k)]$$

$$= \int \dots \quad 2\sum \sin[x\sin\omega - 2\omega(2n\lambda-k)]\sin 2\omega\mu$$

$$+ 2\sum \sin[x\sin\omega - 2\omega(2n\lambda+k)]\sin 2\omega\nu$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha - n\beta) = \cos\alpha\,[\underbrace{\cos\beta + \cos 2\beta + \dots}_{A}] + \sin\alpha\,[\sin\beta + \sin 2\beta + \dots]$$

$$A + iB = e^{i\beta} + e^{2i\beta} + \dots = \frac{e^{i\beta}}{1-e^{i\beta}} = -\frac{e^{\frac{i\beta}{2}}}{e^{\frac{i\beta}{2}} - e^{-\frac{i\beta}{2}}} = \frac{i}{2}\frac{e^{\frac{i\beta}{2}}}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{-\sin\frac{\beta}{2} + i\cos\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$A = -\frac{1}{2}$$

$$B = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$$

$$\sum \cos(\alpha - n\beta) = \frac{1}{2}\left[-\cos\alpha + \sin\alpha\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\alpha\cos\frac{\beta}{2} - \cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin(\alpha-\frac{\beta}{2})}{2\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$\sum \sin(\alpha - n\beta) = \frac{1}{2}\left[\sin\alpha - \cos\alpha\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right] = -\frac{1}{2}\,\frac{\sin\alpha\sin\frac{\beta}{2} + \cos\alpha\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} = -\frac{\cos(\alpha-\frac{\beta}{2})}{2\sin\frac{\beta}{2}}$$

mamy jak daleko wóz lin $J_{k}(x) = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x - n\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{2\pi x}}$

porostaje wozina jest następująca

$$\Sigma(y'_k)^2 = \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2 k}{2\pi c t}$$

zatem wóz ważny tylko o ile stosunek $\frac{n}{x}$ bardzo ~~duży~~ mały

ale nie gdy $\frac{n}{x}$ bliski jedności

zatem aż do $\Big\}\ k = \frac{\pi}{2} c t$

Istotnie jeśli $\frac{n}{x}$ mały, to równanie różniczkowe dla J_n przechodzi w J_0, co dla $\lim x = \infty$ jest tak jak

$$\sqrt{\frac{T}{\rho q}} = \frac{ml}{t^2 \frac{m}{l^3}} l^2 = \frac{l}{t}$$

więc wóz wtedy ważny dopóki $\frac{k}{ct}$ mały

$$\text{to znaczy} = \frac{z}{c l t} = \frac{z}{l \cdot ct} \text{ mały} \qquad c = \sqrt{\frac{T}{ml}}$$

przyjmować jednak w takiej sumie ~~[illegible]~~ by były $a = \sqrt{\frac{T}{\frac{m}{l}}} = lc$

$$= \frac{z}{at}$$

więc $2ct = \frac{2at}{l}$

to znaczy $z < at$

Praca podczas drgania punktu k wykonana przez niego na punkt $k+1$:

$$\int \frac{dy_k}{dt} \cdot \frac{y_{k+1} - y_k}{l}\, T\, dt = \frac{T}{l}$$

Zupełnie wchodzimi głam porównuje się otrzymać więc $at = x =$ skończone

$$k = \frac{x}{l} \qquad \lim l = 0$$

więc $y_k = \alpha J_{\frac{2x}{l}}\left(\frac{2x}{l}\right) = \alpha J_{\frac{2x}{l}}\left(\frac{2at}{l}\right)$

$$= \frac{1}{3\pi} \sqrt[3]{6}\, \sin\frac{\pi}{3}\, \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{2at}{l}\right)^{1/3}} \quad ?$$

a może to nie prawda

Tylko cała fala się rozchodzi tak, ale nie ruch pojedyńczego punktu?

Dwuwymiarowy przykład:

$$\frac{d^2 y_{kh}}{dt^2} = c^2(y_{k,h-1} - 2y_{k,h} + y_{k,h+1}) + c^2(y_{k-1,h} - 2y_{k,h} + y_{k+1,h})$$

biorąc $y_{kh} = J_{2k}(2ct)\, J_{2h}(2ct)$

$$\frac{d}{dt} = J'_{2k} J_{2h} + J_{2k} J'_{2h}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(J_{2k-1} - J_{2k+1}) J_{2h} + J_{2k}(J_{2h-1} - J_{2h+1})\right]$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{1}{2}\left[(J'_{2k-1} - J'_{2k+1}) J_{2h} + (J_{2k-1} - J_{2k+1}) J'_{2h} + J' \ldots - \right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[(J_{2k-2} - 2J_{2k} + J_{2k+2}) J_{2h} + 2(J_{2k-1} - J_{2k+1})(J_{2h-1} - J_{2h+1}) + (J_{2h-2} - 2J_{2h} + J_{2h+2}) J_{2k}\right]$$

Proszę wychylenie początkowe a $\qquad \cos\tau_0 = \frac{at}{x}$

$y_k = \alpha J_{2k}(2ct)$ $\qquad$ dla dużych k t $\quad = \alpha J_{2k}\left(\frac{2at}{l}\right) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\sqrt{(\frac{l}{2})}}{\left(\frac{at}{l}\sin\tau_0\right)^{1/2}} \cos\left[\frac{2at}{l}(\sin\tau_0 - \tau_0\cos\tau_0) - \frac{\pi}{2}\right]$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{jeśli punkty } x_0 \; x_1 \text{ zatem wychylenie tak samo} \\ y_k = \alpha\left[\underbrace{J_{2k}(2ct) + J_{2k-2}(2ct)}\right] \\ \qquad = \frac{2(2k-1)}{2ct} J_{2k-1}(2ct) \quad = \frac{a(2k-1)}{ct} \quad J_{2k-1}(2ct)\end{array}}$$

$$\overline{y_k^2} = \alpha^2\left[\overline{J_{2k}(2ct)^2}\right] =$$

Czy istnieje analogia dwóch przykładów warto przejrzeć:

I). punkt $x=0$ ~~...~~ otrzymuje prędkość początkową $y_0' = \alpha$ $\quad t=0$

podczas gdy inne wszystkie w spoczynku

energia kinet. się rozchodzi

II). punkt $x=0$ otrzymuje ilość ciepła $\underset{Q=}{\overset{\text{podwyższenie temperatury}}{}} \frac{mc^2}{2}$ podczas gdy reszta $\theta = 0$

W drugim wypadku mamy

$$\theta = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\kappa\pi}{c\rho}}\,t}\, e^{-\frac{x^2}{4\kappa}\frac{\rho c}{t}} = \frac{1}{2\sqrt{A\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4At}} \qquad A = \frac{\kappa}{c\rho}$$

podwójnie

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{x}{4At\sqrt{A\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4At}} = \frac{x\,\theta}{4At}$$

I). ~~$y_k' = \alpha J_{2k}(2ct)$~~

$$y_k' = \alpha J_{2k}\left(2\frac{t}{\tau}\right) \qquad \tau = \frac{a}{\sqrt{\frac{Ta}{m}}} = \frac{a}{c}$$

$$= \alpha J_{\frac{2x}{a}}\left(\frac{2ct}{a}\right)$$

energia rozchodzi się tak daleko że $\frac{x}{a}$ ~~...~~ rzędu ct $\quad$ jak głos! ^{2}

rozwinięcie $J = \frac{\cos\ldots}{\sqrt{\ }}$ $\quad$ tylko wtedy o ile $\quad \frac{k^2}{x} \ll 1$
x dużo i

$$\frac{x^2}{a^2} < \frac{ct}{a}$$

$$x^2 < a\,ct$$

$a = 10^{-8} \quad c = 10^5$

$ac = 10^{-3}$

II). Temperatura się największa gdy θ_{max}

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial\theta}{\partial(\frac{1}{t})} = 0 \qquad \frac{1}{\sqrt{t}} = z$$

$$\theta \sim z\, e^{-\frac{x^2 z^2}{4A}}$$

$$e^{\cdots} - \frac{2z^2x^2}{4A}\, e^{\cdots} = 0 \qquad A = \frac{\kappa}{c\rho} = 10^{-3}$$

$$x^2 = \frac{2A}{z^2} = 2At$$

więc dłużej w ogóle daleko rozchodzi

Debye :

$$J_p(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{m} A_n(\tau)\,\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{(\frac{x}{2}\sin\tau)^{n+\frac{1}{2}}}\cos\left\{x(\sin\tau-\tau\cos\tau)-(2n+1)\frac{\pi}{4}\right\}$$

$\cos\tau = \frac{p}{x}$

$A_0(\tau) = 1$

$A_1\tau = \frac{1}{8}+\frac{5}{24}\cot^2\tau$

$A_2\tau = \frac{3}{128}+\frac{3}{372}\cot^2\tau + \quad - \cot^4\tau$

wtedy i tylko $\frac{p}{x}$ = małe = ε

$\tau = \frac{\pi}{2}-\varphi \qquad \cos\tau = \sin\varphi = \frac{p}{x}$

ale Nicholson:

~~$J_n(n) = \sqrt{2\frac{2}{n}} - \frac{1}{8}\frac{2}{n^3} - \frac{\varphi^6}{2^7}$~~

$\sin\tau = \sqrt{1-(\frac{p}{x})^2} \neq 1-\frac{p^2}{2x^2}$

$\operatorname{ctg}\tau = \frac{p}{x}+\frac{p^3}{2x^3}$

$\sin\tau-\tau\cos\tau = 1-\frac{p^2}{2x^2}-(\frac{\pi}{2}-\varphi)\frac{p}{x}$ $= \cancel{\tau-\frac{\tau^3}{3!}-\tau+\frac{\tau^3}{2!}}$ $+\frac{\varphi^4}{4!}$

Gdyż tak: $p = x\sin\varphi$

$= \cos\varphi-(\frac{\pi}{2}-\varphi)\sin\varphi = 1-\frac{\varphi^2}{2}-(\frac{\pi}{2}-\varphi)(\varphi-\frac{\varphi^3}{3!})$

$= 1-\frac{\varphi^2}{2}+\frac{\varphi^4}{4!}$

$-\frac{\pi}{2}\varphi+\varphi^2+\frac{\pi}{2}\frac{\varphi^3}{3!}-\frac{\varphi^4}{3!}$

$\sin\tau = \cos\varphi$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\left[\frac{x}{2}(1-\frac{\varphi^2}{2})\right]^{1/2}}\cos\left[x\left(1-\frac{\pi\varphi}{2}+\frac{\varphi^2}{2}\right)-\frac{\pi}{4}\right]\right.$$

$= 1-\frac{\pi\varphi}{2}+\frac{\varphi^2}{2}$

$$+\cancel{\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\left[\frac{x}{2}(1-\frac{\varphi^2}{2})\right]^{3/2}}\cos\left[x(\cdot\sim\quad)-\frac{3\pi}{4}\right]} \quad \ldots\sim$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{x}{2}}}\cos\left(x-\frac{\pi p}{2}\right)$$

Nicholson (n integr)

$\cancel{\frac{\partial J_n^2(x)}{\partial n}} = 0$

$$J_n^2(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2nx\; J_0(2z\sin x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}J_{2n}(2z\sin\theta)\,d\theta$$

$$\int[J_n(z)]^2 dz = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}d\theta\int J_{2n}(2z\sin\theta)\,dz$$

$2J_\nu' = J_{\nu-1}-J_{\nu+1}$

$2J_{\nu+2}' = J_{\nu+1}-J_{\nu+3}$

$\underbrace{2(J_\nu'-J_{\nu+2}')}_{4J_{\nu+1}''} = J_{\nu-1}-2J_{\nu+1}+J_{\nu+3}$

~~$\int J_{2n}(x)\,dx$~~ $\int J_m(x)\,dx = \int J_{m+2}(x)\,dx + 2J_{m+1}(x)$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \left\|2\frac{1}{a^2 t}\int\left[y_{k+2}'^2-2y_{k+1}'^2+y_k'^2\right]dt\right.$$

$4J_{\nu+2}'' = J_\nu-2J_{\nu+2}+J_{\nu+4}$

$$= \frac{1}{2a^2 t}\int\left\{\left[J_{2k+2}(2ct)\right]^2-2\left[J_{2k+2}(2ct)\right]^2+[\quad]\right\}dt$$

$4J_{\nu-2}'' = J_{\nu-4}-2J_{\nu-2}+J_\nu$

$4J_\nu'' = J_{\nu-2}-2J_\nu+J_{\nu+2}$

$$= \frac{1}{2a^2 4t\pi}\int_0^{\pi}d\theta\int_{t_1}^{t_2}\underbrace{\left[J_{4k+8}-2J_{4k+4}+J_{4k}(4ct\sin\theta)\right]}_{J_{4k+6}''+2J_{4k+4}''+J_{4k+2}''}dt$$

$4[J_{\nu+2}''+J_{\nu-2}''+2J_\nu''] = J_{\nu+4}+J_{\nu-4}-2J_\nu$

$$\int\frac{d\theta}{4c\sin\theta}\left[J_{4k+6}'+2J_{4k+4}'+J_{4k+2}'\right]$$

Drugi raz

$$y_{kh} = J_{2k} + J_{2h}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{c^2}{4}\left[J_{2k-2} - 2J_{2k} + J_{2k+2} + J_{2h-2} - 2J_{2h} + J_{2h+2}\right]$$

$$y_{k,h-1} - 2y_{kh} + y_{k,h+1} = \cancel{J_{2k}} + J_{2h-2} - \cancel{2J_{2k}} - 2J_{2h} + \cancel{J_{2k}} + J_{2h+2}$$

<u>stimmt</u> !

a podobnie w trzywymiarowym przykładzie!

w razie $k = h = j = 2$ mamy zatem

$$y_2' = 3aJ_{22}(2ct)$$

$y'_k = J_{2k}(2ct)$

$$\frac{\partial\bar\theta}{\partial k^2} = \frac{1}{2a^2 t_1}\int\left[y'^2_{k+1} - 2y'^2_k + y'^2_{k-1}\right]dt = \frac{1}{2a^2 t}\int\left[J^2_{2k+2} - 2J^2_{2k} + J^2_{2k-2}\right]dt$$

$$= \frac{1}{2a^2\pi(t_1-t_2)}\int_0^\pi d\theta \int \underbrace{\left(J_{4k+4} - 2J_{4k} + J_{4k-4}\right)}_{4\left(J''_{4k+2} + 2J''_{4k} + J''_{4k-2}\right)} dt$$

$$\int J''(4ct\sin\theta)\,dt = \frac{J'(4ct\sin\theta)}{4c\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\delta a^2\pi c(t_1-t_2)}\underbrace{\int \frac{d\theta}{\sin\theta}\left(J'_{4k+2} + 2J'_{4k} + J'_{4k-2}\right)}$$

$$2J'_{n+2} = J_{n+1} - J_{n+3} = \frac{x}{2\nu}(J_n - J_{n+4})$$

$$4J'_n = 2(J_{n-1} - J_{n+1}) = \frac{2x}{2\nu}(J_{n-2} - J_{n+2})$$

$$2J'_{n-2} = J_{n-3} - J_{n-1} = \frac{x}{2\nu}(J_{n-4} - J_n)$$

$$2\left(J'_{n+2} + 2J'_n + J'_{n-2}\right) =$$

$= J$

$$\frac{\partial\bar\theta}{\partial t} = \int\frac{\partial}{\partial t}(y'^2)\,dt = y'^2\Big|_{t_1-t_2} = \underline{J^2_{2k}(2ct)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{J_{4k}(4ct\sin\theta)\,d\theta}{t_1-t_2}$$

$$2\left[J'_{n+2} + 2J_n + J'_{n-2}\right] = \underbrace{J_{n-3} + J_{n-1}}_{\frac{2(n-2)}{x}J_{n-2}} - \underbrace{J_{n+1} - J_{n+3}}_{\frac{2(n+2)}{x}J_{n+2}} = \frac{2n}{x}(J_{n-2} - J_{n+2}) - \frac{4}{x}(J_{n-2} + J_{n+2})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_{k+1} + E_{k-1}) = \frac{1}{\pi(t_1-t_2)}$$

$$\frac{\Delta\theta_k}{\Delta k^2} = \frac{1}{2a^2\pi}\int_0^\pi d\theta\left[J_{4k+4} - 2J_{4k} + J_{4k-4}(4ct\sin\theta)\right]$$

$$\frac{\partial\theta_k}{\partial t} = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\pi d\theta\, J_{4k}(4ct\sin\theta)$$

$$= \frac{4c}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\, J'_{4k}(4ct\sin\theta)$$

$$= \frac{2c}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\left[J_{4k-1} - J_{4k+1}\right]^x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\vdots\quad \frac{2\nu}{x}J_\nu = J_{\nu-1} + J_{\nu+1}$$

$$\left[\frac{2\nu}{x}J'_\nu - \frac{2\nu}{x^2}J_\nu = J'_{\nu-1} + J'_{\nu+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[J_{\nu-2} - \cancel{J_\nu} - J_{\nu+2}\right]$$

$$\frac{2(4k-1)}{x}J_{4k-1} = J_{4k-2} + J_{4k}$$

$$\frac{2(4k+1)}{x}J_{4k+1} = J_{4k} + J_{4k+2}$$

+	-
3	5
+	9

~~(4k-3) 2(4k+3)~~

$(4k-1) - (4k+1) + (4k+3) - (4k+5) + (4k+7) - (4k+9)$

~~4k+2~~

$$J_{\nu-1} = J'_\nu + \frac{\nu}{x} J_\nu$$

$$J_\nu = J'_{\nu+1} + \frac{\nu+1}{x} J_{\nu+1}$$

$$J_{\nu+1} = \frac{\nu}{x} J_\nu - J'_\nu$$

$$= \frac{\nu}{x}\left(\frac{\nu-1}{x} J_{\nu-1} - J'_{\nu-1}\right) -$$

$$\sum_0^\lambda (-1)^\lambda J_{2\lambda+1} = \frac{1}{\pi}\sum (-1)^\lambda \int_0^\pi \cos[x\sin\omega - (2\lambda+1)\omega]\,d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int \cos(x\sin\omega)\cos(2\lambda+1)\omega + \sin$$

$$= \frac{1}{\pi}\int \cos(x\sin\omega)\sum_0^\lambda(-1)^\lambda \cos((2\lambda+1)\omega) + \int_0^\pi \sin(x\sin\omega)\sum_0^\lambda (-1)^\lambda \sin((2\lambda+1)\omega)\,d\omega$$

$$\sum e^{i(2\lambda+1)\omega} = \sum(\cos(2\lambda+1)\omega + i\sin(2\lambda+1)\omega) = \cancel{e^{i\omega}\cdot\sum e^{2\lambda i\omega} = e^{i}}$$

$$= e^{i\omega}[1+e^{2i\omega}+e^{4i\omega}+\dots e^{2\lambda i\omega}] \qquad x = e^{2i\omega}$$

$$\underbrace{[1+x+x^2+\dots x^\lambda]}_{S} \qquad S - Sx = 1-x^{\lambda+1}$$

$$S = \frac{1-x^{\lambda+1}}{1-x}$$

$$\Sigma = e^{i\omega}\,\frac{1-e^{2i\omega(\lambda+1)}}{1-e^{2i\omega}} = -\frac{1-e^{2i\omega(\lambda+1)}}{(2i)\frac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{2i}} = \frac{i}{2}\,\frac{1-e^{2i\omega(\lambda+1)}}{\sin\omega}$$

$$= \frac{i}{2}\,\frac{1-\cos 2\omega(\lambda+1) - i\sin 2\omega(\lambda+1)}{\sin\omega}$$

$$\sum\cos(2\lambda+1)\omega = \frac12\,\frac{\sin 2\omega(\lambda+1)}{\sin\omega}$$

$$\sum\sin(2\lambda+1)\omega = \frac12\,\frac{1-\cos 2\omega(\lambda+1)}{\sin\omega}$$

$$\Sigma = \sum_0^\lambda(-1)^\lambda J_{2\lambda+1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(x\sin\omega)\,\sin 2\omega(\lambda+1)}{\sin\omega}\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\frac{\sin(x\sin\omega)\,[1-\cos 2\omega(\lambda+1)]}{\sin\omega}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2}\cancel{\sin x}\left(1 - \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin 2\omega(\lambda+1)}{2(\lambda+1)}\Big|_0^\pi\right) + \frac{1}{2\pi}\cos x\,\frac{\cos 2\omega(\lambda+1)}{2(\lambda+1)}\Big|_0^\pi$$

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin\omega)\sin 2\omega(\lambda+1)\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\cos(x\sin\omega)\,[1-\cos 2\omega(\lambda+1)]\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\cos(x\sin\omega)\,d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\cos[x\sin\omega - 2\omega(\lambda+1)]\,d\omega$$

$$= \frac12 J_0(x) - \frac12 J_{2\lambda+2}(x)$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\frac{\sin(x\sin\omega)\,d\omega}{\sin\omega} + \frac{1}{2\pi}\int\frac{\sin[x\sin\omega - 2\omega(\lambda+1)]}{\sin\omega}\,d\omega$$

$J_{4k+4} + J_{4k+2}$

$\quad - J_{4k+2} - J_{4k}$

$\qquad - J_{4k} - J_{4k-2}$

$\qquad\quad + J_{4k-2} + J_{4k-4}$

$-3+5-7-$

Wyciąg kiedy cały szereg od 0 do k:

$$\frac{4c}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \sum_{k=0}^{k} J'_{4k}(4ct\sin\theta) = \frac{2c}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \sum \left[J_{4k-1} - J_{4k+1}\right] = \frac{2c}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \sum_0^{\lambda=2k} J_{2\lambda+1}(-1)^\lambda$$

... końcowe: $J_\nu = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right)$

$$J_{4k-1} = \sqrt{\frac{2}{4\pi ct\sin\theta}}\sin\left(4ct\sin\theta - \frac{8k-3}{4}\pi\right)$$

$$J_{4k+1} = \dots\dots \quad \left(\dots - \frac{8k+1}{4}\pi\right) = \left[\dots - \frac{8k-3}{4}\pi - \pi\right]$$

$$= - J_{4k-1}$$

nie prawda o ile $\frac{p^2}{x}$ nie jest bardzo

$$+ \frac{4c}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \sum J_{4k-1}$$

$$= \frac{4c}{\pi}k\int_0^\pi \frac{\sin\theta}{\sqrt{2\pi ct\sin\theta}}\,d\theta = \frac{4ck}{\pi\sqrt{2\pi ct}}\int_0^\pi \sqrt{\sin\theta}\,d\theta$$

$$\sum_0^\infty (-1)^\lambda J_{2\lambda+1}(x) = \frac{\sin x}{2}$$

$$\int_0^\pi \sin\theta \sin(4ct\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \underbrace{\left[\cos((4ct+1)\sin\theta) - \cos((4ct-1)\sin\theta)\right]}\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[J_0(4ct+1) - J_0(4ct-1)\right]$$

tłed pochodzi od punktu $k=0$ gdzie przyjęcie mniej niezgodne

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dn \underbrace{\int_0^\infty J_0\left(\frac{2\omega}{\tau}\right)\cos n(\omega - t)\,d\omega}$$

$$\cos nt \int_0^\infty J_0\left(\frac{2\omega}{\tau}\right)\cos n\omega\, d\omega + \sin nt\int_0^\infty J_0\left(\frac{2\omega}{\tau}\right)\sin n\omega\, d\omega$$

$$J_n^2(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi J_{2n}(2z\sin\theta)\,d\theta = \frac{2z}{4n\pi}\int_0^\pi \left(J_{2n-1} + J_{2n+1}\right)\sin\theta\, d\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\quad 2J_n J'_n(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\; J'_{2n}(2z\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\left(J_{2n-1} - J_{2n+1}\right)$$

$$\frac{n}{z}J_n^2(z) + J_n J'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\; J_{2n-1}$$

$$J_n\left[\frac{J_{n-1} + J_{n+1}}{2} + \frac{J_{n-1} - J_{n+1}}{2}\right] = J_n J_{n-1} =$$

$$\int x^{n+1} J_n(x)\,dx = x^{n+1} J_{n+1}(x)$$

$$\int J_1(x)\,dx = 2\sum_{\lambda=0}^{\infty} J_{2\lambda+1}(x)$$

$$\frac{x}{2} = J_1 + 3J_3 + 5J_5 \dots$$

$$1 = J_0 + 2J_2 + 2J_4$$

$$\sin x = 2J_1 - 2J_3 + 2J_5 -$$

$$\cos x = J_0 - 2J_2 + 2J_4 - \dots$$

String loaded with particles

End A forced to vibrate $y_0 = C \sin pt$

" B ~~[illegible]~~ $y_0 = 0$

$y' = Cp \cos pt$

$\int \frac{m y'^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m (Cp)^2}{2} = \alpha \theta$

represents rod heated at one end to temperature $C^2 p^2$ and the other end held at temperature $0°$

Przypuśćmy ~~[illegible]~~ ocena wielkości p $\frac{T}{lm} = c^2$

chodzi o to czy $p \gtrless 2c$

Zamiast $\frac{T}{l}$ w razie longitudinalnych jest przyjęty $\frac{\varepsilon}{l} = El$ $c^2 = \frac{El}{m}$

$m \frac{d^2 x_k}{dt^2} = \frac{x_{k+1} - x_k}{l} \varepsilon - \dots$ ~~jeżeli [illegible]~~ $\varepsilon = El^2$ $c = \sqrt{\frac{El}{m}}$

$l = 10^{-7}$ $m = \rho l^3$

~~[illegible]~~ ~~$p = [illegible]$~~ przypuśćmy $\left(\frac{Cp}{2}\right)^2 = [50000]^2$ temperatura

$p = \frac{50000 \sqrt{2}}{C}$

C nie może być ~~[illegible]~~ większe niż 10^{-7}

więc $p > \frac{5.10^4 \sqrt{2}}{10^{-7}} = 7.10^{11}$

~~$E = 1000.10^9$~~

~~$= 10^{12}$~~

$c = \sqrt{\frac{El}{\rho l^3}} = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$

$= \frac{10^5}{10^{-7}} = 10^{12}$

$2c = 2.10^{12}$

więc obie wielkości tego samego rzędu

naturalnie bo to oznacza tylko rozkład dynamiczny danego ciała!

$p = 10^{12}$

$\tau = 6\,10^{-12}$

~~[illegible]~~

temu odpowiadałaby długość fal świetlnych

$\lambda = 18.10^{-2} = 0.2$ cm

Tak więc widzimy jeśli p podstawić a od tego wynik w pierwszym wyrazie całości.

Raczej ciekawszy inny sposób: Supponujmy wszystkie cząstki w pozycji normalnej i w początku, tylko punkt k otrzymuje prędkość początkową a

$y_k = \sum E_i \cancel{\sin 2k\theta} \cos(2ct \sin\theta) + \sum F_i \sin 2k\theta \sin(2ct \sin\theta)$

$E_i = 0$

$F_i = \cancel{\frac{a \sin 2k\theta}{c(n+1)\sin\theta}}$ $\frac{a \sin 2k\theta}{c(n+1)\sin\theta}$ $\longrightarrow \theta = \frac{i\pi}{2(n+1)}$

$y_k = \frac{a}{c(n+1)} \sum_{i=0}^{n} \frac{\sin \frac{2hi\pi}{2(n+1)}}{\sin \frac{i\pi}{2(n+1)}} \sin \frac{2ki\pi}{2(n+1)} \sin\left(2ct \sin \frac{i\pi}{2(n+1)}\right)$

$\frac{i}{n+1}\frac{\pi}{2} = \varphi$

$\frac{\pi}{2(n+1)} = d\varphi$

dla $n = \infty$:

~~$y'_k = 2a \sum \sin$~~

$y'_k = \frac{4a}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin 2h\varphi \sin 2k\varphi}_{-\cos 2(h+k)\varphi + \cos 2(h-k)\varphi} \cancel{\cos}(2ct \sin\varphi)\, d\varphi$

$J_n(x)$

$n = 2(h-k)$

$x = 2ct$

$y'_k = 2c \sum E_i \sin\theta \sin 2k\theta \sin(2ct \sin\theta) + \Sigma \ldots$

$\overline{y'_k}^2 = \cancel{4}c^2 \sum \cancel{E_i^2 \sin^2\theta} \sin^2 2k\theta + 2c^2 \sum F_i^2 \sin^2\theta \sin^2 2k\theta$

$= \frac{2\cancel{a}a^2 \sum}{(n+1)^2} \frac{\sin^2 2k\theta}{\cancel{\sin^2\theta}} \cancel{\sin^2\theta} \sin^2 2k\theta$

$= 2c^2$

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^4}$

$u = u^I$

$u = u^{II}$

$\frac{\partial^2 u^I}{\partial t^2} dt = a^2 \frac{\partial^4 u^I}{\partial z^4} dt$

$\frac{\partial^2 (u^I - u^{II})}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^4 (u^I - }{\partial z^4}$

$u^I - u^{II} = f$

1) $u_{t=0} = F(t)$ $\quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ $\quad u_{t=0} = F(t)$

2) $u = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad 1$

Najogólniejszy: przyjąć że kaflej posiada pewną energię kinetyczną rozdzieloną tam na n stopni swobody według prawdopodobieństwa, następnie połączony węgle z ~~struną~~ ∞ długą początkowo będącą w spoczynku

~~Jak~~

$y_k = J_{2k-1}(2ct) \quad = J_n(x)$

$4 \frac{d^2 J_n}{dx^2} = J_{n-2} - 2J_n + J_{n+2}$

$4 \frac{d^2 J_{2k-1}}{d(2ct)^2} = J_{2k-3} - 2J_{2k-1} + J_{2k+1}$

$\frac{d^2 y_k}{dt^2} = c^2 (y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1})$ stimmt

Dla punktu $k=1$:

$y_1 = J_1(2ct)$

$4 \frac{d^2 J_1}{dt^2} = (J_3 - 2J_1)c^2$

$= c^2 (y_2 - 2y_1)$

stimmt!

tylko dla punktu $k=0$ nie zgadza się gdzie $J_{-1} = -J_1$

wszystkie $J_{\text{nieparzyste}}(0) = 0$ więc $y_k(0) = 0$

Analogia przy którym w punkcie 0 udziela pewnej ilości ciepła

t. zw. $t=0$ $u=0$ ~~[illegible]~~ od czasu t do τ : $x=0$: $\frac{\partial u}{\partial x}=\alpha$

~~następnie $x=0$ $\frac{\partial u}{\partial x}=$~~ od czasu τ do ∞ : $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ [brzeg [illegible]

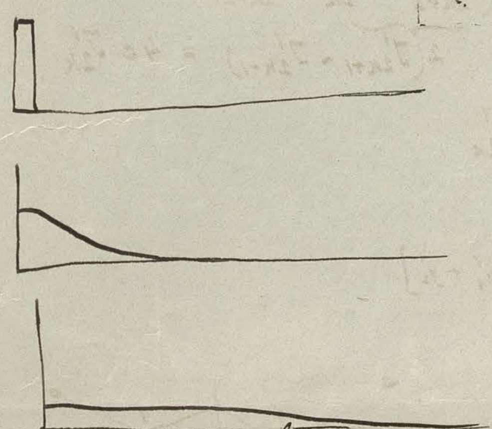
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad u=\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=+\frac{x}{4a\sqrt{t^3}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

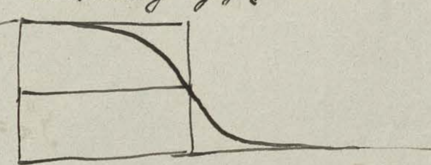
$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{2a\sqrt{t}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

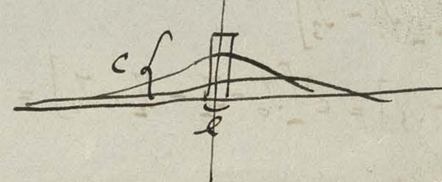
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=+\frac{x}{4a^3\sqrt{t^3}}\,e^{-\frac{x^2}{\dots}}$$

Albo też przy (graniczny z drugiej strony) który w odstępie od $x=0$ aż do $x=l$ (bardzo mało) ma początkową temp. α, zresztą jednak wszędzie początk. $\theta=0$



To samo jak gdyby zetknęły zostały dwa pręty o odstępach l i ∞





$$u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,C\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}}d\alpha=\frac{Cl}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

$$J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)-J_{n-1}(x)$$

Dla dużych x:

$$J(x)=\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2\pi x}}$$

$$J_1(x)=-\frac{dJ}{dx}=-\left[\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2\pi x}}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2\pi x^3}}\right]$$

~~$J_1=\frac{2}{x}J_0+J_1$~~

$J_1=\frac{2J}{x}$?

$$J_2=\frac{2}{x}J_1-J_0$$

$$J_2(x)=J_0+2\frac{dJ_1}{dx}=-\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2\pi x}}+\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2\pi x^3}}-\frac{3\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2\pi x^5}}$$

$$\int u\,dx=\frac{Cl}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}dx \qquad \frac{x}{2a\sqrt{t}}=z \qquad dx=dz\cdot 2a\sqrt{t}$$

$$=\frac{Cl}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-z^2}dz=\frac{Cl}{2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{n^2}{x^2} y = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) - n^2 \frac{y}{x} = 0$$

$$y = xz$$

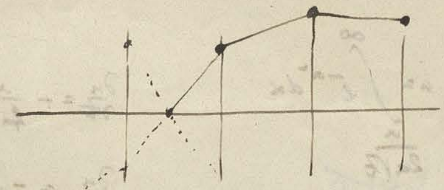
$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dz}{dx} + x\frac{d^2z}{dx^2}$$

$$2\frac{dz}{dx} + x\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{z}{x} + \frac{dz}{dx} - n^2\frac{z}{x} = 0$$

$$x\frac{d^2z}{dx^2} + 3\frac{dz}{dx} + (1-n^2)\frac{z}{x} = 0$$

Nieograniczony szereg punktów



Superpozycja

kiedy $y_k = J_{2k-1}(2ct) + J_{2k+1}(2ct)$

Wtedy $y'_k = c\,J_{2k}(2ct)$

$$y_k = c\int_0^t J_{2k}(2ct)\,dt$$

za czasie $t=0$: wszystkie $y_k = 0$

" $y'_k = 0$ z wyjątkiem $y'_0 = c$

$$y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = c\int_0^t dt\,\underbrace{\left(J_{2k+2} - 2J_{2k} + J_{2k-2}\right)}_{2\left(J'_{2k+1} - J'_{2k-1}\right)} = 4c\,J'_{2k}$$

$$y''_k = 2c^2 J'_{2k}$$

$$y_1 = c\,J_2$$

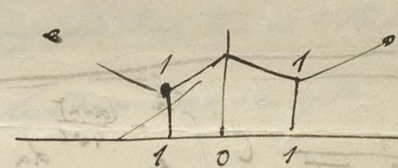
$$y_0 = c\,J_0$$

$$y''_1 = 2c^2 J'_2 = c^2\left[J_1 - J_3\right]$$

$$y'''_1 = 2c^3\left[J'_1 - J'_3\right] = c^3\left[J_0 - J_2 - J_2 + J_4\right] = c^2\left[y'_0 - 2y'_1 + y'_2\right]$$

$$y''_0 = 2c^2 J'_0 = -2c^2 J_1$$

$$y'''_0 = -4c^3 J'_1 = -2c^3\left[J_0 - J_2\right] = 2c^2\left[y'_1 - y'_0\right]$$



Atrament! to odpowiada jednemu punktowi $x=0$ ~~wychylonemu~~ wyróżnionemu początkowo z prędkością! z pozycji równowagi podczas gdy wszystkie inne $=0$.

$$y'_k = \alpha\,J_{2k}(2ct)$$

wtedy jeśli początkowe prędkości różnych punktów były dane to

$$y'_k = \sum \alpha_n\,J_{2(k-n)}(2ct)$$

wtedy po upływie długiego czasu

$$y'_k = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x - \frac{\pi}{2}2k\right)}{\sqrt{2\pi x}} = \frac{2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2ct - \pi k\right)}{\sqrt{2\pi\,2ct}} = \frac{\alpha(-1)^{k+1}\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2ct\right)}{\sqrt{\pi c t}}$$

całkowita energia kinetyczna nie może przecież być większa od $\frac{\alpha^2}{2}$!

To znaczy że ów wzór może być tylko ważny aż do pewnego k, nie zaś dla dowolnie dużych k!

Inaczej $\sum_{k=0}^{\infty} (y'_k)^2$ byłoby ∞

Dla dostatecznie krótkiego czasu t mamy $J_n(x) = \frac{x^n}{n!\,2^n}$ więc $y'_k = \alpha\frac{(2ct)^{2k}}{2k!\,2^{2k}} = \alpha\frac{(ct)^{2k}}{2k!}$

z wyjątkiem dla $k=0$

$$e^{i\omega} - e^{3i\omega} + e^{5i\omega} - e^{7i\omega} \dots (-1)^{\lambda} e^{(2\lambda+1)i\omega} = e^{i\omega}\underbrace{\left[1 + x + x^2 \sim \quad x^{\lambda}\right]}_{= e^{i\omega}\frac{1-(-e^{2i\omega})^{\lambda+1}}{1+e^{2i\omega}}} \qquad x = -e^{2i\omega}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1+(-1)^{\lambda} e^{2i\omega(\lambda+1)}}{\frac{e^{i\omega}+e^{-i\omega}}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1+(-1)^{\lambda}\cos 2\omega(\lambda+1) + (-1)^{\lambda} i \sin 2\omega(\lambda+1)}{\cos\omega} \quad \cancel{(-1)^{\lambda}(\lambda+1)\cos\frac{2\omega(\lambda+1)}{\sin\omega}}$$

$$\sum (-1)^{\lambda} \cos(2\lambda+1)\omega = \frac{1}{2}\,\frac{1+(-1)^{\lambda}\cos 2\omega(\lambda+1)}{\cos\omega}$$

$$\sum (-1)^{\lambda} \sin(2\lambda+1)\omega = \frac{1}{2}(-1)^{\lambda}\,\frac{\sin 2\omega(\lambda+1)}{\cos\omega}$$

$\omega = \frac{\pi}{2}$

$\omega = \frac{\pi}{2} - \varphi$

$\sin(2\lambda+1)(\frac{\pi}{2}-\varphi) = \cancel{\sin(2\lambda+1)\frac{\pi}{2}\cos(2\lambda+1)\varphi + \dots}\ \sin(2\lambda+1)\varphi$

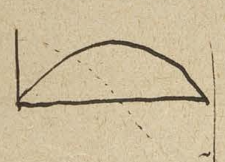
$\Sigma \sin(2\lambda+1)\varphi$

$\sin(2\pi - 2\varphi)(\lambda+1) = -\sin 2\varphi(\lambda+1)$

$$S = \sum_0^{\lambda} (-1)^{\lambda} J_{2\lambda+1} = \frac{1}{2\pi}\int \cos(x\sin\omega)\,\frac{1+(-1)^{\lambda}\cos 2\omega(\lambda+1)}{\cos\omega}\,d\omega + \sin(x\sin\omega)\,\frac{(-1)^{\lambda}\sin 2\omega(\lambda+1)}{\cos\omega}.$$

$$= \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}\frac{\cos(x\sin\omega)}{\cos\omega}\,d\omega}_{=0} + (-1)^{\lambda}\int \frac{\cos(x\sin\omega - 2\omega(\lambda+1))}{\cos\omega}\,d\omega$$

$$\cancel{\int \cos\left(\frac{x\sin\omega}{x\cos\omega}\right) d\omega = \frac{\sin(x\sin\omega)}{x\cos\omega} - \frac{1}{x}\int \frac{\sin(x\sin\omega)}{\cos\omega}\dots}$$



$$\int \cos(x\sin\omega)\,\frac{\cos 2\omega(\lambda+1)}{\cos\omega}\,d\omega + \int \sin(x\sin\omega)\,\frac{\sin 2\omega(\lambda+1)}{\cos\omega}\,d\omega$$

$$\overbrace{\int_0^{\pi}\cos(x\sin\omega)\left[\cos\omega - \cos 3\omega + \cos 5\omega - \dots \dots \cos(2\lambda+1)\omega\right]d\omega + }\Big\} = 0$$

$$S = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x\sin\omega)\left[\sin\omega - \sin 3\omega + \sin 5\omega \dots \sin(2\lambda+1)\omega\right]d\omega = \frac{(-1)^{\lambda}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x\sin\omega)\,\frac{\sin 2\omega(\lambda+1)}{\cos\omega}\,d\omega$$

$\cancel{\int S\,dx = \frac{1}{\pi}}$

$\omega = \frac{\pi}{2} - \varphi$

$\sin 3\omega = \sin(3\frac{\pi}{2} - 3\varphi) = -\cos 3\varphi$

$\sin 5\omega = \sin(\frac{5\pi}{2} - 5\varphi) = \cos 5\varphi$

$\dots\dots$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x\cos\varphi)\left[\cos\varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \dots \dots\right]d\varphi$$

Całość energii kwant. mieszczącej od $-k$ do k:

$$E = \sum_{-k}^{k}\left[J_n(z)\right]^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta \sum$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta \sum_{-k}^{k} J_{4k}(4ct\sin\theta)$$

$$1+\cos z = 2J_0 + 4J_4 + \dots$$

$$1+\cos z = 2J_0 + 4J_4 + \dots$$

$$= 2(J_{-4} + J_0 + J_4) - 1 -$$

biorąc $k=\infty$ mamy: $\sum_{-\infty}^{\infty} J_{4k} = \frac{1+\cos z + \dots}{2}$

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[1+\cos(4ct\sin\theta)\right]d\theta$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}J_0(4ct) + \dots$$ więc z czasem będzie połowę energii początkowo wydzielonej [struna]

$$J_0 - 2J_2 + 2J_4 - 2J_6 \dots \infty = \cos z$$

ale jakie wartości tych energii dla skończonych k ?

$$J_0 + 2J_2 + 2J_4 + 2J_6 \dots \infty = 1$$

$z = 4ct\sin\theta$

$$E = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi} d\theta \sum_{-k}^{+k}\int_0 \cos(x\sin\omega - 4k\omega)\,d\omega$$

$$\int\left\{\cos(x\sin\omega)\sum_{-k}^{+k}\cos 4k\omega + \sin(x\sin\omega)\sum_{-k}^{+k}\sin 4k\omega\right\}d\omega$$

$$e^{\dots} + e^{-4i\omega} + 1 + e^{4i\omega} + \dots \quad e^{+4ki\omega} = e^{-4ki\omega}\left[1 + e^{4i\omega} + \dots \quad e^{8ki\omega}\right]$$

$$= e^{-4ki\omega}\frac{1-\left(e^{4i\omega}\right)^{k+1}}{1-e^{4i\omega}}$$

$$= \frac{e^{-4ki\omega} - e^{4i\omega}}{1-e^{4i\omega}} = \frac{-e^{-4ki\omega-2i\omega} + e^{2i\omega}}{\frac{e^{2i\omega}-e^{-2i\omega}}{2i}}\cdot\frac{1}{2i} = \frac{i}{2}\,\frac{e^{-4ki\omega-2i\omega} - e^{2i\omega}}{\sin 2\omega}$$

$$= 1 + \frac{e^{-4ki\omega} - 1}{1-e^{4i\omega}} = 1 - \underbrace{\frac{1-e^{-4ki\omega}}{1-e^{4i\omega}}}$$

$$= 1 + \frac{e^{-2ki\omega}}{e^{2i\omega}}\,\frac{e^{2ki\omega} - e^{-2ki\omega}}{e^{2i\omega} - e^{-2i\omega}} = 1 + e^{-2(k+1)i\omega}\,\frac{\sin 2k\omega}{\sin 2\omega}$$

$$\sum_{-k}^{+k}\cos 4k\omega = 1 + \frac{\sin 2k\omega}{\sin 2\omega}\cos 2(k+1)\omega = \frac{\sin 2\omega + \sin 2k\omega\left[\cos 2k\omega\cos 2\omega - \sin 2k\omega\sin 2\omega\right]}{\sin 2\omega}$$

$$= \frac{\sin 2\omega\cos^2 2k\omega + \cos 2\omega\sin 2k\omega\cos 2k\omega}{\sin 2\omega} = \frac{\cos 2k\omega\,\sin 2(k+1)\omega}{\sin 2\omega}$$

$$\sum \sin 4k\omega = -\frac{\sin 2k\omega\,\sin 2(k+1)\omega}{\sin 2\omega}$$

$\cos 2k\omega$

$$E = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{\pi} d\omega\,\frac{\sin 2(k+1)\omega}{\sin 2\omega}\cos(x\sin\omega + 2k\omega)$$

$$\cos(x\sin\omega)\left[\cos^2 2k\omega + \sin 2k\omega\cos 2k\omega\,\mathrm{ctg}\,2\omega\right]$$

$$-\sin(x\sin\omega)\left[\cos 2k\omega\sin 2k\omega + \sin^2 2k\omega\,\mathrm{ctg}\,2\omega\right]$$

Jeśli początkowo wszystkie prędkości i wychylenia $=0$

a od chwili $t=0$ początkowy punkt 0 zaczyna wykonywać drgania wymuszone $y_0' = A \sin \alpha t$

Superpozycja:

za czasu t_0 chwilowe prędkości $\quad y_k' = \varphi(k, t_0) \quad$ i wychylenia $y_k = \psi(k, t_0)$

$y_0' = A \sin \alpha t_0$

zmieniamy jednak
po upływie czasu $t_1 - t_0$
prędkości punktu 0 tak ażeby był

$y_0' = A \sin \alpha t_1 \quad$ przez dodanie rozwiązania takiego przy wszystkie prędkości i wychylenia $=0$ tylko punkt 0 prędkość $A \cos \alpha t_0 \, \Delta t$

$$y'_{(k)} = \varphi(k, t) + J$$

$$\varphi(k, t+dt) = \varphi(k, t) + A \cos \alpha t \, J_k(2c\,dt)$$

Rozkładamy ruch punktu 0 na

Jeśli początkowo wszystko $=0$ a od chwili $t=0$ początkowy punkt 0 zaczyna poruszać się jednostajnie!

$$y_k = \sum J_{2k}(2ct) + \cancel{1 - J_0(2c\Delta t)}$$
$$\left[1 - J_0(2c\tau)\right] J_{2k}(2c(t-\Delta\tau)) + \left[1 - J_0(4c\tau) \pm J_0(2c\tau)\left[1 - J_0(2c\tau)\right]\right] J_{2k}\, 2c(t-2\tau)$$

Zmiana czasowa ruchu punktu y_k

początkowo $\frac{d}{dt} y_k = J$

$$\dot y_k(t+\tau) = \dot y_k(t) + \tau\, \ddot y_k(t) +$$

$y_0 = f(t)$ Aż do chwili 0 ruch punktu 0 był $y_0 = f(t)$ skąd powstawały, niech

Gdyby nie był wymuszony, następujący ruch: $\dot y_k = \varphi(k, t) \qquad \dot y_0 = f(t) = \varphi(0, t)$

$\dot y_0(\tau) = \varphi(0, t+\tau)$

i zmiana w czasie τ: $\quad \dot y_k(t+\tau) = \varphi(k, t+\tau)$

ale dla utrzymania wymuszenia nakładamy ponad ten ruch jeszcze

$$\left[f(t+\tau) - \varphi(0, t+\tau)\right] J_{2k}(2c\tau)$$

$$\varphi(k, t+\tau) = \varphi(k, t) + \uparrow$$

48

$$\ddot y_k = \frac{c^2}{a^2}(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})$$

$$y_k = A\sin(\alpha t - \beta k) \qquad A\left[\underbrace{\sin(\alpha t - \beta k - \beta) + \sin(\alpha t - \beta k + \beta)}\right]$$

$$\ddot y_k = -\alpha^2 A \sin(\alpha t - \beta k) \qquad 2\sin(\alpha t - \beta k)\cos\beta - 2\sin(\alpha t - \beta k)$$

$$= -4\sin(\alpha t - \beta k)\sin^2\frac{\beta}{2}$$

$$\alpha^2 = 4c^2\sin^2\frac{\beta}{2}$$

$$\boxed{\alpha = 2c\sin\frac{\beta}{2}} \qquad \alpha t - \frac{\beta}{a}\widehat{ka}$$

$$\alpha\,dt - \frac{\beta}{a}dx = 0$$

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha a}{\beta} = \frac{ac\sin\frac{\beta}{2}}{\frac{\beta}{2}}$$

możliwe rozwiązania tylko o ile

$$\frac{\alpha}{2c} < 1$$

$$\alpha < 2c \qquad \frac{\pi}{\tau} < c$$

$$= \frac{2\pi}{\tau} \qquad \boxed{\tau > \frac{\pi}{c}}$$

dla $\tau = \frac{\pi}{c}$: $\longrightarrow \beta = \pi$, $V = 0$

Swobodne drgania jednego punktu wobec dwóch sąsiednich ustalonych

$$\ddot y_k = -2c^2 y_k$$

$$y = A\sin\alpha t$$

$$\alpha^2 = 2c^2 \qquad \alpha = c\sqrt2 = \frac{2\pi}{\tau}$$

$$\boxed{\tau = \frac{\pi\sqrt2}{c}}$$

N. p. jeśli punkt 0 zmuszony zostaje do wykonania drgania $y_0 = A\sin\alpha t$

Punkt 0 zmuszony do wykonania ruchu $y_0 = A e^{\alpha t}$

Bierzemy ogólniej: $y_k = A\sin\alpha t\, f(k)$

$$y_k = A e^{i\alpha t}\varphi(k) + B e^{-i\alpha t}\psi(k) \qquad A e^{\alpha t}\varphi_k + B e^{-\alpha t}\psi(k)$$

$$\ddot y_k = -\alpha^2 y_k$$

$$c^2 y_{k+1} - (2c^2 - \alpha^2)y_k + c^2 y_{k-1} = 0$$

$$\varphi_{k+1} - \left(2 - \frac{\alpha^2}{c^2}\right)\varphi_k + \varphi_{k-1} = 0 \qquad \varphi_{k+1} - \left(2 + \frac{\alpha^2}{c^2}\right)\varphi_k + \varphi_{k-1} = 0$$

$$\varphi_k = \sin\beta k \qquad \varphi_k = \cancel{\sin\beta k} \qquad \varphi_k = e^{\beta k}$$

$$\cancel{\cos\beta = 1 + \frac{\alpha^2}{2c^2}}$$

$$2\cancel{\sin\beta k}\cos\beta + \cancel{\sin\beta k\cos\beta} - \left(2 - \frac{\alpha^2}{c^2}\right)\cancel{\sin\beta k} = 0$$

$$\cos\beta = 1 - \frac{\alpha^2}{2c^2} \qquad \text{o ile } \alpha < 2c \qquad \frac{e^{2\beta} + 2 + e^{-2\beta}}{4} = 1 - \frac{\alpha^2}{c^2} + \frac{\alpha^4}{4c^4}$$

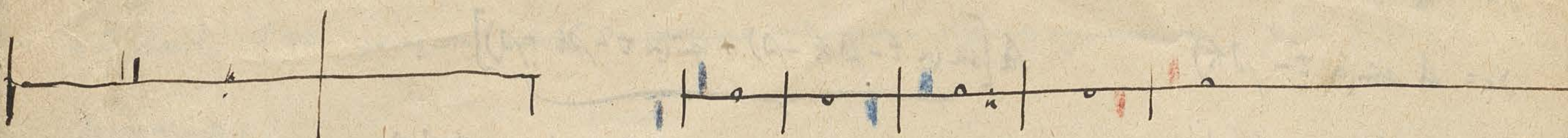
także widzimy

$$\varphi_k = e^{\pm\beta k} \qquad \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} = \sqrt{-\frac{\alpha^2}{c^2} + \frac{\alpha^4}{4c^4}}$$

$$e^\beta - \left(2 - \frac{\alpha^2}{c^2}\right) + e^{-\beta} = 0 \qquad e^{\pm\beta} = 1 - \frac{\alpha^2}{2c^2} \pm \sqrt{-\frac{\alpha^2}{c^2} + \frac{\alpha^4}{4c^4}} \qquad e^\beta = 1 + \frac{\alpha^2}{2c^2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{c^2} + \frac{\alpha^4}{4c^4}}$$

$$\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} = 1 - \frac{\alpha^2}{2c^2} \qquad \text{o ile } \frac{\alpha^2}{4c^2} > 1 \qquad \alpha > 2c$$

~~III~~ Łańcuch ograniczonej długości ($N = 2m$) punktów w środku puszczony



$$j_k = J_{2k}(2ct) - J_{2(2m-k)}(2ct) - J_{2(2m+k)} + J_{2(4m-k)} + J_{2(4m+k)} -$$

$$= \begin{cases} J_{2k} - J_{2(N-k)} + J_{2(2N-k)} - J_{2(3N-k)} + \dots \\ \quad - J_{2(N+k)} + J_{2(2N+k)} - J_{\cdot} - \end{cases}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \int \cos[x \sin\omega - 2(mN+k)\omega]\, d\omega + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \int \cos[x \sin\omega) - 2(mN-k)\omega]\, d\omega$$

$$\int \cos(x \sin\omega)\left[\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \cos 2(mN+k)\omega + \sum_{1}^{\infty} \cos 2(mN-k)\omega\right] + \sin(x \sin\omega) \sum \sin \dots$$

$$= \int \cos(x\sin\omega)\left[\cos 2k\omega + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \cos 2(mN-k)\omega\right] +$$

$$-e^{2i\omega(N-k)} + e^{2i\omega(2N-k)} - e^{2i\omega(3N-k)} + \dots =$$

$$+ e^{-2i\omega k}\left[(e^{2i\omega})^N + (e^{2i\omega})^{2N} - (e^{2i\omega})^{3N} + \dots\right.$$

$$-x + x^2 - x^3 \dots = \frac{-x}{1-x}$$

$$= \frac{e^{-2i\omega k} \cdot e^{2i\omega N}}{e^{2i\omega N} - 1} = \frac{e^{-2i\omega k + i\omega N}}{e^{i\omega N} - e^{-i\omega N}} = \frac{-i}{2}\,\frac{e^{i\omega(N-2k)}}{\sin\omega N}$$

$$\sum_{1} \cos \dots = \frac{1}{2}\,\frac{\sin(\omega(N-2k))}{\sin\omega N} \qquad \sum \sin = -\frac{1}{2}\,\frac{\cos(\omega(N-2k))}{\sin\omega N}$$

$$\int\left\{\cos(x\sin\omega)\left[\cos 2k\omega + \frac{1}{2}\,\frac{\sin\omega(N-2k)}{\sin\omega N}\right] - \sin(x\sin\omega)\,\frac{1}{2}\,\frac{\cos\omega(N-2k)}{\sin\omega N}\right\} d\omega$$

$$= \int \cos(x\sin\omega)\cdot\cos 2k\omega - \frac{1}{2}\int \cancel{\sin\omega(N-2k)}\; \frac{\sin[x\sin\omega - \omega(N-2k)]}{\sin\omega N}\, d\omega$$

$$V = \alpha \sum_{-\infty}^{+\infty} (y_{k+1} - y_k)^2 \qquad T = \frac{m}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \dot{y}_k^2 \qquad \boxed{c^2 = \frac{2\alpha}{m}}$$

$$m \ddot{y}_0 = +2\alpha(y_1 - 2y_0 + y_{-1})$$

$$4mc^2 J_0'' = +2\alpha(\cancel{J_1 - 2J_0 + J_{-1}}) \longrightarrow \underbrace{J_2 - 2J_0 + J_2}_{-2J_1' + 2J_{-1}'} = 4J_0''$$

$$mc^2 = 2\alpha$$

$$y_0(t) = y_0 J_0 + y_1 J_2 + y_2 J_4 + y_3 J_6 \qquad + \dot{y}_0 \int J_0 dt + \dot{y}_1 \int J_2 dt + \dot{y}_2 \int J_4 dt$$

$$+ y_{-1} J_2 + y_{-2} J_4 + \cdots \qquad + \dot{y}_{-1} \int J_2 dt + \dot{y}_{-2} \int J_4 dt \cdots$$

$$\dot{y}_0(t) = 2c\Big[y_0 J_0' + (y_1 + y_{-1}) \overset{J_1 \dots}{J_2'} + (y_2 + y_{-2}) J_4' \cdots \Big] + \Big[\dot{y}_0 J_0 + (\dot{y}_1 + \dot{y}_{-1}) J_2 + (\dot{y}_2 + \dot{y}_{-2}) J_4 + \cdots \Big]$$

$$= c\Big[y_0 J_{-1} - y_0 J_1 + y_2 J_3 - y_2 J_5 + y_1 J_1 - y_1 J_3 + y_{-1} J_3 - y_{-1} J_1\Big] \qquad = c\Big[J_1(y_1 - y_0) + J_3(y_2 - y_1) + J_5(y_3 - y_2) + \cdots + J_1(y_0 - y_{-1}) + J_3(y_{-1} - y_{-2}) + \cdots\Big]$$

$$\frac{2\alpha y_m}{\alpha y^2} \qquad c^2 = \frac{2\alpha}{m}$$

$$y_1(t) = \Big[y_1 J_0 + (y_2 + y_0) J_2 + (y_3 + y_{-1}) J_3 + \cdots \Big] + \Big[\dot{y}_1 \int J_0 dt + (\dot{y}_2 + \dot{y}_0) \int J_2 dt + \cdots \Big]$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{2}{mc^2} \qquad \alpha = \frac{mc^2}{2}$$

Prawdopodob. pewnego układu:

$$W(y_0 y_1 \cdots) = A e^{-\gamma(V+T)} = A e^{-\gamma\left[\alpha\left\{(y_0 - y_1)^2 + (y_1 - y_2)^2 + \cdots (y_{n-1} - y_n)^2 + (y_0 - y_{-1})^2 + (y_{-1} - y_{-2})^2 + \cdots\right\} + \frac{m}{2}\left\{\dot{y}_0^2 + \dot{y}_1^2 + \cdots + \dot{y}_{-1}^2 + \cdots\right\}\right]}$$

$$\iiint \cdots W = 1 = A\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\gamma m}}\right)^{2n+1} \int e^{-\gamma\alpha\left\{(y_0 - y_1)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (y_0 - y_{-1})^2 + (y_{-1} - y_{-2})^2 \cdots\right\}} dy_0\, dy_1\, dy_{-1} \cdots$$

$$\cancel{= \sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}} \int dy_1\, e^{-\gamma\frac{\alpha}{2}\left[(y_1 - y_{-1})^2 + 2(y_1 - y_2)^2 + 2(y_{-1} - y_{-2})^2 \cdots\right]} dy_{-1} \cdots}$$

(zupełne całkowanie od y_n!) $= A\left[\sqrt{\frac{2\pi}{\gamma m}}\right]^{2n+1}\left[\sqrt{\frac{\pi}{\gamma\alpha}}\right]^{2n} \cancel{= A\left(\frac{4\pi^2 c^2}{\gamma^2 m^2}\right)^{2n} = A\left(\frac{2\pi c}{\gamma m}\right)}$

$$\frac{m}{2}\overline{\dot{y}_0^2(t)} = \frac{m}{2} \iiint W\left\{4c^2\left[y_0 J_0' + \cdots\right]^2 + \left[\dot{y}_0^2 J_0^2 + \dot{y}_1^2 J_2^2 + \dot{y}_{-1}^2 J_2^2 + \cdots\right]\right\}$$

$$= \frac{m}{2}\left\{\frac{1}{\gamma m}\left[J_0^2 + 2J_2^2 + J_4^2 + \cdots\right] + 4c^2 \iint\left[W\left[y_0^2 J_0'^2 + \cancel{2y_0 y_1 J_0' J_2' + y_0 y_2 J_0' J_4' + \cdots}\right] + (y_1 J_2' + \cdots)\right]^2 \Bigg\| + c^2 \iiint \underbrace{(y_1 - y_0)^2 J_1^2 + \cdots e^{-\alpha\gamma\left[(y_1 - y_0)^2 + \cdots\right]}}\right]$$

$$\cancel{2}\frac{1}{2\alpha\gamma}\left[J_0'^2 + 2J_2'^2 + \cdots\right]\Big]$$

$$= \frac{1}{4\gamma}\Big\{\underbrace{J_0^2 + 2\left[J_2^2 + J_4^2 + \cdots\right]}_{\frac{1}{2} + \frac{J_0(2x)}{2}} + 8\underbrace{\left[J_0'^2 + 2J_2'^2 + \cdots\right]}_{1 + 4J_1^2 - 2J_1(2x)}\Big\}$$

$$\frac{m}{2}\frac{c^2}{2\alpha\gamma}\left\{\begin{matrix} J_1^2 + J_3^2 + \cdots \\ + J_1^2 + J_3^2 + \cdots \end{matrix}\right\} = \frac{1}{4\gamma} 2\left[J_1^2 + J_3^2 + \cdots\right]$$

$$\frac{m}{2}\overline{\dot{y}_0^2(t)} = \frac{1}{2\gamma}\Big\{\underbrace{J_0^2 + 2\left[J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \cdots\right]}_{=1}\Big\} = \frac{1}{2\gamma}$$

$$(y_n^2 + \Theta y_n) \, e^{-\beta\alpha [y_n^2 + (y_n - y_{n-1})^2 + (y_{n-1} - y_{n-2})^2 + \dots]}$$

$$dy_n = \int [y_n^2 + \Theta y_n] \, e^{-\beta\alpha (y_n^2 + (y_n - y_{n-1})^2)} e^{-\beta \dots}$$

$$1 - \frac{\beta}{2}\frac{1}{4\beta} = 1 - \frac{1}{8}$$

$$e^{-\beta[y_n^2 + (y_n - y_{n-1})^2]} = e^{-\beta \frac{y_{n-1}^2}{2}} e^{-2\beta (y_n - \frac{y_{n-1}}{2})^2}$$

$$y_n = x + \frac{y_{n-1}}{2}$$

$$\int \dots = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} \, e^{-\beta \frac{y_{n-1}^2}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y_n e^{\dots} dy_n = 0$$

$$\int y_n^2 e^{\dots} dy_n = e^{-\beta \frac{y_{n-1}^2}{2}} \underbrace{\left[\int x^2 e^{-2\beta x^2} + \frac{y_{n-1}^2}{4} \int e^{-2\beta x^2} dx \right]}_{\left[\frac{1}{4\beta} + \frac{y_{n-1}^2}{4}\right] \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}}$$

$$\iint y_n^2 e^{\dots} dy_n \, dy_{n-1} = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} \left(\frac{1}{4\beta} + \frac{y_{n-1}^2}{4}\right) e^{-\beta[\frac{y_{n-1}^2}{4} + (y_{n-1} - y_{n-2})^2 \dots]}$$

$$\frac{1}{32} + \frac{1}{16}$$

Jsou-li ~~zaujímány~~ supozovány konce volné:

$$\int \left[y_n^2 + \Theta y_n + C\right] e^{-\beta[(y_n - y_{n-1})^2 + (y_{n-1} - y_{n-2})^2 + \dots]} dy_n = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \left(\left[\frac{1}{2\beta} + y_{n-1}^2\right] + C\right)$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \int \left[\frac{1}{2\beta} + y_{n-1}^2 + C\right] e^{-\beta(y_{n-1} - y_{n-2})^2 + \dots} dy_{n-1} = \left[\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\right]^2 \left[\frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2\beta} + y_{n-2}^2 + C\right]$$

$$\iiint \dots dy_0 = \left(\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\right)^{n+1} \left[\frac{n+1}{2\beta} + C\right]$$

$$J_0^2 =$$

$$J_2^2 =$$

$$\frac{x^2}{8}\left[1 - \frac{x^2}{12}\right]$$

$$\frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{8 \cdot 12}$$

$$J_0'^2 = J_1 = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{8}\right)$$

$$J_2' = \frac{x}{4} - \frac{x^3}{24}$$

$$\left(1 - \frac{(2ct)^2}{4} + \frac{(2ct)^4}{64}\right)^2 = 1 - \frac{(2ct)^2}{2} + \frac{3}{32}(2ct)^4 - \dots$$

$$+ \frac{(2ct)^4}{64}$$

$$\left\{\frac{(2ct)^2}{8}\left[1 - \frac{(2ct)^2}{12}\right]\right\}^2 =$$

$$\frac{7}{64}$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16}$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{x^4}{48}$$

12

4

3.64

192

4

5

początkowe wartości: $x_{ijk}(0) = \left(\sum_{\beta\gamma} a_{i\beta\gamma} + \sum_{\alpha\gamma} a_{\alpha j\gamma} + \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta k}\right)$

$$x_{ijk} = \sum \cancel{a_{\alpha\beta\gamma}\left[J_{2(\alpha-i)} + J_{2(\beta-j)} + J_{2(\gamma-k)}\right]}$$

$$= \sum_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma}\left[J_{2(i-\alpha)} + J_{2(j-\beta)} + J_{2(k-\gamma)}\right] + \sum_{\alpha\beta\gamma} u_{\alpha\beta\gamma}\int_0^t \left[J_{2(i-\alpha)} + J_{2(j-\beta)} + J_{2(k-\gamma)}\right]dt$$

$$x_{i-1\,jk} = \sum a_{\alpha\beta\gamma}\left[J_{2(i-\alpha)-2} + J_{2(j-\beta)} + J_{2(k-\gamma)}\right] + \sum \ldots \quad ---$$

$$\dot x_{ijk} = 2c\sum_{\alpha\beta\gamma}\left\{a_{\alpha\beta\gamma}\left[J'_{2(i-\alpha)} + J'_{2(j-\beta)} + J'_{2(k-\gamma)}\right] + u_{\alpha\beta\gamma}\left[J_{2(i-\alpha)} + J_{2(j-\beta)} + J_{2(k-\gamma)}\right]\right\}$$

$$\dot x_{ijk}(0) = 2c\left[\sum_{\beta\gamma} u_{i\beta\gamma} + \sum_{\alpha\gamma} u_{\alpha j\gamma} + \sum_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta k}\right]$$

$$(x_{ijk} - x_{i-1\,jk}) = \sum a_{\alpha\beta\gamma}\left[J_{2(i-\alpha)} - J_{2(i-\alpha)-2}\right]$$

$\alpha = i$ $\quad$ $\alpha = i-1$

początkowe wartości: $(x_{ijk} - x_{i-1\,jk})(0) = \sum_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma}\left[J_{2(i-\alpha)} - J_{2(i-\alpha)-2}(0)\right] = \sum_{\beta\gamma}(a_{i\beta\gamma} - a_{i-1\,\beta\gamma})$ więc byłoby to samo we wszystkich punktach płaszczyzny i ?

zatem $$V(0) = \alpha\sum\sum\sum\begin{bmatrix}(a_{ijk}-a_{i-1\,jk})^2 + (a_{ijk}-a_{i\,j-1\,k})^2 + (a_{ijk}-a_{ij\,k-1})^2 \\ + (b_{ijk}-b_{i-1\,jk})^2 + \ldots \\ + (c_{i\ldots} \quad)^2 + \ldots \quad \ldots\end{bmatrix}$$

więc rozkład x_{ijk} nie jest ~~dowolny~~ ogólny!

tylko byłoby to w razie:

$$x = \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\eta) + \varphi_3(\zeta)$$

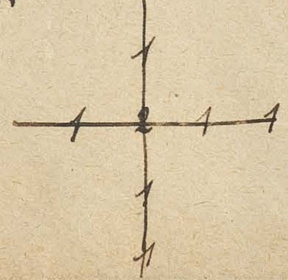
$$x_{111} = a_{111} + a_{112} + a_{121} + a_{122} \,|\, + a_{111} + a_{112} + a_{211} + a_{212} + |$$

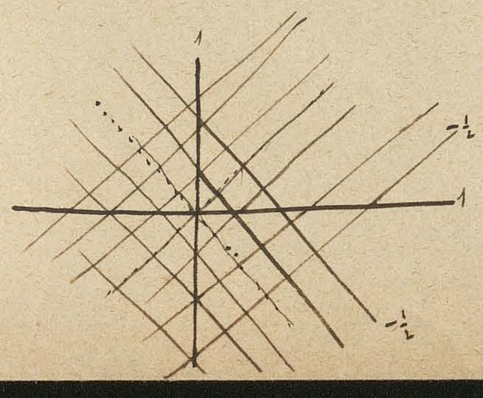
---

można także przyjąć $\quad x_{ijk} = a\,J_{2(i-j)} + b\,J_{2(i-k)} + c\,J_{2(j-k)}$ $\quad$ to znika za czasu $t=0$ wszędzie z wyjątkiem

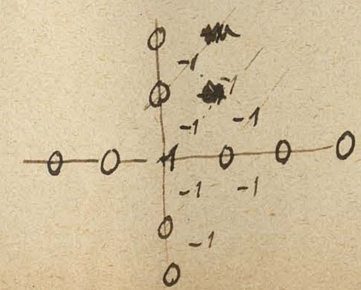
$J_{2(i+j)}$ $\quad$ $J_{2(i+k)}$ $\quad$ --- $\quad$ płaszczyzn $i = \pm j$ $\quad i = \pm k$ $\quad j = \pm k$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[J_{2(i-j)+2\nu} + J_{2(i+j)+2\nu}\right]$$





=



$$J_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\omega - n\omega)\,d\omega$$

$$J_{2\nu} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\sin\varphi)\cos(2n\varphi)\,d\varphi$$

$$J_{2\nu+2} - 2J_{2\nu} + J_{2\nu-2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\sin\varphi)\underbrace{\Big[\cos(2n+2)\varphi - 2\cos(2n\varphi) + \cos(2n-2)\varphi\Big]}_{2\cos 2n\varphi\cos 2\varphi} +$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\sin\varphi)\cos 2n\varphi\,(\cos 2\varphi - 1)\,d\varphi$$

$$= \frac{2}{\pi}\int \sin^2\varphi\cos(z\sin\varphi)\cos 2n\varphi\,d\varphi$$

$$= J''_{2\nu}$$

$$S = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\sin\varphi)\cos 2i\varphi\cos 2j\varphi\cos 2k\varphi\,d\varphi$$

$$\Delta_i + \Delta_j + \Delta_k = 3\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\sin\varphi)\cos 2i\varphi\cos 2j\varphi\cos 2k\varphi\,\sin^2\varphi\,d\varphi$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} S = \int \ldots \qquad \uparrow \quad =$$

$z = 0$

$$\psi = 2\varphi$$

$$S = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2i\varphi)\cos 2j\varphi\cos 2k\varphi\,d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos i\psi\cos j\psi\cos k\psi\,d\psi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\Big[\cos(i+j)\psi + \cos(i-j)\psi\Big]\cos k\psi\,d\psi = \frac{1}{4\pi}\int\Big[\cos(i+j+k)\psi + \cos(i+j-k)\psi + \cos(i-j+k)\psi + \cos(i-j-k)\Big]d\psi$$

$$= \frac{1}{4\pi}\Big[\frac{\sin(i+j+k)\pi}{i+j+k} + \frac{\sin(i+j-k)\pi}{i+j-k} + - - - - \Big]$$

$= 0$ jeśli albo $i+j+k = 0$
$i+j-k = 0$
$\cdot\ \text{---}\ \cdot\ -$

wtedy to wychodzi na to samo jak $J_{2(i+j+k)}$ etc

53

Sietka

~~Δ_{ij}~~ $m\ddot{y}_{ij} = 2\alpha\left[(y_{i-1\,j} - 2y_{ij} + y_{i+1\,j}) + (y_{i\,j-1} - 2y_{ij} + y_{i\,j+1})\right]$

ponieważ J_{i-j} da się wyrazić jako liniowa funkcja $J_0\ J_1$ przyjmujemy $y_{ij} = J_0(x)\,\Phi_{ij}(x) + J_1\,\Psi_{ij}(x)$

$$\dot{y} = 2c\left[J_0'\,\Phi + J_1'\,\Psi\right] + J_0\,\Phi' + J_1\,\Psi'$$

$$\ddot{y} = 4c^2\left[J_0''\,\Phi + J_1''\,\Psi\right] + 4c\left[\underset{-J_1}{J_0'}\,\Phi' + J_1'\,\Psi'\right] + J_0\,\Phi'' + J_1\,\Psi''$$

$$= J_0\left[\Phi'' + 4c\,\Psi' - 4c^2\,\Phi - \frac{4c^2}{x}\Psi\right]$$

$$+ J_1\left[\Psi'' - 4c\frac{\Psi'}{x} - 4c\,\Phi' - 4c^2\,\Psi + \frac{8c^2}{x^2}\Psi + \frac{4c^2}{x}\Phi\right]$$

$$2J_1' = J_0 - J_2$$

$$\frac{2}{x}J_1 = J_0 + J_2$$

$$2\left(J_1' + \frac{J_1}{x}\right) = 2J_0$$

$$J_1' = J_0 - \frac{J_1}{x}$$

$$J_1'' = J_0' - \frac{J_1'}{x} + \frac{J_1}{x^2} = -J_1 - \frac{J_0}{x} + 2\frac{J_1}{x^2}$$

$$J_{\nu-1} = \frac{2\nu}{x}J_\nu - J_{\nu+1}$$

Albo przyjmujemy: $y_{ij} = J_{2i}\,\Phi_j + J_{2i+1}\,\Psi_j$

$$\dot{y} = J_{2i}'\,\Phi + J_{2i}\,\Phi_j'$$

$$\ddot{y} = J_{2i}''\,\Phi + 2J_{2i}'\,\Phi_j' + J_{2i}\,\Phi_j''$$

$$2J_{2i}'\,\Phi_j' + J_{2i}\,\Phi_j'' = J_{2i}\,\Delta\Phi_j + J_{2i+1}\,\Delta\Psi_j$$

$$+ 2J_{2i+1}'\,\Psi_j' + J_{2i+1}\,\Psi_j''$$

$$2J_{2i}' = J_{2i-1} - J_{2i+1} = \frac{4i}{x}J_{2i} - 2J_{2i+1}$$

$$2J_{2i+1}' = J_{2i} - J_{2i+2} \qquad \boxed{J_{2i+2} = \frac{4i+2}{x}J_{2i+1} - J_{2i}}$$

$$= 2J_{2i} - \frac{4i+2}{x}J_{2i+1}$$

$$J_{2i}\Big[\underbrace{\Phi_j'' + \frac{4i}{x}\Phi_j' + 2\Psi_j'}_{=\Delta_j^i\Phi}\Big] + J_{2i+1}\Big[\underbrace{-2\Phi_j' - \frac{4i+2}{x}\Psi_j' + \Psi_j''}_{=\Delta_j^i\Psi}\Big] = J_{2i}\,\Delta_j^i\Phi + J_{2i+1}\,\Delta_j^i\Psi$$

$$2\Psi_j' = \Delta_j^i\Phi - \Phi_j'' - \frac{4i}{x}\Phi_j'$$

$$2\Phi_j' = -\Delta_j^i\Psi + \Psi_j'' - \frac{4i+2}{x}\Psi_j'$$

$$4\Psi_j'' = 2\Delta_j^i\Phi' - 2\Phi_j''' - \frac{8i}{x}\Phi_j'' + \frac{8i}{x^2}\Phi'$$

$$2\psi'' = -\Delta^4\psi + \Delta^2\psi'' - \frac{4i+2}{x}\Delta^2\psi' - \frac{4i}{x}\left[-\Delta^2\psi' + \psi''' - \frac{4i+2}{x}\psi'\right] + \frac{4i}{x^2}\left[-\Delta^2\psi + \psi'' - \frac{4i+2}{x}\psi'\right]$$

$$-\Delta^4\psi + \Delta^2\left[\psi'' - \frac{4i+2}{x}\psi' + \frac{4i}{x}\psi - \right.$$

najlepiej przyjąć $x_{ijk} = a_{ijk} \quad J_{2[(i)+(j)+(k)]}$ w takim razie istotnie $x_{ijk}=0$ wszędzie z wyjątkiem $i=j=k=0$ nie prawda! bo w punktach $\begin{cases} i=0 \\ j=0 \\ k=0 \end{cases}$ nie spełnione

a biorąc $x_{ijk} = x_{\alpha\beta\gamma}(0)\, J_{2\underbrace{[(i-\alpha)+(j-\beta)+(k-\gamma)]}_{\nu}}$ mamy teraz z wyjątkiem $i=\alpha$, $j=\beta$, $k=\gamma$

więc będzie ogólne rozwiązanie:

$$x_{ijk} = \sum' x_{ijk}(0)$$

$$\ddot{x} = 2c \cdot 2(J_{2\nu-1} - J_{2\nu+1})$$

$$\ddot{x} = 4c^2 \cdot 4\left[J_{2\nu-2} - 2J_{2\nu} + J_{2\nu+2}\right]$$

$$\Delta^2 x = x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} = J_{2\nu-2} - 2J_{2\nu} + J_{2\nu+2}$$

$-\alpha-1$

$(-\alpha+1) = \alpha-1$

z wyjątkiem jeśli $i=0$?

wątpliwość jeśli np. $i-\alpha=0$

$i=\alpha$

$(i-1-\alpha)=+1$

$(i+1-\alpha)=+1$

$\Delta^2_i x \approx$

$J_{\nu+2} - 2J_\nu + J_{\nu+2}$ więc równanie nie będzie spełnione w punktach $i=\alpha$, $j=\beta$, $k=\gamma$

więc to nie idzie

stąd $\Delta^2 x = J_{2\nu+2} - 2J_{2\nu} + J_{2\nu-2}$

$i=1$

$J_{2\nu-2} - 2J_{2\nu} +$

Wracamy zatem do przyjęcia

$$x_{ijk} = a_{ijk}\left[J_{2(i+j+k)} + J_{2(i+j-k)} + J_{2(i-j+k)}\right]$$

to istotnie wszędzie jest ważne i ~~wszędzie~~ za czasu $t=0$ wszędzie $=0$ z wyjątkiem $i=j=k=0$

ale równie dobrze możnaby wziąć $J_{2(i+j+k)}$! zamiast jednego z tamtych ?

$i+j+k=0$

$i-j+k=0$

$-i+j+k=0$

$\Big\}\; 2(i-j)=0 \quad k=0$

$i=j=\frac{k}{2}$

$$\dot{x}_{ijk} = 2c\,a_{ijk}\left[J'_{2\ldots} + J'_{2\ldots} + J'_{2\ldots}\right] = 0 \text{ za czasu } t=0$$

Rozstrzygnąłem chyba warunki krańcowe na zewnętrznej granicy systemu

żeby się zaś przyjęło: $x_{ijk} = a\,J_{2\underbrace{(i+j+k)}_{\nu_1}} + b\,J_{2\underbrace{(i+j-k)}_{\nu_2}} + c\,J_{2\underbrace{(i-j+k)}_{\nu_3}} + d\,J_{2\underbrace{(-i+j+k)}_{\nu_4}}$

$$\Delta^2_i x = a\,(J_{\nu_1-2} - 2J_{\nu_1} + J_{2\nu_1+2}) + b\,(J_{\nu_2-2} - 2J_{\nu_2} + J_{\nu_2+2}) + c\,(J_{\ldots}\quad) + d\,(J_{2\nu_4-2} + 2J_{\ldots} \ldots)$$

$$\Delta^2_j x = a(\qquad) + b(\qquad$$

$J_p J_{-p+1} + J_{-p} J_{-p} = \frac{2\sin p\pi}{\pi x}$

$(J_p J_{-p-1})(-1)^p = ?$

$J_p J_{-p-1} = (-1)^p \frac{2\sin p\pi}{\pi x}$!

$J_0 J_1 + J J_{-1}$

$\Delta^2_{k} \alpha_1 =$ "

$c^2 \ddot{x}_{ijk} = a \left(J_{4\nu_1-2} - 2 J_{4\nu_1} + J_{4\nu_1+2} \right) + \ldots$

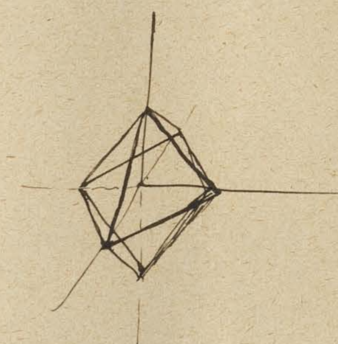
$\underline{\cancel{k} c^2 m = 6a}$

~~[illegible]~~ spełnia RR

zaczęcie $t=0$

będzie (dla $a, b, c, d > 0$) ~~będzie~~ $a J_{\nu_1}(0) + b J_{\nu_2}(0) + c J_{\nu_3}(0) + d J_{\nu_4}(0)$

$$\begin{cases} x_{ijk} = a & \text{w punktach gdzie } \nu_1 = 0 \quad i+j+k=0 \\ x_{ijk} = b & \text{"} \quad \text{"} \quad i+j-k=0 \\ x_{ij} = c & \quad \text{d.} \\ = d & \end{cases}$$



$= \frac{2}{\pi x} [\ldots \sin x]$

~~$J_0'' = -J_1' = 2(J_1 - J_0)$~~

$= J_2 - 2J_0 + J_2$

$2J_{\nu}' = J_{\nu-1} - J_{\nu+1}$

$2J_{\nu+1}' = J_{\nu} - J_{\nu+2}$

$2J_{\nu}' = J_{\nu-1} - J_{\nu+1}$

$2J_1' = J_0 - J_2$

$2J_0' = J_{-1} - J_1$

$= -2J_1$

$2J_{-1}' = J_{-2} - J_0$

$J_{\nu-2} - 2J_{\nu} + J_{\nu+2} = 2(J_{\nu-1}' - J_{\nu+1}') = 2J_{\nu}''$

$J_0 + 2[J_2 + J_4 + J_6 + \ldots] = 1$

$J_1 + 3J_3 + 5J_5 + \ldots = \frac{z}{2}$

$J_0 - 2J_2 + 2J_4 - \ldots = \cos z$

$2(J_1 - J_3 + J_5 - \ldots) = \sin z$

~~$y_0 = y_0 J_0 +$~~ poutkové vartoši

$$y_0 = y_1 J_2 + y_2 J_4 + y_3 J_6 + y_4 J_8 + \dots$$

$$+ \dot y_1 \int J_2 dt + \dot y_2 \int J_4 dt + \dot y_3 \int J_6 dt + \dots$$

$$\frac{\dot y_0}{2c} = 2c\,[y_1 J_2' + y_2 J_4' + y_3 J_6' + \dots] + \dot y_1 J_2 + \dot y_2 J_4 + \dot y_3 J_6 + \dots$$

$$y_1 = y_1 J_0 + y_2 J_2 + y_3 J_4 + y_4 J_6 + \dots$$

$$+ \dot y_1 \int J_0 dt + \dot y_2 \int J_2 dt + \dots$$

$$W(y_1 y_2 \dots \dot y_1 \dot y_2 \dots) = A e^{-h\left\{\alpha\left[(y_1-y_2)^2 + (y_2-y_3)^2 + \dots + (y_0-y_1)^2 + (y_{-1}-y_{-2})\right] + \frac{m}{2}\left[\dot y_1^2 + \dot y_2^2 + \dot y_3^2 + \dots\right]\right\}} dy_1\, dy_2 \dots d\dot y_1\, d\dot y_2 -$$

$y_1 - y_2 = x$

$$\int e^{-\beta(y_1-y_2)^2} y_1^2\, dy_1 = \int e^{-\beta x^2}(x+y_2)^2 dx = \int x^2 e^{-\beta x^2} dx + y_2^2 \int e^{-\beta x^2} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta(y_1-y_2)^2} y_1\, dy_1 = 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta(y_1-y_2)^2} dy_1 = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

$c^2 = \frac{2\alpha}{m}$

~~$\dot y_0 y = \frac{1}{2c}\left[y_1^2 J_0 J_2 + y_2^2 J_2 J_4\right]$~~

jint. od $-\infty$ do $+\infty$ stále temperature:

$$\overline{\dot y_0^2}(t) = \dot y_0^2 \Big\{ J_0^2 + \underbrace{2\left[J_2^2 + J_4^2 + \dots\right]}_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} J_0(2x) - J_0^2} \Big\} + 4c^2 \Big[y_0^2 J_0'^2 + 2 y_1^2 J_2'^2 + \dots \Big]$$

~~$J_0^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} J_0(2x)$~~ ~~$- J_1^2$~~ ~~$+$~~ $\frac{J_0(2x) + J_2(2x)}{2}$

$$\int e^{-\beta x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

$$\int x^2 e^{-\beta x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}}$$

$$\frac{\int x^2 e^{-\beta x^2}}{\int e^{-\beta x^2}} = \frac{1}{2\beta}$$

$$\int e^{-\beta\left[(y_0-y_1)^2 + (y_0-y_{-1})^2\right]} dy_0 = \int e^{-\beta\left[2y_0^2 - 2y_0(y_1+y_{-1}) + y_1^2 + y_{-1}^2\right]} dy_0$$

$$= e^{-2\beta\left[\left(y_0 - \frac{y_1+y_{-1}}{2}\right)^2 + \underbrace{\frac{y_1^2+y_{-1}^2}{2} - \left(\frac{y_1+y_{-1}}{2}\right)^2}_{+\frac{y_1^2 - 2y_{-1}y_1 + y_{-1}^2}{4}}\right]} = e^{-\frac{\beta}{2}(y_1-y_{-1})^2}\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}$$

$$e^{-\beta\left[y_0^2 + (y_0-y_1)^2\right]} = e^{-\beta(2y_0^2 - 2y_0y_1 + y_1^2)}$$

$$= e^{-2\beta\left(y_0^2 - y_0y_1 + \frac{y_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{4}\right)}$$

$$= e^{-\frac{\beta y_1^2}{2}}\, e^{-2\beta\left(y_0 - \frac{y_1}{2}\right)^2}$$

$$2 J_{k-1}' = J_{k-2} - J_k$$

$$2 J_{k+1}' = J_k - J_{k+2}$$

$$4 J_k'' = J_{k-2} - 2J_k + J_{k+2}$$

wtedy $\cancel{\#}\ y_i = a\, J_{2i}(2ct)$ zaczem $t=0$ $y_i = a$

$\dot y_i = 2ac\, J'_{2i} = \cancel{\#}\, ac\,(J_{2i-1} - J_{2i+1})$ $\|$ $\dot y = 0$

ale równie dobrze mógłoby wziąć $y_i = a\, J_{2i}(2ct) + b\, J'_{2i}(2ct)$?

Nie prawda bo wtedy $\ddot y_i$ $J''_{2i} = J_{2i-2} - 2J_{2i} + J_{2i+2}$

~~ale można by przyjąć $y_i = aJ$~~

$J_0(\sqrt{x})$

$\dfrac{J'_0(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ $-\dfrac{J'_0(\sqrt{x})}{4\sqrt{x^3}} + \dfrac{J''_0(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}}$

$-J'_{-1} + J'_{+1}$

$-J_{-2} + 2J_0 - J_2$

$J'_{2\nu} - J'_{4n-2\nu} - J'_{4n+2\nu} + J'_{8n-2\nu} + J'_{8n+2\nu} - \dots$

$= (-1)^{\nu}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(1 - 2 + 2 \dots\right) - \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{x}\Big[\frac{2\nu^2}{\mathrm{I\!I}} - \underbrace{(4n-2\nu)^2 + (4n+2\nu)^2}_{-2(16n^2+4\nu^2)} + \underbrace{(8n-2\nu)^2 + (8n+2\nu)^2}_{+2(16\cdot 4n^2+4\nu^2)} \dots$

16

Trzy wymiary:

59

$$V = \alpha \left[\sum (x_k - x_{k-1})^2 + \right.$$

$$= \sum\sum\sum \left\{ (x_{ijk} - x_{i-1\,jk})^2 + (y_{ijk} - y_{i\,j-1\,k})^2 + (z_{ijk} - z_{ijk-1})^2 \right\} \Big\| \; T = + \frac{m}{2} \left(\dot{x}_{ijk}^2 + \dot{y}_{ijk}^2 + \dot{z}_{ijk}^2 \right] $$

$$\frac{\partial V}{\partial x_{ijk}} = 2\alpha \left(- x_{i+1\,jk} + 2x_{ijk} - x_{i-1\,jk} \right)$$

$$m\ddot{x}_{ijk} = 2\alpha \left[x_{i+1\,jk} - 2x_{ijk} + x_{i-1\,jk} \right] \quad \Big\| \quad m\ddot{y}_{ijk} = 2\alpha \left[y_{i\,j+1\,k} - 2y_{ijk} + y_{i\,j-1\,k} \right] \Big\|$$

etc.

$$x_{ijk} = \sum x_{ijk}(0)\, J_{2i}(2ct) + \dot{x} \ldots \int J\,dt \quad \Big\| \quad y_{ijk} = \sum y_{ijk}(0)\, J$$

Przenoszenie energii ~~...~~ w kierunku X: $\sum'_{jk} (x_{0jk} - x_{1jk})\, \dot{x}_{0jk}$ w takim razie pozostałby poprzedni rezultat że prąd $\infty \frac{1}{t}$

ale to dlatego że tutaj energia płynie tylko w kierunku liniowym (~~...~~ (osobno X, albo Y, albo Z) i nie rozchodzi się przestrzennie

---

Jeśli zaś:

$$m\ddot{x}_{ijk} = 2\alpha \left[(x_{i-1\,jk} - 2x_{ijk} + x_{i+1\,jk}) + (x_{i\,j-1\,k} - 2x_{ijk} + x_{i\,j+1\,k}) + (x_{ijk-1} - 2x_{ijk} + x_{ijk+1}) \right] \quad \text{etc.}$$

tylko na granicy

$$\Big\| \quad m\ddot{x}_{J_1 jk} = 2\alpha \left[(x_{J-1\,jk} - x_{Jjk}) + \ldots \right]$$

to uwzględnić można za pomocą superpozycji odbitych rozwiązań ?

$$V = \sum \alpha \left\{ \left[(x_{ijk} - x_{i-1\,jk})^2 + (x_{ijk} - x_{i\,j-1\,k})^2 + (x_{ijk} - x_{ijk-1})^2 \right] + \left[(y_{ijk} \ldots)^2 - \quad \right] + \left[z_{ijk} \ldots \quad \right] \right\}$$

~~$x_{0jk} = \sum$~~ Szczególne rozwiązanie:

$$x_{ijk} = \cancel{\ldots}\; a J_{2i} + b J_{2j} + c J_{2k}$$

w czasie $t=0$: wszędzie $x=0$ z wyjątkiem wszystkich $x_{0jk} = a$

$x_{i0k} = b$

$x_{ij0} = c$ etc.

$x_{000} = a+b+c$

biorę $x_{ijk} = a J_{2i} J_{2j} J_{2k}$ nie idzie!

$$\dot{x} = 2ac \left[J'_{2i} J_{2j} J_{2k} + \ldots \right]$$

$$= ac \left[J_{2i-1} J_{2j} J_{2k} - J_{2i+1} J_{2j} J_{2k} + J_{2i} J_{2j-1} J_{2k} - J_{2i} J_{2j+1} J_{2k} \right.$$

$$\ddot{x} = \frac{ac}{2} \left\{ (J_{2i-2} - 2J_{2i} + J_{2i+2}) J_{2j} J_{2k} + J_{2i-1} J_{2j-1} J_{2k} - J_{2i-1} J_{2j+1} J_{2k} + J_{2i-1} J_{2j} J_{2k-1} - \ldots \right.$$

60

$$J_\mu(z)^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin 2n x \; J_{\lambda}(2z\sin x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi dx \sin 2nx \int_0^\pi \cos[2z\sin x \sin\omega - n\omega]\,d\omega$$

~~$\omega\,d\omega\,\varphi$~~

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \cos(\mu-\nu)\eta\,d\eta \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos[2z\cos\eta\sin\vartheta - (\mu+\nu)\vartheta]\,d\vartheta}_{J_{\mu+\nu}(2z\cos\eta)} *$$

$$J_\nu(z)\,J_\mu(z) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi \underbrace{\cos(z\sin\omega - \nu\omega)\,d\omega \;\cos(z\sin\varphi}_{} - \mu\varphi)\,d\varphi$$

$$\frac{1}{2}\Big\{ \cos[z\underbrace{(\sin\omega+\sin\varphi)}_{2\cos\left(\frac{\omega-\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega+\varphi}{2}\right)} - (\nu\omega+\mu\varphi)] + \cos[z\underbrace{(\sin\omega-\sin\varphi)}_{2\cos\frac{\omega+\varphi}{2}\sin\frac{\omega-\varphi}{2}} - (\nu\omega-\mu\varphi)]\,d\varphi\,d\omega$$

$$\frac{\omega+\varphi}{2} = \vartheta \qquad \omega = \eta+\vartheta$$

$$\frac{\omega-\varphi}{2} = \eta \qquad \varphi = \vartheta-\eta$$

$$\cos[2z\sin\eta\cos\vartheta - \nu(\eta+\vartheta) + \mu(\vartheta-\eta)]$$

$$-(\nu+\mu)\eta - (\nu-\mu)\vartheta$$

$$\cos[2z\cos\eta\sin\vartheta - \nu(\eta+\vartheta) - \mu(\vartheta-\eta)]$$

$$\cos[2z\cos\eta\sin\vartheta - (\nu+\mu)\vartheta + (\mu-\nu)\eta]$$

$$= \cos[2z\cos\eta\sin\vartheta - (\nu+\mu)\vartheta]\cos(\mu-\nu)\eta + \cos[2z\sin\eta\cos\vartheta - (\nu+\mu)\eta]\cos(\nu-\mu)\vartheta$$

$$-\sin[2z\cos\eta\sin\vartheta - (\nu+\mu)\vartheta]\sin(\mu-\nu)\eta + \sin[2z\sin\eta\cos\vartheta - (\nu+\mu)\eta]\sin(\nu-\mu)\eta$$

2

$x_{ijk}(0) = \sum_{\neq i} a_{i\,ijk} + \sum_j b_{i\,ijk} + \sum_k c_{ij(k)}$

$a\,b\,c$ nie są niezależnie dowolne

może lepiej wprowadzić $x_{ijk} = a\,(J_{2i} + J_{2j} + J_{2k})$

$x_{ijk}(0) = \sum_i + \sum_j + \sum_k a_{ijk}$

rozwiązać według a_{ijk}!

albo też wprowadzić a_{ijk} jako nowe współrzędne! zamiast x_{ijk}

---

biorę $J_{2(i+j-k)}$

$\Delta_i^2 x = J_{2\nu-2} - 2J_{2\nu} + J_{2\nu+2}$

$\Delta_j^2 x =$

$\Delta_k^2 x = J_{2\nu+2} - 2J_{2\nu} + J_{2\nu-2}$

$- J_{2i+1} J_{2j-1} J_{2k} + J_{2i+1} J_{2j+1} J_{2k} + J_{2i+1} J_{2j} J_{2k+1} - J_{2i} \ldots J_{2k+1}$

$+ J_{2i} (J_{2j-2} - 2J_{2j} \ldots) J_{2k} + J_{2i-1} J_{2j-1} J_{2k} - J_{2i+1} J_{2j-1} J_{2k} + J_{2i} J_{2j-1} J_{2k-1}$

$- J_{2i-1} J_{2j+1} J_{2k} + J_{2i+1} J_{2j+1} J_{2k} + J_{2i} J_{2j+1} J_{2k-1} - J_{2i} J_{2j+1} J_{2k+1}$

$+ J_{2i} J_{2j-1} J_{2k-1} - J_{2i} J_{2j+1} J_{2k-1} +$

Weźmy raz $\underline{x_{ijk} = a_{ijk} J_{2(i+j+k)}}$

$m\,\ddot{x} = m \left[J_{2(i+j+k)-2} - 2 J_{2(\ldots)} + J_{2(i+j+k)+2} \right] 4c^2$

$2\alpha (x_{i+1\,jk} - 2x_{ijk} + x_{i-1\,jk}) = \big[J_{2(i+j+k)-2} - 2 J_{2(\ldots)} + 2, \ldots \big] 2\alpha$

$2\alpha (x_{ij-1\,k} - \ldots) = [$

$2\alpha (\ldots) = [$

$\cancel{4} c^2 m \cancel{4} = 6\alpha$

$\underline{\underline{\frac{c^2 m}{6} = \alpha}} \qquad c^2 = \frac{6\alpha}{m}$

w takim razie $a_{ijk} = x_{ijk}(0) \Big|_{i+j+k=0}$!

= wartości przemieszczenia w płaszczyźnie $i+j+k=0$

tak samo $J_{2(i+j-k)} \quad J_{2(i-j-k)}$

jeśli zatem przyjmiemy $x_{ijk} = a \left[J_{2(i+j+k)} + J_{2(i+j-k)} + J_{2(i-j+k)} \right]$

to w czasie $t=0$ musi być wszędzie $=0$ z wyjątkiem

$$\left.\begin{aligned} i+j+k&=0 \\ i+j-k&=0 \\ i-j+k&=0 \end{aligned}\right\} \quad i=j=k=0$$

+	+	+
+	+	−
+	−	+
+	−	−
−	+	+
−	+	−
−	−	+
−	−	−

Network

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = c^2 (\Delta_h^2 w + \Delta_k^2 w)$$

$$-p^2 = c^2\left[(e^{2i\varphi} - 2 + e^{-2i\varphi}) + (e^{2i\psi} - 2 + e^{-2i\psi})\right]$$

$$= 2c^2\left[(\cos 2\varphi - 1) + (\cos 2\psi - 1)\right] = -4c^2\left[\sin^2\varphi + \sin^2\psi\right]$$

$$w = \sum \left[e^{2ik\varphi}\underbrace{(A e^{2ik\psi} + B e^{-2ik\psi})}_{M\cos 2k\psi + N\sin 2k\psi} + e^{-2ik\varphi}(A' e^{2ik\psi} + B' e^{-2ik\psi})\right] \cos pt$$

$$A e^{2i(k+h)\varphi} + B e^{2i(h-k)\varphi}$$

$$R\, e^{2i(k+h+\varepsilon)\varphi} + e^{2i(h-k+\varepsilon)\varphi}$$

$$= \sum_{kh}\left[\begin{matrix} A\cos 2(k+h)\varphi + B\sin 2(k+h)\varphi \\ + C\cos 2(k-h)\varphi + D\sin 2(k-h)\varphi\end{matrix}\right] \cos pt \qquad p = 2c\sqrt{\sin^2\varphi + \sin^2\psi}$$

$$w = \sum_{kh}\left[A_{kh}\cos(2k\varphi + 2h\psi) + B_{kh}\sin(2k\varphi + 2h\psi) + C_{kh}\cos(2k\varphi - 2h\psi) + D_{kh}\sin(2k\varphi - 2h\psi)\right] \cos\left[2ct\sqrt{\sin^2\varphi + \sin^2\psi}\right]$$

$$w = \int \Phi(\varphi,\psi) \underset{(\cos)}{\sin} 2k\varphi\, \underset{(\cos)}{\sin} 2h\psi \cos\left(2ct\sqrt{\sin^2\varphi + \sin^2\psi}\right) d\varphi\, d\psi$$

lub też $w = \int \Phi(\varphi,\psi) \sin 2(k\varphi + h\psi) \cos\left(2ct\sqrt{\sin^2\varphi + \sin^2\psi}\right) d\varphi\, d\psi$

biorąc lepiej cos. $w = \int \Phi(\varphi,\psi)\, 2(k\varphi + h\psi) \cos\left(2ct\sqrt{\sin^2\varphi + \sin^2\psi}\right) d\varphi\, d\psi$

za czas $t = 0$:

$$w_{kh} = \int \Phi(\varphi,\psi) \sin 2(k\varphi + h\psi)\, d\varphi\, d\psi$$

$J_0(\sqrt{k^2+h^2})$

w razie membrany ciągłej:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$w = f(x,y) \sin ct$$

$$= J_0(\sqrt{x^2+y^2}) \sin ct$$

$$\frac{\partial J_0}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{}} J_0'$$

$$\frac{\partial^2 J_0}{\partial x^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2} J_0'' + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} J_0' - \frac{x^2}{\sqrt{}^3} J_0'$$

J_0':

w trzech wymiarach:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

$$w = \sin ct \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) J = J_0'' + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} J_0' = J_0''(z) + \frac{1}{z} J_0' = J_0'' - \frac{J_1}{z} = -J_1' - \frac{J_0 + J_2}{2} = -J_0$$

Jeśli w całości n [illegible] wolnych punktów (n [illegible] parzyste)

$$A_1 = (y_1) \sin\frac{\pi}{n+1} + (y_2) \sin\frac{2\pi}{n+1} + \dots \quad (y_{\frac{n}{2}}) \sin\frac{(n\ldots)\pi}{2(n+1)} +$$

$$A_2 = (y_1) \sin\frac{2\pi}{n+1}$$

$$A_3 = \dots$$

$$\sin\frac{k\,n\pi}{2(n+1)} = \sin\frac{k\pi}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sin\frac{k\pi}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\sin\frac{k(n+2)\pi}{2(n+1)} = \sin\left(\frac{k\,n\pi}{2(n+1)} + \frac{k\pi}{n+1}\right)$$

$$\sin\frac{k\pi}{2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \sin\frac{k\pi}{2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$A_{\frac{n}{2}} = (y_1)\sin\frac{(n\ldots)\pi}{2(n+1)} + (y_2)\sin\frac{2(n\ldots)\pi}{2(n+1)} + \dots \quad (y_{\frac{n}{2}})\sin\left[\frac{(n\ldots\frac{n}{2})\pi}{2(n+1)}\right]^2$$

$$\cancel{A_{\frac{n+1}{2}} = (y_1)\sin\frac{(n+1)\pi}{2(n+1)}}$$

$$=$$

$$A_{\frac{n}{2}+1} = (y_1)\underbrace{\sin\frac{(\frac{n}{2}+1)\pi}{n+1}}_{=\cos\frac{\pi}{n+1}} + (y_2)\sin\frac{2(\frac{n}{2}+1)\pi}{n+1} + \dots \quad y_{\frac{n}{2}}\sin\frac{(\frac{n}{2}+1)n\pi}{2(n+1)}$$

$\sin$

$\frac{n}{2}+\frac{n}{2(n+1)}$

$$A_{\frac{n}{2}+1} = (y_1)\cos\frac{n\pi}{2(n+1)} - (y_2)\sin\frac{2n\pi}{2(n+1)} + \dots$$

$$A_{\frac{n}{2}+m} = (y_1)\sin\left(\overset{\mu}{\frac{n}{2}-m-1}\right)\frac{\pi}{2(n+1)} - (y_2)\sin\left(\frac{n}{2}-m-1\right)\frac{2\pi}{2(n+1)} +$$

$+$ $-$

$$= A_1\left[\sin\mu\sin\nu - \sin 2\mu\sin 2\nu + \sin 3\mu\sin 3\nu \dots\right]$$

$$\cos(\mu+\nu) - \cos(\mu-\nu)$$

$$(y_k) = A_1\sin\frac{k\pi}{n+1} + A_2\sin\frac{2k\pi}{n+1} + \dots$$

jeśli zaczem $t=0$: $\quad w_{kh} = \int\Phi(\varphi,\psi)\cos(2k\varphi + h\psi)\,d\varphi\,d\psi$

jeśli funkcya $\Phi(\varphi,\psi)=0$ dla wszystkich skończonych φ,ψ, tylko $\Phi \gtrless 0$ dla φ,ψ bardzo małych to

$$w_{kh} = \iint_0^{\infty}\Phi(\varphi,\psi)\,d\varphi\,d\psi$$

ogólnie zatem $\quad w = \sum$

63

Inny sposób dla struny [końce stałe]

$$y_k = \sum_i' E_i \sin\frac{ki\pi}{n+1}\cos\left(2ct\sin\frac{i\pi}{2(n+1)}\right) + \sum_i' F_i \sin\frac{ki\pi}{n+1}\sin\left(2ct\sin\frac{i\pi}{2(n+1)}\right)$$

$$E_i = \frac{2}{n+1}\sum_k y_k(0)\sin\frac{ki\pi}{n+1} = \frac{2}{n+1}\left[y_1\sin\left(\frac{i\pi}{n+1}\right) + y_2\sin\left(\frac{2i\pi}{n+1}\right) + y_3\sin\left(\frac{3i\pi}{n+1}\right) + \dots\right]$$

$$F_i = \frac{1}{(n+1)c\sin\frac{i\pi}{n+1}}\sum_k y_k'(0)\sin\frac{ki\pi}{n+1}$$

$$y_k = \frac{2}{n+1}\left[(y_1)\left\{\sum_i \underbrace{\sin\frac{i\pi}{n+1}\sin\frac{ki\pi}{n+1}}\cos\left(2ct\sin\frac{i\pi}{2(n+1)}\right)\right\} + (y_2)\left\{\sum_i \sin\frac{2i\pi}{n+1}\sin\frac{ki\pi}{n+1}\cos\left(2ct\sin\frac{i\pi}{2(n+1)}\right)\right\} + \dots\right.$$

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}\left[-\cos\frac{(k+1)i\pi}{n+1} + \cos\frac{(k-1)i\pi}{n+1}\right]}$$

$$\sum_i -\cos\left[\frac{(k+1)i\pi}{n+1} + 2ct\sin\frac{i\pi}{2(n+1)}\right] - \cos\left[\frac{(k+1)i\pi}{n+1} - 2ct\sin\frac{i\pi}{2(n+1)}\right]$$
$$+\cos\left[\frac{(k-1)i\pi}{n+1} + 2ct\sin\frac{i\pi}{2(n+1)}\right] + \cos\left[\frac{(k-1)i\pi}{n+1} - 2ct\sin\frac{i\pi}{\dots}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{m}\cos[n\alpha + \beta\sin n\gamma] = e^{in\alpha + \beta\frac{e^{i\gamma}-e^{-i\gamma}}{2}}$$

$$= \sum A_n\cos n\alpha$$

$$\sin\frac{(k+1)\pi}{n+1}\sin\frac{2(k+1)\pi}{n+1} + \sin\frac{k\pi}{n+1}\sin\frac{2k\pi}{n+1}$$
$$-\sin\frac{k\pi}{n+1}\sin\frac{2(k+1)\pi}{n+1} - \sin\frac{(k+1)\pi}{n+1}\sin\frac{2k\pi}{n+1}$$

$$e^{\frac{3i\pi}{2(n+1)}}\sum^{n}e^{\frac{3ki\pi}{n+1}} + e^{\frac{i\pi}{2(n+1)}}\sum_1^n e^{\frac{ki\pi}{n+1}}$$

$$\frac{e^{\frac{3i\pi}{n+1}} - e^{\frac{3ni\pi}{n+1}}}{1-e^{\frac{3i\pi}{n+1}}} \qquad \frac{\sin\frac{3\pi}{n+1} - \sin\frac{3n\pi}{n+1}}{\sin\frac{3\pi}{2(n+1)}} \qquad \frac{\sin\frac{\pi}{n+1} - \sin\frac{n\pi}{n+1}}{\sin\frac{\pi}{2(n+1)}} = 0$$

$$\sum e^{\frac{(6k+3)\pi i}{2(n+1)}} + \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2(n+1)}}$$

$$T = \frac{m}{2}\,A_1\sin\frac{k\pi}{n+1}\sin\frac{\pi}{2(n+1)}\cos\dots + A_2\sin\frac{2k\pi}{n+1}$$

$$= A_1^2\cos^2\left(2ct\sin\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}\sum\sin^2\frac{k\pi}{n+1} + A_2^2\cos^2\dots$$

$$\cos\frac{2k\pi}{n+1}$$

$$= \frac{2}{n+1}\left\{\cos\left(2ct\sin\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\overbrace{\left[(y_1)\sin\frac{\pi}{n+1} + (y_2)\sin\frac{2\pi}{n+1} + (y_3)\sin\frac{3\pi}{n+1}\dots\right]}^{A_1}\sin\frac{k\pi}{n+1}\right.$$
$$+\cos\left(2ct\sin\frac{2\pi}{2(n+1)}\right)\overbrace{\left[(y_1)\sin\frac{2\pi}{n+1} + (y_2)\sin\frac{4\pi}{n+1} + (y_3)\sin\frac{6\pi}{n+1}\dots\right]}^{A_2}\sin\frac{2k\pi}{n+1}$$
$$+\cos\left(2ct\sin\frac{3\pi}{2(n+1)}\right)\left[\dots\right]$$

$$y_{k+1} - y_k = \frac{2}{n+1}\left\{\cos\left(2ct\sin\frac{\pi}{2(n+1)}\right)A_1\left[\sin\frac{(k+1)\pi}{n+1} - \sin\frac{k\pi}{n+1}\right] + \cos\left(2ct\sin\frac{2\pi}{2(n+1)}\right)A_2\left[\sin\frac{2(k+1)\pi}{n+1} - \sin\frac{2k\pi}{n+1}\right] + \dots\right.$$

$$\sum_{k=0}^{n}(y_{k+1}-y_k)^2 = A_1^2\cos^2\left(2ct\sin\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\sum\left[\sin\frac{(k+1)\pi}{n+1} - \sin\frac{k\pi}{n+1}\right]^2 + A_2^2\cos^2\left(2ct\sin\frac{2\pi}{2(n+1)}\right)\sum\left[\dots\right]^2 + \dots$$

$$A_1A_2\dots\sum\underbrace{\left[\sin\frac{(k+1)\pi}{n+1} - \sin\frac{k\pi}{n+1}\right]}_{\cos\frac{(k+\frac12)\pi}{n+1}\sin\frac{\pi}{2(n+1)}}\underbrace{\left[\sin\frac{2(k+1)\pi}{n+1} - \sin\frac{2k\pi}{n+1}\right]}_{\cos\frac{(2k+1)\pi}{n+1}\sin\frac{\pi}{n+1}} = 4\sin\frac{\pi}{n+1}\sin\frac{\pi}{2(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\frac{(6k+3)\pi}{2(n+1)} + \cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right]$$

$$\cos\frac{3\pi}{2(n+1)} + \cos\frac{\pi}{2(n+1)}$$
$$+\cos\frac{9\pi}{2(n+1)} + \cos\frac{3\pi}{2(n+1)}$$
$$+\cos\frac{15\pi}{2(n+1)} + \cos\frac{5\pi}{2(n+1)}$$
$$\vdots$$

$$y_k = \frac{2}{n+1}\sum_{i=1}^{n} A_i \sin\frac{k\pi i}{n+1}\underbrace{\cos\left(2ct\sin\frac{i\pi}{2(n+1)}\right)}$$

$\frac{i\pi}{2(n+1)} = \omega$

$$\sin\frac{k\pi i}{n+1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\omega)\sin 2k\omega\cos(2ct\sin\omega)\,d\omega$$

lim dla $n=\infty$

Istotnie: $\Delta^2 y_k = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(\omega)\underbrace{\left[\sin 2(k-1)\omega + \sin 2(k+1)\omega - 2\sin 2k\omega\right]}_{2\sin 2k\omega\cos 2\omega\, -}\cos(2ct\sin\omega)\,d\omega$

$- 4\sin 2k\omega\sin^2\omega$

$$\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(\omega)\sin^2\omega\sin 2k\omega\cos(2ct\sin\omega) \text{ - } \underline{\text{stimmt}}!$$

Wystarczy zatem rozpatrzeć jedno drganie normalne, ponieważ energia $\mathcal{E} = \Sigma \ldots$

~~$y_k = \frac{2}{n+1} A_i \sin\frac{k\pi i}{n+1}\cos\left(2ct\sin\frac{i\pi}{2(n+1)}\right)$~~

$$(y_{k+1} - y_k)\,\dot y_k = \frac{4}{(n+1)^2}\left[\sum_1^n A_i\left(\sin\frac{(k+1)i\pi}{n+1} - \sin\frac{ki\pi}{n+1}\right)\cos\left(2ct\sin\frac{i\pi}{2(n+1)}\right)\sum_{i=1}^n A_i \sin\frac{i\pi}{2(n+1)}\cos\frac{ki\pi}{n+1}\cos\left(2ct\sin\frac{\pi i}{2(n+1)}\right)\right]$$

Użyć początkowo wszystkie $y_k = 0$ dla k od 0 do $\frac{n-1}{2}$; struny od $\frac{n+1}{2}$ do n uważać jako osobny szereg z odpowiednimi A które nazwiemy α

tym szeregu α = drganie normalne i na każde z nich przypada jednakowe prawdopodob. $W \infty e^{-\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \ldots}$ $[\alpha_0^2 + \alpha_1^2]$

następnie wyrazić A przez owe α (liniowo) podstawić w powyższym ~~[illegible]~~ wzór i zatrzymać wyrażenie $\alpha_0^2\,\alpha_1^2 \ldots$ które wszystkie równe

$$y_k = \sum_k A_k \cos 2k\varphi\, \cos(2ct\sin\varphi) + \Sigma\, D_k \sin 2k\varphi \ldots$$

$\varphi(\omega)$ = dowolna funkcja ω

rozwijając $\varphi(\omega)$ w szereg Fouriera $\varphi(\omega) = \Sigma A \sin m\omega$

zamieniamy to w szereg funkcyi $J(2ct)$

Dla czasu $t=0$:

$$y_k(0) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(\omega)\sin 2k\omega\,d\omega$$

więc $y_k(0)$ są spółczynnikami w szeregu Fouriera dla φ! to trzeba z

$m\ddot{x}_{ijk} = 2\alpha\left[\Delta_i^2 x + \Delta_j^2 x + \Delta_k^2 x\right]$

$$V = \sum\left[(x_{ijk} - x_{i-1\,jk})^2 + (x_{ijk} - x_{i\,j-1\,k})^2 + (x_{ijk} - x_{ij\,k-1})^2 + (y_{ijk} - y_{i-1\,jk})^2 + (\ ) + (z_{ijk} - z_{i-1\,jk})^2 + \underbrace{(\ )}_{\text{nie są odrębnie niezależne}}\right]$$

$T = \sum \frac{m}{2}\left[\dot{x}_{ijk}^2 + \dot{y}_{ijk}^2 + \dot{z}_{ijk}^2\right]$

$mc^2 = 6\alpha$

$c = \sqrt{\frac{6\alpha}{m}}$

Przyjmijmy: $x_{ijk} = \cancel{\sum x_{ijk}(0)\, J_{2[(i)+(j)+(k)]}(2ct)}$ to sprawdzi łatwo dla $i,j,k=0$... ale dla bardzo dużego i... w którym wszystkie punkty równo wyprzedzone, błąd zawsze w porównaniu z ...

$= \sum_{\alpha\beta\gamma} x_{\alpha\beta\gamma}\, J_{2[(i-\alpha)+(j-\beta)+(k-\gamma)]}(2ct)$

Przenoszenie energii w kierunku X:

(dla każdego punktu przekroju:)

$(x_{0jk} - x_{1jk})\dot{x}_{0jk}$

ponieważ wszystkie punkty równie uprzywilejowane, wystarczy wziąć punkt $i=k=0$

$(x_{000} - x_{100})\dot{x}_{000}$

$x_{000} = \sum_{\alpha\beta\gamma} x_{\alpha\beta\gamma}\, J_{2[\alpha+\beta+\gamma]}(2ct)$

$\dot{x}_{000} = 2c\sum x_{\alpha\beta\gamma}\, J'_{2(\alpha+\beta+\gamma)}(2ct) = 2c\sum x_{\alpha\beta\gamma}\left[J_{2(\alpha+\beta+\gamma)-1} - J_{2(\alpha+\beta+\gamma)+1}\right]$

$= 2c\sum (x_{\alpha\beta\gamma} - x_{\alpha-1\,\beta\gamma})\, J_{2(\alpha+\beta+\gamma)-1}$

$x_{100} = \sum x_{\alpha\beta\gamma}\, J_{2(\alpha+\beta+\gamma)-2}$

$x_{000} - x_{100} = \cancel{\sum x_{\alpha\beta\gamma} - x_{\alpha-1}} \sum x_{\alpha\beta\gamma}\left[J_{2(\alpha+\beta+\gamma)} - J_{2(\alpha+\beta+\gamma)-2}\right]$

$= \underbrace{\sum (x_{\alpha\beta\gamma} - x_{\alpha-1\,\beta\gamma})}_{\text{ponieważ}}\, J_{2(\alpha+\beta+\gamma)} = \sum \underbrace{(x_{\alpha\beta\gamma} - x_{\alpha\beta-1\,\gamma})}\, J_{2\alpha\beta\gamma} = \ldots$

nie są niezależne, nie można tak całkować jak poprzednio dla ..., uważając $x_{\alpha\beta\gamma} - x_{\alpha-1\,\beta\gamma}$ jako niezal. zmienne

1	3	α 001	010	100																	
2	6	002	020	200	011	101	110														
3	10	003	030	300	111	102	012	021	120	201	210										
4	15	004	040	400	112	121	211	202	220	022	103	301	130	310	013	031					
5	18	005	050	500	113	131	311	401	410	140	041	104	014	203	302	230	320	023	032		

$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

n   n00   0n0   00n

~~0~~1+0+0

1+1+0   2+0+0

1+1+1   2+0+1   3+0+0

112   131   220   40

500   4+1   3+2   3+1+1

6+0   5+1   4+2   4+1+1   3+2+1

$V(0) = \cancel{\alpha \sum} \quad \cancel{\sum\sum_{\beta\gamma} (a_{i\beta\gamma} - a_{i-1\beta\gamma})}$

$$\alpha \sum\sum\sum_{ijk} \left\{ \left[\sum\sum_{\beta\gamma} a_{i\beta\gamma} - \sum\sum_{\beta\gamma} a_{i-1\beta\gamma} \right]^2 + [\Sigma\Sigma - \quad]^2 + [\quad] \right\}$$

$$= \alpha \sum_i (A_i - A_{i-1})^2 + \sum_j (B_j - \quad)^2 + \sum_k (C_k - \quad)^2$$

$+ 2\,\alpha$

$$T = \frac{m}{2} \sum\sum\sum \left\{ \left[\sum\sum_{\beta\gamma} u_{i\beta\gamma} + \Sigma\Sigma u_{\alpha j\gamma} + \Sigma\Sigma u_{\alpha\beta k} \right]^2 + [u \quad]^2 + [\quad] \right\}$$

$$\sum_{\beta\gamma} a_{i\beta\gamma} = A_i$$

$$(x_{ijk} - x_{ij-1k})\, \dot{x}_{ijk} = \cancel{\sum a_{\alpha\beta\gamma} \, J_{2(i-\alpha)-2} + J_{2(j-\beta)} + J_{2(k-\gamma)}}$$

$$= \sum a_{\alpha\beta\gamma} \left[J_{2(i-\alpha)} - J_{2(i-\alpha)-2} \right] \cdot 2c \sum_{\alpha\beta\gamma} \left[A_\alpha J'_{2(i-\alpha)} + B_\beta J'_{2(j-\beta)} + C_\gamma J'_{2(k-\gamma)} \right]$$

$$= 2c \sum_{\alpha} A_\alpha \underbrace{\left[J_{2(i-\alpha)} - J_{2(i-\alpha)-2} \right]}_{-J'_{2(i-\alpha)-1}} \left\{ \sum_\alpha A_\alpha J'_{2(i-\alpha)} + \alpha \sum_j B_\beta J'_{2(j-\beta)} + \alpha \sum_k C_\gamma J'_{2(k-\gamma)} \right\}$$ będzie to samo co z Parinakum

---

Próba: przyjęć

$$x_{ijk} = \sum_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma} \, J_{2[(i-\alpha)+(j-\beta)+(k-\gamma)]} + \sum_{\alpha\beta\gamma} u_{\alpha\beta\gamma} \int J_{\dots} \, dt$$

$$V = \alpha \sum_{ijk} \Big[\sum_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma} \big(\underbrace{J_{2(i-\alpha)+(j-\beta)+(k-\gamma)} - J_{2[\dots]-2}}_{J'_{2[(i-\alpha)+(j-\beta)+(k-\gamma)]-1}} \big) \Big]^2 +$$

$$V(0) = \alpha \sum$$

$$(x_{ijk} - x_{ij-1k})\, \dot{x}_{ijk} = \left[\sum_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma} \, J'_{2[(i-\alpha)+(j-\beta)+(k-\gamma)]-1} \right] \left[\sum_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma} \, J'_{2[(i-\alpha)+(j-\beta)+(k-\gamma)]} \right]$$

$(n-1)01 \quad \cancel{1}0(n-1)1 \quad 01(n-1) \quad (n-1)10 \quad 10(n-1) \quad 1(n-1)0$

$(n-2)02 \quad 0(n-2)2 \quad 02(n-2) \quad (n-2)20 \quad 20(n-2) \quad 2(n-2)0$

$(n-2)11 \quad 1(n-2)1 \quad (n-2)11$

$(n-3)03 \quad \ldots$

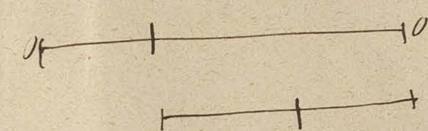
411 321 312

213 222 231

114 123 132 141

$\frac{(n-2)(n-1)}{2} +$

$n = \alpha+\beta+\gamma \qquad \alpha\beta\gamma \quad \alpha\gamma\beta \quad \beta\gamma\alpha \quad \beta\alpha\gamma \quad \cancel{\alpha\beta\gamma} \quad \cancel{\alpha\gamma\beta}$



w jaki sposób da się podzielić liczba n jedności na 3 grupy

$$\sum^{n} (n-2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

$$2\nu J_\nu = x(J_{\nu-1}+J_{\nu+1})$$

$$S = J_1^2 + 3^3 J_3^2 + 5^3 J_5^2 + \cdots = \frac{x}{2}\Big\{ J_1 J_0 + J_1 J_2 + 3^2 J_3(J_2+J_4) + 5^2 J_5(J_4+J_6) +$$

$$= \frac{x^2}{4}\Big\{ (J_0+J_2)^2 + 3(J_2+J_4)^2 + 5(J_4+J_6)^2 + \cdots$$

Czy można twierdzić że $\overline{(x_{000}-x_{100})\,\dot{x}_{000}} = \sum_{\alpha\beta\gamma}\left[J'_{2(\alpha+\beta+\gamma)-1} \cdot J'_{2(\alpha+\beta+\gamma)}\right] \cdot \overline{x^2_{\alpha\beta\gamma}}$?

Tylko w razie jeśli $\overline{x_1 x_2} = 0$ itd. co nie jest potrzebne

67

Ogólnie mamy zatem:

$$\dot y_0(t) = \left[y_0 J_0 + (\dot y_1 + \dot y_{-1}) J_2 + (\dot y_2 + \dot y_{-2}) J_4 + \cdots\right] + c\left[\begin{matrix}(y_1-y_0)J_1 + (y_2-y_1)J_3 + (y_3-y_2)J_5 + \cdots \\ + (y_0-y_{-1})J_{-1} + (y_{-1}-y_{-2})J_{-3} + (y_{-2}-y_{-3})J_{-5} + \cdots\end{matrix}\right]$$

punkt 0 początkowo nieruchomy

Teraz przypuść prawdopod. różne od $-\infty$ do 0 i od 1 do $+\infty$

$$W\begin{pmatrix} y_0\, y_1 \cdots \\ y_{-1} \cdots \end{pmatrix} = A e^{-\gamma \frac{m}{2}(\dot y_1 + \dot y_2 + \cdots) - \gamma\alpha\left[(y_1-y_2)^2 + (y_2-y_3)^2 + \cdots\right] - \gamma\left[\frac{m}{2}\left[\cancel{\dot y_0^2} + \dot y_{-1} + \dot y_{-2} + \cdots\right]\right] - \gamma\alpha\left[(y_0-y_1)^2 + (y_{-1}-y_0)^2 + \cdots\right]}$$

$(y_0-y_1)^2+$

Albo zupełnie bez względu na części od $-\infty$ do 0 tylko prawdop. układu $y_1\, y_2 \cdots y_\infty = A e^{-\gamma\frac{m}{2}(\dot y_1^2 + \cdots) - \gamma\alpha(y_1-y_2)^2 + \cdots}$

gdzie wszystkie początkowe $y_0\, y_{-1} \cdots y_\infty$ przyjmujemy $=0$

$$\frac{m\overline{\dot y^2}}{2}(t) = \frac{1}{2\gamma}\left[J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + \cdots\right] = \frac{1}{2\gamma}\left[\frac{1-J_0^2}{2}\right] \neq \frac{1}{4\gamma}$$

praca wykonana $= 2\alpha\, \dot y_0 (y_1 - y_0)$
po sek:

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 = {} & y_1 J_0 + y_2 J_2 + y_3 J_4 \cdots \\ & + y_0 J_{-2} + y_{-1} J_{-4} \cdots \\ & - y_0 J_0 - y_1 J_2 - y_2 J_4 \cdots \\ & - y_{-1} J_{-2} - y_{-2} J_{-4} \cdots \end{aligned}$$

$$= (y_1-y_0)J_0 + (y_2-y_1)J_2 + (y_3-y_2)J_4 \cdots + (y_0-y_{-1})J_{-2} + (y_{-1}-y_{-2})J_{-4} \cdots$$

$$\left\{ + \dot y_0 \overbrace{\int (J_2 - J_0)\,dt}^{2J_1'} + \dot y_1 \overbrace{\int (J_0 - J_2)}^{2J_1'} + \dot y_2 \overbrace{\int (J_2 - J_4)\,dt}^{2J_3'} + (\dot y_{-1}) \underbrace{\int (J_4 - J_2)}_{2J_3'} \cdots \right.$$

$$+ \frac{1}{c}\left\{ \dot y_1 J_1 + \dot y_2 J_3 + \dot y_3 J_5 + \cdots + \dot y_0 J_{-1} + \dot y_{-1} J_{-3} + \dot y_{-2} J_{-5} + \cdots \right\}$$

jeśli ~~wszystkie~~ tak jak dawniej równowaga początkowej temperatury od $-\infty$ do $+\infty$ wprowadzając $(y_1-y_0)(y_2-y_1)$ etc jako nowe zmienne

$$\overline{\dot y_0(t)(y_1-y_0)} = \frac{1}{c}\left\{\left[\begin{matrix} J_0 J_{-1} + J_2 J_1 + J_4 J_3 + \\ + J_{-2} J_{-3} + J_{-4} J_{-5} + \cdots \end{matrix}\right] + \left[\begin{matrix} J_0 J_1 + J_2 J_3 + \cdots \\ + J_{-2} J_{-1} + J_{-4} J_{-3} \cdots \end{matrix}\right]\right\} = 0$$

jeśli dodać: $+(J_1 - J_{-1})(J_2 - J_0) + (J_{-3} - J_{-1})(J_4 - J_2) + \cdots$

$= (J_1 - J_3)(J_0 - J_2) + (J_3 - J_5)(J_2 - J_4) + \cdots$

$= J_2' J_1' + J_4' J_3' + \cdots$

nie musiałoby tedy być żeby $\overline{y_1 y_0} = 0$, $\overline{y_1 y_2} = 0$ etc.

(n-1) 01   0 (n-1) 1   01(n-1)   (n-1)10   10(n-1)   1(n-1)0

(n-2) 02   0 (n-2) 2   02(n-2)   (n-2)20   20(n-2)   2(n-2)0

(n-2) 11   1 (n-2) 1   (n-2) 11

(n-3) 03   . –

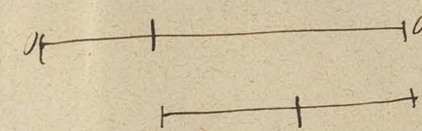
411 321 312

213 222 231

114 123 132 141

$\frac{(n-2)(n-1)}{2}+$

$n=\alpha+\beta+\gamma$ $\alpha\beta\gamma$ $\alpha\gamma\beta$ $\beta\gamma\alpha$ $\beta\alpha\gamma$ ~~$\alpha\beta\gamma$ $\alpha\gamma\beta$~~



w jaki sposób da się podzielić liczba n jednostek na 3 grupy

$$\sum^{n} (n-2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

$$2\nu J_\nu = x(J_{\nu-1}+J_{\nu+1})$$

$$S = J_1^2 + 3^3 J_3^2 + 5^3 J_5^2 + \cdots = \frac{x}{2}\left\{ J_1 J_0 + J_1 J_2 + 3^2 J_3 (J_2+J_4) + 5^2 J_5 (J_4+J_6) + \right.$$

$$= \frac{x^2}{4}\left\{ (J_0+J_2)^2 + 3(J_2+J_4)^2 + 5(J_4+J_6)^2 + \cdots \right.$$

Czy można twierdzić że $\overline{(x_{000}-x_{100})\dot{x}_{000}} = \sum_{\alpha\beta\gamma}\left[J'_{2(\alpha+\beta+\gamma)-1}\cdot J'_{2(\alpha+\beta+\gamma)}\right]\cdot\overline{x^2_{\alpha\beta\gamma}}$?   Tylko w razie jeśli $\overline{x_1 x_2}=0$ etc. co nie jest potrzebne

Ogólnie mamy zatem:

$$\dot y_0(t) = \left[\dot y_0 J_0 + (\dot y_1 + \dot y_{-1}) J_2 + (\dot y_2 + \dot y_{-2}) J_4 + \cdots \right] + c\left[\begin{array}{l}(y_1-y_0)J_1 + (y_2-y_1)J_3 + (y_3-y_2)J_5 + \cdots \\ + (y_0-y_{-1})J_{-1} + (y_{-1}-y_{-1})J_{-3} + (y_{-2}-y_{-3})J_{-5} + \cdots\end{array}\right]$$

punkt 0 początkowo nieruchomy

Teraz przyjąć prawdop. różne od $-\infty$ do 0 i od 1 do $+\infty$

$$W\binom{y_0\, y_1 \cdots}{y_{-1} \cdots} = A e^{-\gamma \frac{m}{2}(\dot y_1 + \dot y_2 + \cdots) - \gamma\alpha\left[\overset{(y_0-y_1)^2+}{(y_1-y_2)^2} + (y_2-y_3)^2 + \cdots\right] - \Gamma\frac{m}{2}\left[\cancel{\dot y_0}^2 + \dot y_{-1} + \dot y_{-2} + \cdots\right] - \Gamma\alpha\left[(y_0-y_1)^2 + (y_{-1}-y_0)^2 + \cdots\right]}$$

Albo zupełnie bez względu na system od $-\infty$ do 0 tylko prawdop. układu $y_1\, y_2 \cdots y_\infty$ $= A e^{-\gamma\frac{m}{2}(\dot y_1^2 + \cdots) - \gamma\alpha(y_1-y_2)^2 + \cdots}$

gdzie wszystkie początkowe $y_0\; y_{-1} \cdots y_{-\infty}$ przyjmujemy $=0$

$$\frac{m\overline{\dot y^2}}{2}(t) = \frac{1}{2\gamma}\left[J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + \cdots\right] = \frac{1}{2\gamma}\left[\frac{1-J_0^2}{2}\right] \neq \frac{1}{4\gamma}$$

praca wykonana $= 2\alpha\, \dot y_0 (y_1 - y_0)$ po sek:

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 = {} & y_1 J_0 + y_2 J_2 + y_3 J_4 \cdots \\ & + y_0 J_{-2} + y_{-1} J_{-4} \cdots \\ & - y_0 J_0 - y_1 J_2 - y_2 J_4 \cdots \\ & - y_{-1} J_{-2} - y_{-2} J_4 \cdots \end{aligned} \quad = (y_1-y_0)J_0 + (y_2-y_1)J_2 + (y_3-y_2)J_4 \cdots + (y_0-y_{-1})J_{-2} + (y_{-1}-y_{-2})J_4 \cdots$$

$$\underbrace{+ \dot y_0 \int \overbrace{(J_2 - J_0)}^{2J_1'} dt + \dot y_1 \int \overbrace{(J_0 - J_2)}^{2J_1'} + \dot y_2 \int \overbrace{(J_2 - J_4)}^{2J_3'} dt \cdots + (\dot y_{-1}) \int \underbrace{(J_4 - J_{-2})}_{2J_3'} \cdots}$$

$$+ \frac{1}{c}\left\{\begin{array}{l}\dot y_1 J_1 + \dot y_2 J_3 + \dot y_3 J_5 + \cdots \\ + \dot y_0 J_{-1} + \dot y_{-1} J_{-3} + \dot y_{-2} J_{-5} + \cdots\end{array}\right\}$$

jeżeli ~~wszystkie~~ tak jak dawniej równowaga początkowej temperatury od $-\infty$ do $+\infty$

wprowadzać $(y_1-y_0)(y_2-y_1)$ etc. jako nowe zmienne

$$\overline{\dot y_0(t)(y_1-y_0)} = \frac{1}{c}\left\{\left[\begin{array}{l}J_0 J_{-1} + J_2 J_4 + J_4 J_3 + \\ + J_2 J_{-3} + J_{-4} J_5 + \cdots\end{array}\right] + A\left[\begin{array}{l}J_0 J_1 + J_2 J_3 + \cdots \\ + J_2 J_{-1} + J_{-4} J_{-3} \cdots\end{array}\right]\right\} = 0$$

jeżeli dod.: $+(J_{-1}-J_1)(J_2-J_0) + (J_{-3}-J_1)(J_4-J_2) + \cdots$

$= (J_1 - J_3)(J_0 - J_2) + (J_3 - J_5)(J_2 - J_4) + \cdots$

$= J_2' J_1' + J_4' J_3' + \cdots$

nie można twierdzić żeby $\overline{y_1 y_0} = 0$ były $\overline{y_1 y_2} = 0$ etc.

jistli ast vsechny y_{-k} až do $y_0 = 0$: $c\left[y_1 J_1 + y_1 J_3 + y_2 J_3 - y_2 J_5 + \cdots\right]\left[\cancel{\cdots} + y_1(J_0 - J_2) + y_2(J_2 - J_4) + \cdots\right]$

$$\dot{y}_0(t)(y_1 - y_0) = \frac{1}{c}\left[J_2 J_1 + J_4 J_3 + \cdots\right] + \left[J_0 J_1 + J_2 J_3 + \cdots\right] = \frac{1}{c}\left[\underbrace{J_0 J_1 + J_1 J_2} + \underbrace{J_2 J_3 + \cdots}\right]$$

po dlouhém čase zatím $\dfrac{2}{\pi c x} = \dfrac{2}{\pi c^2 t}$!!!

$$= \frac{2}{xc}\left[J_1^2 + 3J_3^2 + 5J_5^2 + \cdots\right] = \frac{1}{c}\left[J_0^2 + J_1^2\right] \cancel{\ldots} = \frac{2}{\pi c x}$$

$$= \frac{1}{c\pi}\int_0^\pi \frac{2}{2x\sin\theta} J_1(2x\sin\theta)\,d\theta$$

$$\left[J_\nu(z)\right]^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi J_{2\nu}(2x\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin 2nx\, J_0(2x\sin x)\,dx$$

$$= \frac{\pm 1}{\pi c x}\int_0^\pi \left[2J_2 + 6J_6 + 10J_{10} + \cdots\right] d\theta$$

$$2\frac{\partial J}{\partial x} = 2\{J_0 J_1' + J_1 J_2' + J_2 J_3' + \cdots + J_0' J_1 + J_1' J_2 + J_2' J_3 \cdots\}$$

$$= J_0(J_0 - J_2) + J_1(J_1 - J_3) + J_2(J_2 - J_4) + J_{-1}(J_{-1} + J_1) + J_2(J_0 - J_2) + J_3(J_1 - J_3)$$

$$= \cancel{\cdots} = J_0^2 - J_1^2 = (J_0 + J_1)(J_0 - J_1) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi J_1'(2x\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (1 - \sin 2\theta)\, J_0(2x\sin\theta)\,d\theta$$

$$J_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(y\sin\omega - n\omega)\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int\left[\cos(y\sin\omega)\cos n\omega + \sin(y\sin\omega)\sin n\omega\right]$$

$$2\cos 2\omega + 6\cos 6\omega + 10\cos 10\omega + \cdots$$

$$\alpha + \alpha^3 + \alpha^5 + \cdots \cdots = \frac{\alpha}{1-\alpha^2} = \frac{z e^{2i\omega}}{1 - z^2 e^{4i\omega}}$$

$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty} z^n \sin 2n\omega = \frac{z(1+z^2)\sin 2\omega}{1 - 2z^2\cos 4\omega + z^4}$$

$$\sum z^n \cos 2n\omega = \frac{z\cos 2\omega(1 - z^2\cos 4\omega) - z^3 \sin 2\omega \sin 4\omega}{1 - 2z^2\cos 4\omega + z^4} = \frac{z\cos 2\omega - z^3\cos 2\omega}{---} = \frac{z(1-z^2)\cos 2\omega}{1 - 2z^2\cos 4\omega + z^4}$$

$$1 + 3\alpha^2 + 5\alpha^4 + \cdots = \frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{2\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} = \frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}$$

$$\alpha + 3\alpha^3 + 5\alpha^5 + \cdots = \frac{\alpha(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2} = \frac{\left(\frac{1}{\alpha} + \alpha\right)}{\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)^2}$$

$$e^{2i\omega} + 3e^{6i\omega} + \cdots = \frac{e^{-2i\omega} + e^{2i\omega}}{\left(e^{-2i\omega} - e^{2i\omega}\right)^2} = -\frac{\cos 2\omega}{2\sin^2 2\omega}$$

$$\sum_{n=1,3,5\ldots} n\sin 2n\omega = \frac{\partial}{\partial z}\left[\quad\right]_{z=1} = \frac{\sin 2\omega}{2(1-\cos 4\omega)}\left[1 + 3 - \frac{2\left[4 - 4\cos 4\omega\right]}{2(1-\cos 4\omega)}\right] = 0$$

$$\sum n\cos 2n\omega = \frac{\cos 2\omega}{2(1-\cos 4\omega)}\left[1 - 3 - \cancel{\frac{0}{2(1-\cos 4\omega)}}\right] = -\frac{\cos 2\omega}{1-\cos 4\omega} = -\frac{\cos 2\omega}{2\sin^2 2\omega}$$

$$\left[J_1^2 + 3J_3^2 + \cdots\right] = \frac{1}{\pi}\int_0 d\theta\, \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \cos(2x\sin\theta\sin\omega)\frac{\cos 2\omega}{\sin^2 2\omega}\,d\omega$$

? divergent ?

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi J_1'(2x\sin\theta)\,d\theta$$

$$J = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\theta \cdot \frac{J_1(2x\sin\theta)}{2\sin\theta} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\theta}{\cancel{2\sin\theta}}\left[J_0 + J_2(2x\sin\theta)\right] 2x \cancel{\sin\theta}$$

$$= \frac{x}{2}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[J_0 + J_2(2x\sin\theta)\right]d\theta = \underline{\underline{\frac{x}{2}\left[J_0^2 + J_1^2\right]}}$$

$$2\frac{\partial J}{\partial x} = J_0^2 + J_1^2 + 2x\underbrace{(J_0 J_0' + J_1 J_1')}$$

$$\left[J_0 J_1 + J_0 J_1 + J_2 J_0 - J_1 J_2\right] = J_0^2 - J_1^2 \quad \text{stimmt!}$$

$$= -\frac{x}{2x} J_1(J_0 + J_2) = -2J_1^2$$

$J'_{2\nu} - J'_{4n-2\nu} - J'_{4n+2\nu} + J'_{8n-2\nu} + J'_{8n+2\nu} -$

$$= (-1)^{\nu} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Big[\underbrace{1 - 2 + 2 \cdots}_{(-1)^m \left[1 - \frac{(4mn)^4}{4x^2}\right]} \Big] - \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \left[\frac{2\nu^2}{x} - \frac{(4n-2\nu)^2+(4n+2\nu)^2}{2x} + \frac{(8n-2\nu)^2+(8n+2\nu)^2}{} - \right] \right\}$$

$$- \frac{16n^2+4\nu^2}{x} + \frac{64n^2+4\nu^2}{x} = -\frac{2\nu^2}{x}(-1)^m + \frac{8n^2}{x}\,\frac{m^2+m}{}(-1)^m$$

$$= (-1)^{\nu+m} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \left[1 - \frac{(4mn)^4}{4x^2} \right] - \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \left[\frac{4m^2n^2}{x} \right] \right\}$$

$$4[J_1'J_2' + J_3'J_4' + \cdots] = J_0J_1 + 2J_2J_3 + 2J_4J_5 + \cdots$$
$$-[J_1J_2 + J_3J_4 + J_5J_6 \cdots]$$
$$-[J_0J_3 + J_2J_5 + J_4J_7 \cdots]$$

$J_3 = \frac{4}{x}J_2 - J_1 \quad | \quad J_0$

$J_5 = \frac{8}{x}J_4 - J_3 \quad | \quad J_2$

$J_7 = \frac{12}{x}J_6 - J_5 \quad | \quad J_4$

$$J_0J_3 + J_2J_5 + \cdots = -(J_0J_1 + J_2J_3 + J_4J_5 \cdots) + \frac{1}{x}[4J_0J_2 + 8J_2J_4 + 12J_4J_6 + \cdots 2\nu\, J_{\nu-2}J_\nu]$$

$$J_3(x+y) = \sum J_{3-\lambda}(x)\, J_\lambda(y)$$

$$= J_0(x)J_3(y) + J_{-1}(x)J_4(y) + J_{-2}(x)J_5(y) + \cdots$$

$$+ J_1(x)J_2(y) + J_2(x)J_1(y) + J_3(x)J_0(y) + J_4(x)J_{-1}(y) + J_5(x)J_{-2}(y) + \cdots$$

$$J_3(2x) = 2J_1J_2 + J_0J_3 - J_1J_4 + J_2J_5 - J_3J_6 + J_4J_7 - J_5J_8 + J_6J_9$$

$\cancel{J_3(x)} =$

Dirac $y_{-2} = y_{-1} = y_0(0) = 0$ $\quad \overline{y_1} = \overline{y_2} = \overline{y_3}$ bez końca

$$\oint \quad J_\nu' = J_{\nu-1} - J_{\nu+1}$$
$$J_\nu = \int J_{\nu-1} - \int J_{\nu+1} \qquad \int J_{\nu-1} = J_\nu + \int J_{\nu+1}$$

$$y_0 = y_1(0) J_2 + y_2(0) J_4 + y_3(0) J_6 + \dots$$

$$y_1 = y_1(0) J_0 + y_2(0) J_2 + y_3(0) J_4 + \dots$$

Gdyby obrotowo to samo: $\dot y_0 y_1 = \overline{y_1}^2 \left[J_0 J_2' + J_2 J_4' + \dots + J_{-2} J_0' + J_4 J_2' \dots \right]$

$$= \overline{y_1}^2 \left[J_0 J_1 - J_0 J_3 + J_2 J_3 - J_2 J_5 + J_4 J_5 - J_4 J_7 \right.$$
$$\left. J_2 J_1 - J_2 J_1 + J_4 J_1 - J_4 J_3 + J_6 J_3 - J_6 J_5 \right]$$

$\int J_0 \, dx \; J_2 + \dots$

$= J_1 + \int J_2 \, dx \dots$

$$= \overline{y_1}^2 \left[\frac{J_1(2x)}{2} - J_1 J_2 - \frac{J_1 J_2}{2} + \frac{1}{4} J_3(2x) \right]$$

$$J_1 J_2 + J_3 J_4 + \dots$$

$+ \int J_2 \, dx + J_1 \int J_1 \, dx \dots$

$$\dot y_0 \, y_1 = \overline{y_1}^2 J_2' J_0 + \overline{y_2}^2 J_4' J_2 + \overline{y_3}^2 J_6' J_4 + \dots = \overline{y_1}^2 \left[J_0 J_2' + J_2 J_4' + J_4 J_6' + \dots \right]$$

$$= \overline{y_1}^2 \left\{ \begin{array}{l} J_0 J_1 + J_2 J_3 + J_4 J_5 \dots \\ - \left[J_0 J_3 + J_2 J_5 + J_4 J_7 + \dots \right] \end{array} \right.$$

$$= J_0 J_1 - J_0 J_3 + J_2 J_3 - J_2 J_5 + J_4 J_5 \dots = J_0 J_1 - J_1' J_3 - J_3' J_5 - \dots$$

$$J_1(x+y) = J_1(x) J_0(y) + J_2(x) J_1(y) + J_3(x) J_2(y) + \dots = J_1(x) J_0(y) + J_2(x) J_1(y) + J_3(x) J_2(y) + \dots$$
$$+ J_0(x) J_{-1}(y) + J_{-1}(x) J_{-2}(y) + \dots \qquad - \left[J_1(y) J_0(x) + J_2(y) J_1(x) + \dots \right]$$

$$J_1(x) J_0(y) + J_0(x) J_1(y) + J_{-1}(x) J_2(y) + J_{-2}(x) J_3(y)$$
$$J_2(x) J_{-1}(y) + J_3(x) J_{-2}(y) \dots$$
$$= J_0(x) J_1(y) - J_1(x) J_2(y) + J_2(x) J_3(y)$$
$$+ J_1(x) J_0(y) - J_2(x) J_1(y) + J_3(x) J_2(y)$$

$$J_1(2x) = 2 \left[\underbrace{J_0 J_1 - J_1 J_2}_{J_1 J_1'} + \underbrace{J_2 J_3 - J_3 J_4}_{J_3 J_3'} \dots \right] \dots$$

$$J_1^2 + J_3^2 + J_5^2 \dots = \int J_1(2x) \, dx \quad \Big| \quad J_1 J_0' - J_1 J_2' + J_3 J_2' - J_3 J_4' \dots = J_1 J_{-1} - 2 J_1^2 + 2 J_1 J_3 - 2 J_3^2 \dots$$

$$J_1'(2x) = \left[J_1'^2 + J_3'^2 + \dots \right] + J_1 J_1'' + J_3 J_3'' + \dots$$

$$\overline{y_1}^2 \frac{2}{x^2} \left[1 + 2 + \dots \nu \right]$$

$$= \overline{y_1}^2 \left(\frac{\nu}{x} \right)^2$$

$= \text{const}$

$$\overline{J_{2\nu} \, J_{2\nu+2}'} = (-1)^\nu (-1)^{\nu+1} \frac{2}{\pi x} \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2\nu^2}{x} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right] \left[\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{2(\nu+1)^2}{x} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$= - \frac{2}{\pi x} \left[\frac{2\nu^2}{x} \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{2(\nu+1)^2}{x} \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$= + \frac{2}{\pi x} \frac{4\nu}{x} \frac{\pi}{4} = \frac{2\nu}{x^2}$$

$$\sum \left[\varphi_{2\nu} P_{2\nu+2} - \varphi_{2\nu+2} P_{2\nu} \right]$$

$= \text{const}$ $\quad \sum [\varphi_{2\nu} P_{2\nu+2} - \varphi_{2\nu+2} P_{2\nu}]$

$$J_{2\nu} = (-1)^\nu \sqrt{\tfrac{2}{\pi x}} \left[\sin(x+\tfrac{\pi}{4}) + \tfrac{2\nu^2}{x}\cos(x+\tfrac{\pi}{4})\right]$$

$$\int J_{2\nu}\, dx = (-1)^\nu \sqrt{\tfrac{2}{\pi x}} \left[-\cos(x+\tfrac{\pi}{4}) + \tfrac{2\nu^2}{x}\sin(x+\tfrac{\pi}{4})\right]$$

$$J_{2\nu+2}\int J_{2\nu}\, dt = (-1)^\nu(-1)^{\nu+1}\sqrt{\tfrac{2}{\pi x}}\left[\sin(x+\tfrac{\pi}{4}) + \tfrac{2(\nu+1)^2}{x}\cos(x+\tfrac{\pi}{4})\right]\left[-\cos(x+\tfrac{\pi}{4}) + \tfrac{2\nu^2}{x}\sin(x+\tfrac{\pi}{4})\right]$$

$$= \tfrac{2}{\pi x}\ \tfrac{4\nu}{x}\ \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{2\nu}{x^2}$$

$$\dot{y}_1^{\,2} \int J_0 dt\ J_2 + \dots$$

$$\dot{y}_1^{\,2}\left[J_2 \int J_0 dt + J_4 \int J_2 dt + \dots\right]$$

$$J_{2\nu} J'_{2\nu+2} = \tfrac{1}{2} J_{2\nu}\left[J_{2\nu+1} - J_{2\nu+3}\right]$$

$$\frac{1}{x}\left[J_1^2 + 3J_3^2 + 5J_5^2 + \dots\right] \qquad 0$$

$$-\frac{1}{x^3}\left[J_1^2 + 3^3 J_3^2 + 5^3 J_5^2 + \dots\right] \qquad 0$$

$$-\frac{1}{x^3}\left[J_1^2 + 3^2 J_3^2 + 5^2 J_5^2 + \dots\right] \qquad -\frac{1}{\sin^3 2x} + \frac{1}{2\sin 2x}$$

$$+\frac{1}{x}\left[J_1'^2 + J_3'^2 + J_5'^2\right]$$

$$+\frac{1}{x}\left[J_1'^2 + 3J_3'^2 + 5J_5'^2 \dots\right]$$

$$+\frac{1}{2}\frac{2}{\pi x}\left[J_1^2 + J_3^2 + J_5^2 \dots\right] \qquad = J_1(2x)$$

$$J_{\nu-1} J'_{\nu+1} = \tfrac{1}{2} J_{\nu-1}\left[J_\nu - J_{\nu+2}\right]$$

$$J_{\nu+2} = \frac{4\nu(\nu+1)}{x^2} J_\nu - J_\nu - \frac{2(\nu+1)}{x} J_{\nu-1}$$

$$= \tfrac{1}{2} J_{\nu-1}\left[\left(2 - \frac{4\nu(\nu+1)}{x^2}\right) J_\nu + \frac{2(\nu+1)}{x} J_{\nu-1}\right]$$

$$= \left[\frac{\nu}{x} J_\nu + J_\nu'\right]\underbrace{\left\{\left(1 - \frac{2\nu(\nu+1)}{x^2}\right) J_\nu + \frac{\nu+1}{x}\left[\frac{\nu}{x} J_\nu + J_\nu'\right]\right\}}_{J_\nu - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2} J_\nu + \frac{\nu+1}{x} J_\nu'}$$

$$= \frac{\nu}{x}\left[1 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2}\right] J_\nu^2 + \frac{\nu+1}{x} J_\nu'^2 + J_\nu J_\nu'$$

$$= \frac{\nu}{x} J_\nu^2 - \frac{\nu^3}{x^3} J_\nu^2 - \frac{\nu^2}{x^3} J_\nu^2 + \frac{\nu+1}{x} J_\nu'^2 + J_\nu J_\nu'$$

$$J_n^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin 2n\alpha\, J_0(2x\sin\alpha)\, d\alpha$$

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} y^n \sin 2n\alpha =$$

20

$$J_{4mn-2\nu-2} - J_{4mn-2\nu} - J_{4mn+2\nu} + J_{4mn+2\nu+2} = (-1)^{\nu+1}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left[\begin{array}{l} -\frac{(4mn-2\nu-2)^4}{8x^2} + (4mn-2\nu)^4 \\ -(4mn+2\nu+2)^4 + (4mn+2\nu)^4 \end{array}\right] = \begin{array}{l} 8(4mn-2\nu)^3 - 24(4mn-2\nu)^2 \\ -8(4mn+2\nu)^3 - 24(4mn+2\nu)^2 \end{array}$$

$$-16.6\cdot 16m^2n^2\nu \over x^2$$

$$+\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2x}\left|\begin{array}{l}(4mn-2\nu-2)^2-(4mn-2\nu)^2 \\ +(4mn+2\nu+2)^2-(4mn+2\nu)^2\end{array}\right. \begin{array}{l} = -4(4mn-2\nu)+4 \\ \quad 4(4mn+2\nu)+4 \end{array} = 16\nu+8$$

---

bez końców:

$$\dot{y}_0 y_1 = \overline{y}_0^2 J_0' J_2 + \overline{y}_1^2 J_2' J_0 + \overline{y}_{-1}^2 J_2' J_4^2 + \overline{y}_2^2 J_2 J_4' + \overline{y}_{-2}^2 J_4' J_6$$

$$= \overline{y}_0^2\left[J_0' J_2 + J_0 J_2' + J_2' J_4 + J_2 J_4' + \cdots\right] + y_0^2\beta\left[J_2'(J_0 - J_4) + 2J_4'(J_2 - J_6) + 3J_6'(J_4 - J_8) \cdots\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} J_4 + J_6 \\ + J_6 - J_8 \end{array}\right\} = J_5' + J_7' \neq \frac{2.6\, J_6'}{x}$$

$$\int \dot{y}_0 y_1\, dt = y_0 y_1 - \int y_0 \dot{y}_1\, dt$$

$$\frac{1}{x}\left\{2^2 J_2'^2 + 4^2 J_4'^2 + 6^2 J_6'^2 + \cdots\right\}$$

$$\frac{\nu^3}{x^2}$$

$$J_2(x+y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} J_{2-\lambda}(x)\, J_\lambda(y)$$

$$= J_2(x)\, J_0(y) + J_1(x)\, J_1(y) + J_0(x)\, J_2(y) + J_{-1}(x)\, J_3(y) + \cdots$$

$$+ J_3(x)\, J_{-1}(y) + J_4(x)\, J_{-2}(y)$$

$$= J_1(x)\, J_1(y) + J_2(x)\, J_0(y) - J_1(x)\, J_3(y) + J_2(x)\, J_4(y) -$$

$$J_0(x)\, J_2(y) - J_3(x)\, J_1(y) + J_4(x)\, J_2(y) -$$

$$J_2(2x) = J_1^2(x) + 2\left[J_0 J_2 - J_1 J_3 + J_2 J_4 - J_3 J_5 \cdots\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[J_2(2x) - J_1(x)^2\right] = 2\left[J_0 J_2' - J_1 J_3' + J_2 J_4' - J_3 J_5' \cdots \right.$$
$$\left. + J_0' J_2 - J_1' J_3 + J_2' J_4 \cdots \right]$$

$$= 2\left[J_1(2x) - J_3(2x) - J_1(x) J_1'(x)\right]$$

$$J_2(2x) = 2J_1^2 + 4\left[J_0 J_2 + J_2 J_4 + J_4 J_6 \cdots\right]$$
$$= -4\left[J_1 J_3 + J_3 J_5 \cdots\right]$$

$$J_2(0) = 0 = -J_1^2 + 2\left\{J_0 J_2 + J_1 J_3 + J_2 J_4 + J_3 J_5 \cdots\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad J_1 J_1' + J_0 J_2' + J_1 J_3' + J_2 J_4' + \cdots = 0$$
$$+ J_0' J_2 + J_1' J_3 + J_2' J_4 \cdots$$

$$\cancel{J_1 J_0 - J_1 J_2 + J_0 J_1 - J_0 J_3 + J_1 J_2 - J_1 J_4}$$

$$\cancel{- J_1 J_2 - J_1 J_2 + J_0 J_3 - J_2 J_3 + J_1 J_4 - J_3 J_4}$$

$$= 2\left[J_0 J_1 - J_0 J_3 - J_1 J_2 + J_1 J_4 + J_2 J_3 - J_2 J_5 - J_3 J_4 + J_3 J_6\right.$$
$$+ J_1 J_2 - J_1 J_2 - J_0 J_3 + J_2 J_3 + J_1 J_4 - J_3 J_4 \cdots$$

$$= 2\left[J_0 J_1 - J_1 J_2 - 2\left[J_0 J_3 + J_1 J_2 \cdots\cdots\right.\right.$$

$$= \cancel{4 J_1}$$

$$= 4\left[J_0 J_2' - J_1 J_3' + J_2 J_4' \cdots\right] - 2\left(J_0 J_1 + J_1 J_2\right)$$

$$J_1'^2 + J_3'^2 \cdots = J_1'(2x) + 2\underbrace{\left(J_1^2 + J_3^2 + \cdots\right)}_{\int J_1(2x)\,dx} + J_1^2 - 2\underbrace{\left(J_1 J_3 + J_3 J_5 \cdots\right)}_{= \frac{J_2(2x)}{2}}$$

$$J_0(x+y) = J_0(x) J_0(y) + 2\left[-J_1(x) J_1(y) + J_2(x) J_2(y) \cdots - J_3(x) J_3(y) \cdots\right]$$

$$J_0(2x) = J_0^2 + 2\left[-J_1^2 + J_2^2 - J_3^2 \cdots\right]$$

$$J_3(x+y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} J_{3-\lambda}(x)\, J_\lambda(y)$$

$$= J_0(x)\, J_3(y) + J_1(x)\, J_4(y) + J_2(x)\, J_5(y) - J_3(x)\, J_6(y) \cdots$$

$$+4\Big[\qquad \left(\left[\frac{4^2}{2x}\right] + \frac{16.2n}{x} - \frac{32.2n}{x} \quad \right) \quad 2m$$

$$+6\Big[\qquad \left(\left[\frac{6^2}{2x}\right] + \frac{16.3n}{x} - \frac{32.3n}{x} + \dots \right) \quad 3m$$

$$+8\Big[\qquad \left[\ \vdots\ \right]$$

$$J'_{2\nu} + J'_{4n-2\nu} + J'_{4n+2\nu} + J'_{8n-2\nu} + J'_{8n+2\nu} + \dots \quad J'_{4mn+2\nu} =$$

$$= (-1)^{\nu+1}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big[\Big[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)(2m+1) - \frac{1}{2x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Big[\underbrace{4\nu^2 + (4n-2\nu)^2 + (4n-2\nu)^2 + (8n-2\nu)^2 + (8n+2\nu)^2 \dots}_{\left[2(4n)^2\left[1+2^2+\dots m^2\right] + (2m+1)4\nu^2\right] + \frac{32m^3n^2}{3}}\Big]$$

$$\mp (-1)^{\nu}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, 2m\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{8}{3}\frac{m^2n^2}{x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$2\nu\, J'_{2\nu} + (4n-2\nu)J'_{4n-2\nu} - (4n+2\nu)J'_{4n+2\nu} - (8n-2\nu)J'_{8n-2\nu} + (8n+2\nu)J'_{8n+2\nu} \dots = (-1)^{\nu}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big\{$$

$$2\nu\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{2\nu^2}{x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$-4\nu\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{48n^2\nu}{x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \qquad + 4\nu\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{48.n^2\nu}{x}.4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \quad -$$

$$= -(-1)^{\nu}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{48n^2\nu}{x}\,\underbrace{\left[1-2^2+3^2 - \dots m^2\right]}_{\pm\frac{m^2}{2}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Sigma\nu^2 = \frac{n^3}{3}$$

$$\Sigma\Sigma\Pi = \frac{\pm 2}{\pi x^2}\, 2m \quad \frac{8}{3}\frac{m^2n^2}{x} \quad \frac{48n^2}{x}\,\frac{m^2}{2}\frac{n^3}{3}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{m^5n^7}{x^4} \qquad m = \frac{ct}{n} \qquad x = ct$$

$$ctn^2$$

$$\frac{\nu^5}{x^4}$$

Jiné konce volné, budu odečíst dodatně

$$y_0 = y_0\left[J_0 + 2J_{4n} + 2J_{8n} + \dots + 2J_{4mn}\right] = \sqrt{\tfrac{2}{\pi x}}\cos(x+\tfrac{\pi}{4}).m$$

$$\left.\begin{aligned}&+y_1\left[J_2 + J_{4n-2} + J_{4n+2} + J_{8n-2} + J_{8n+2} + \dots\right]\\ &+y_{-1}\left[\text{''} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right]\end{aligned}\right\} - \sqrt{\tfrac{2}{\pi x}}\cos(x+\tfrac{\pi}{4}).m$$

$$+y_2\left[J_4 + J_{4n-4} + J_{4n+4} + \dots\right]$$

$$y_1 - y_0 = y_0\left[-J_0 + J_2 + J_{4n-2} - 2J_{4n} + J_{4n+2} + J_{8n-2} - 2J_{8n} + J_{8n+2} + J_{12n-2} - 2J_{12n} + J_{12n+2}\right. = y_0\left[-J_1' + J_{4n-1}' - J_{4n+1}' + J_{8n-1}' - J_{8n+1}'\right.$$

$$+y_1\left[J_0 - J_2 + J_{4n-4} - J_{4n-2} - J_{4n+2} + J_{4n+4} - J_{8n-2} + 2J_{8n} - J_{8n+2} + J_{12n-4}\right. \qquad y_1\left[+J_1' + J_{4n-3}' - J_{4n+3}' - J_{8n-1}' + J_{8n+1}'\right.$$

$$+y_{-1}\left[J_2 + J_4 - J_{4n-2} + 2J_{4n} - J_{4n+2} + J_{8n-4} - J_{8n-2} - J_{8n+2} + J_{8n+4}\right. \qquad y_{-1}\left[-J_3' - J_{4n-1}' + J_{4n+1}' + J_{8n-3}' - J_{8n+3}'\right.$$

$$+y_2\left[J_2 - J_4 + J_{4n-6} - J_{4n-4} - J_{4n+4} + J_{4n+6} - J_{8n-4} + J_{8n-2} + J_{8n+2} - J_{8n+4}\right. \qquad y_2\left[J_3' + J_{4n-5}' - J_{4n+5}' - J_{8n-3}' + J_{8n+3}'\right.$$

$$y_{-2}\left[-J_4 + J_6 - J_{4n-4} + J_{4n-2} + J_{4n+2} - J_{4n+4} + J_{8n-6} - J_{8n-4} \dots\right. \qquad y_{-2}\left[-J_5' - J_{4n-3}' + J_{4n+3}' + J_{8n-5}' - J_{8n+5}'\right.$$

$$= y_0\left[-J_1' + J_{4n-1}' - J_{4n+1}' + J_{8n-1}' - J_{8n+1}' \dots\right.$$

$$+\frac{2y_0\,\beta}{x}\left[2J_2' + (4n-2)J_{4n-2}' - (4n+2)J_{4n+2}' + (8n-2)J_{8n-2}' + (8n+2)J_{8n+2}'\right.$$

$$+2\left[+4J_4' + (4n-4)J_{4n-4}' - (4n+4)J_{4n+4}' - (8n-4)J_{8n-4}' + (8n+4)J_{8n+4}' \dots\right]$$

$$+3\left[6J_6' + (4n-6)J_{4n-6}' - \right.$$

$$+4\left[8J_8' + (4n-8)J_{4n-8}'\right.$$

$$J_\nu = (-1)^{\frac{\nu}{2}}\sqrt{\tfrac{2}{\pi x}}\left[\sin(x+\tfrac{\pi}{4}) + \tfrac{\nu^2}{2x}\cos(x+\tfrac{\pi}{4})\right]$$

$$J_\nu' = (-1)^{\frac{\nu}{2}}\sqrt{\tfrac{2}{\pi x}}\left[\cos(x+\tfrac{\pi}{4}) - \tfrac{\nu^2}{2x}\sin(x+\tfrac{\pi}{4})\right]$$

$$(4mn-2\nu)J_{4mn-2\nu}' - (4mn+2\nu)J_{4mn+2\nu}' = (-1)^{\nu}\sqrt{\tfrac{2}{\pi x}}\left[-4\nu\cos(x+\tfrac{\pi}{4}) + \tfrac{(4mn-2\nu)^3}{2x}\sin(x+\tfrac{\pi}{4}) + \tfrac{(4mn+2\nu)^3}{2x}\sin\dots\right]$$

$$= (-1)^{\nu+1}\sqrt{\tfrac{2}{\pi x}}$$

$$\dot{y}_0(y_1 - y_0) = 2c\,\dot{y}_0^2\left[\dots\dots + \frac{4\beta}{x}\left\{\sin(x+\tfrac{\pi}{4}).\frac{2}{\pi x}\right.\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}&\left[\sin(x+\tfrac{\pi}{4}) + \cos(x+\tfrac{\pi}{4})\left(\tfrac{2^2}{2x}\right] + \tfrac{16n}{x} - \tfrac{32n}{x} + \tfrac{48n}{x}\right) && m && \left[4\nu\cos(x+\tfrac{\pi}{4}) + \tfrac{48m^2n^2\nu}{x}\sin(x+\tfrac{\pi}{4})\right.\\ &+\left[\qquad\left(\tfrac{4^2}{2x}\right] + \tfrac{16.2n}{x} - \tfrac{32.2n}{x}\right) && 2m\\ &+\left[\qquad\left[6^2\right] + 16.3n \quad 32.3n\right. && 3n\end{aligned}\right.$$

$J_0(0) = 1 = J_0^2 + 2\left[J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \cdots\right]$

$$\boxed{J_1^2 + J_3^2 + \cdots = \tfrac{1}{4}\left[1 - J_0(2x)\right]}$$

$$\boxed{J_2^2 + J_4^2 + J_6^2 \cdots = \tfrac{1}{4}\left[1 + J_0(2x)\right] - \frac{J_0^2}{2}}$$

$J_0 J_1' + J_1 J_2 + J_2 J_3 + J_3 J_4 \cdots$

$- J_0 J_3 - J_1 J_4 - J_2 J_5 \cdots$

$+ \left[J_1 J_4 + J_3 J_6 + J_5 J_8 \cdots\right] - \left[J_1 J_3 + J_3 J_5 \cdots\right]$

$- J_1 J_2 - J_3 J_4 \cdots$

$$\boxed{+J_2(2x) + \cdots = (2J_1^2) = -4\left[J_1 J_3 + J_3 J_5 + \cdots\right]}$$

$$\boxed{J_1^2(x) = +2\left[J_0 J_2 + J_1 J_3 + J_2 J_4 + \cdots\right]}$$

$J_2'^2 + J_4'^2 + \cdots = \frac{J_1^2}{4} + \tfrac{1}{2}\left[J_3^2 + J_5^2 + \cdots\right] - \tfrac{1}{2}\left[J_1 J_3 + J_3 J_5 \cdots\right] = -\frac{J_1^2}{4} + \tfrac{1}{8}\left[1 - J_0(2x)\right] + \tfrac{1}{8} J_2(2x) - \frac{J_1^2}{4}$

$= \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{1}{2} - 2J_1^2 - J_1'(2x)\right]$

$$\boxed{J_0'^2 + J_2'^2 + J_4'^2 + \cdots = \cancel{\frac{1}{2} - \frac{J_0(2x)}{2} + \frac{J_2(2x)}{2}}}$$

$= \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4} J_1^2 - J_1'(2x)$

$J_1(x)J_2(y) + J_2(x)J_1(y) + J_3(x)J_0(y) - J_4(x)J_1(y) + J_5(x)J_2(y) - J_6(x)J_3(y) \cdots$

$= J_1(x)J_2(y) + J_2(x)J_1(y) - 2\{J_0(x)J_3(y) - J_1(x)J_4(y)$
$+ J_3(x)J_2(y) - J_4(x)J_1(y)$

$J_3(2x) = 2\left\{J_1 J_2 - 2\left[J_0 J_3 - J_1 J_4 + J_2 J_5 - J_3 J_6 + \cdots\right]\right\}$

$\cancel{J_3(2x) =} \; J_0 J_3 - J_1 J_4 + J_2 J_5 \cdots = \frac{J_1 J_2}{2} - \tfrac{1}{4} J_3(2x)$

$$\boxed{J_2(2x) = \cdots + 4\left[J_0 J_2 + J_2 J_4 + J_4 J_6 + \cdots\right]\}}$$

$2 J_2'(2x) - 4 J_1 J_1' = 4\left[J_0 J_2' + J_2 J_4' \cdots \right.$
$\left. + J_0' J_2 + J_2' J_4 \cdots\right]$

$= J_0 J_1 - J_0 J_3 + J_2 J_3 - J_2 J_5 + \cdots$

$- J_1 J_2 - J_1 J_2 + J_1 J_4 - J_3 J_4 + J_3 J_6 - J_5 J_6$

$1 = J_0^2 + 2\left[J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + \cdots\right]$

$0 = J_0 J_0' + 2\left[J_1 J_1' + J_2 J_2' + \cdots\right]$

$0 = -J_0 J_1 + J_1 J_0 - J_1 J_2 + J_1 J_2 \cdots$

XVII

$$u = \frac{3}{4} Rc\, xy\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\rho^3}\right) + \frac{9}{2} Rac \frac{(x+a)(x+2a)y}{\rho^5}$$

$$v = \frac{3Rc}{4}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right) + \frac{3}{4} Rc\, y^2\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\rho^3}\right) - \frac{3}{2}\frac{Rac(x+a)}{\rho^3} + \frac{9}{2} Rac \frac{y^2(x+a)}{\rho^5} \qquad // \frac{Rca^2}{\delta}\alpha$$

$$w = \frac{3}{4} Rc\, yz\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\rho^3}\right) + \frac{9}{2} Rac \frac{yz(x+a)}{\rho^5}$$

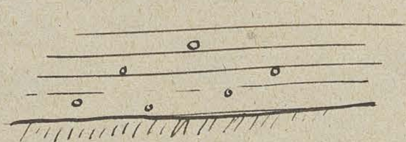
$$\sum\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right)$$

$$= \sum\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{(x+2a)^2+y^2+z^2}}\right] = \sum\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2+4ax+4a^2}}\right] = \sum\frac{1}{r}\left\{1 - \left[1 + \frac{4ax}{r^2} + \frac{4a^2}{r^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\left[1 - \frac{2ax}{r^2} - \frac{2a^2}{r^2} + \frac{6x^2}{r^4}\right.$$

$$\int \frac{2\pi r\, dr}{r^3} = -\frac{2\pi}{r}\Big| \qquad\qquad x=0 \qquad = \sum \frac{2a^2}{r^3}$$

$$\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\rho^3}\Big|_{x=0} = \frac{6a^2}{r^5}$$



$$\cancel{9}\; 9Ra^2c \sum\frac{y^2}{r^5} = 9Ra^2c \int \frac{\cos^2\theta}{r^5}\, r^3\, d\theta\, dr =$$

Jeśli tylko jedna warstwa w odległości a, wszystkie z jednakową gęstością

$$\sum_{\text{z wszystkich}} v = \underbrace{\frac{3Rc}{4}\sum\frac{2a^2}{r^3} - \frac{3}{2}\frac{Ra^2c}{\sum\rho^3}}_{\cancel{\frac{3}{2} Ra^2c \sum\frac{a^2}{r^5}}} + \underbrace{\frac{3}{4} Rc \sum\frac{6a^2}{r^5}y^2 + \frac{9}{2} Ra^2c\sum\frac{y^2}{\rho^5}}_{= 9Ra^2c \sum\frac{y^2}{r^5}}$$

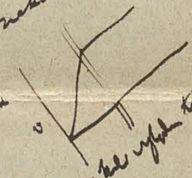
tego samego rzędu punktów we wszystkich mniejszych owej warstwy

tj. rzędu: $9\frac{Ra^2c}{\delta^3}$

więc w całej warstwie trzeba takie punktów

z odpowiednim znakiem superponować

można tak



gdy dla każdej kol. w stosunku tej punktów

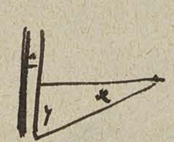
. . . .

. . . .

$$\sum\frac{y^2}{r^5} = 0 + \frac{2 l^2}{\delta^5}\left\{1 + \frac{2}{\sqrt{2^5}} + \frac{2}{\sqrt{5^5}} + \frac{2}{\sqrt{10^5}} + \frac{2}{\sqrt{}}\right.$$

$$+ \frac{2 \cdot 2^2}{(2\delta)^5}\left\{\right.$$

Dla r dużego (punkty w odległości od owej warstwy)



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r^2}\cos\theta\; 2\pi r \sin\theta\, d\theta \quad n\, \cancel{r^2}$$

$$= n\pi$$

$$\int 2\pi r^3\, dr$$

$$\frac{1}{x^2}$$

$$v = \cancel{\frac{3Rc}{4}\sum\frac{2a^2}{r^3} - \frac{3}{2}\sum\frac{Rac\,x}{\rho^3}} +$$

$$v = \frac{3}{4}Rc\sum\frac{2ax}{r^3} + \frac{3}{4}Rc\sum\frac{6axy^2}{r^5} - \frac{3}{2}Rac\sum\frac{x}{\rho^3} + \frac{9}{2}Rac\sum\frac{y^2 x}{\rho^5}$$

$$\sum\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right) = n\pi \quad (n = \text{liczba punktów na } 1\,\text{cm}^2)$$

$$v = \frac{3}{2} Rc\, n\pi\, a$$

$$-\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right) = 2a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{4a^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} = \frac{2ax}{r^3} + 2a^2\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right)$$

$$\frac{1}{\rho^3} = \frac{1}{r^3} - \frac{6ax}{r^5}$$

$$v = \frac{3}{2}Rc\underbrace{\left\{\cancel{\frac{ax}{r^3}} + a^2\left(\cancel{\frac{1}{r^3}} - \frac{3x^2}{r^5}\right) - \cancel{\frac{a^2}{r^3}} - \cancel{\frac{ax}{r^3}} + \frac{6a^2x^2}{r^5}\right\}}_{\frac{3a^2x^2}{r^5}} + \underbrace{\frac{3}{4}Rc\,y^2\frac{6ax}{r^5} + \frac{9}{2}\frac{Rac\,y^2x}{r^5}}_{9Rac\frac{xy^2}{r^5}}$$

tensor ten maleje z odległością od ściany jak $\frac{1}{x^2}$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0$$

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = \alpha$$

$$u = \alpha \lg r + \beta$$

dla $r=\infty$ $u=0$ zatem wszędzie $\alpha=\beta=0$

więc walec nieskończony nie może się poruszać w kierunku swojej osi tak aby prędkość w ∞ była $=0$

(bez prędkości początkowych)

$v \sin\psi = v_0 \sin\varphi \qquad v = v_0(1+\varepsilon\cos\varphi)$

$\sin\psi = \dfrac{\sin\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \sin\varphi - \varepsilon\sin\varphi\cos\varphi \qquad \cos\psi = \sqrt{\underbrace{1-\sin^2\varphi}_{\cos^2\varphi} + 2\varepsilon\sin^2\varphi\cos\varphi}$

$\cos\psi\, d\psi = \cos\varphi\, d\varphi - \varepsilon(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\, d\varphi \qquad = \cos\varphi\left(1+\varepsilon\dfrac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\right) = \cos\varphi + \varepsilon\sin^2\varphi$

$d\psi = \dfrac{\cos\varphi + \varepsilon(1-2\cos^2\varphi)}{\cos\varphi + \varepsilon(1-\cos^2\varphi)}\, d\varphi = \dfrac{1+\varepsilon\cancel{\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}} - \varepsilon\cos\varphi}{1+\varepsilon\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}}\, d\varphi = \left[1-\varepsilon\cos\varphi\right] d\varphi$

$\sin\varphi = \sin\psi + \varepsilon\sin\psi\cos\psi$

$d\varphi = d\psi(1+\varepsilon\cos\psi)$

$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\psi\,(1+\varepsilon\cos\psi)^2\, d\psi \left(v_0 + u\cos\psi + \frac{2}{3}\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)\cos\psi$

$\sin\psi\,(\cos\psi + 2\varepsilon\cos^2\psi)\, d\psi \left(v_0 + \frac{2}{3}\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} + u\cos\psi\right)$

$[redacted] = f_e(v_0, u)$

$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi \sin\psi\, d\psi = \frac{2}{3}$

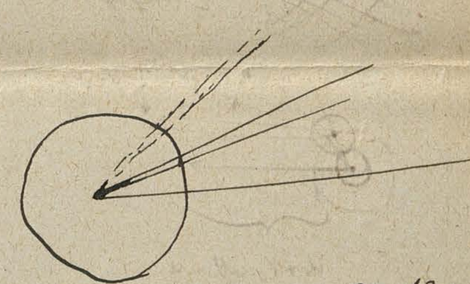
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\, d\varphi = \sin\psi - \sin\cos\psi$
$= 1 - \frac{1}{3}$

$\int_u^{\infty} \cdots \quad - \int_{-\infty}^{u}$

$v_0 \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\psi\cos\psi\, d\psi + 2\varepsilon\cos^2\psi\sin\psi\, d\psi}\ + \cdots$

$v_0\left[\frac{1}{2} + \frac{2\varepsilon}{3}\right] +$

$\int_0^u v^3 \cdots$



$\frac{1}{4}\int_u^{\infty} v^4 \cdots - \int_{-\infty}^{u} v^4 \cdots = 0$

$\pi\, \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} = \pi \cdot 2\sqrt{\frac{2}{3\pi}}$
$= \pi \cdot \sqrt{\frac{8}{3\pi}}$

$2\pi \sin\psi\, d\varphi \cos\varphi = \dfrac{2\pi \sin 2\varphi\, d2\varphi}{4}$

$4\pi \cdot \frac{4}{9\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}$

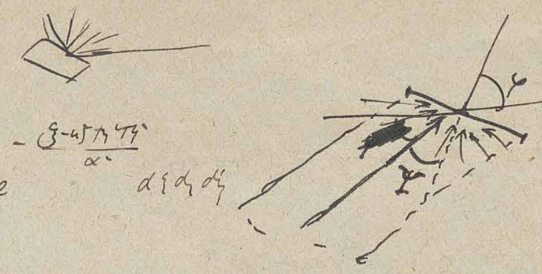
$4\pi \dfrac{\left\{\frac{\alpha^4}{2} + \frac{\alpha^4}{9\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right\}^u}{\alpha^3\sqrt{\pi}} = \pi \cdot \frac{11}{9}\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}$

$\underbrace{\frac{11}{9} \cdot 2\sqrt{\frac{2}{3\pi}}}$

$\pi \cdot \frac{11}{9}\sqrt{\frac{8}{3\pi}}$

Założenie ściany całkiem absorbującej

~~...~~ moment ruchu pro sek. o kierunku n padający na płaszczyznę



$$\frac{n}{\alpha^3\sqrt{\pi^3}}\iiint \xi^m\left[\xi\cos l+\eta\cos m+\zeta\cos n\right]d\zeta\; e^{-\frac{(\xi-u)^2+\eta^2+\zeta^2}{\alpha^2}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

najprościej przyjąć $\cos n=0$

$$X=\frac{n}{\alpha^3\sqrt{\pi^3}}\iiint \xi\left[\xi\cos\varphi+\eta\sin\varphi\right]e^{-\frac{(\xi-u)^2+\eta^2+\zeta^2}{\alpha^2}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

warunek $\xi\cos l+\eta\cos m+\zeta\cos n$

$=c\cos\psi>0$

$0<\psi<\frac{\pi}{2}$

$\xi\cos\lambda$

$$\int_{-(\xi\cos\lambda+\eta\cos\mu)}^{+\infty}\dots d\zeta$$

$$\int_{-(\xi\cos\lambda)}^{+\infty}\dots d\eta$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\dots d\xi$$

$\int\sin^3\varphi\,d\varphi=$

$\int(1+\cos^2\varphi)\,\cancel{\dots}\,d\varphi=$

$v_0\cos\psi\,\cancel{\dots}\left(1+\frac{\varepsilon}{\cos\psi}\right)=v\cos\psi$

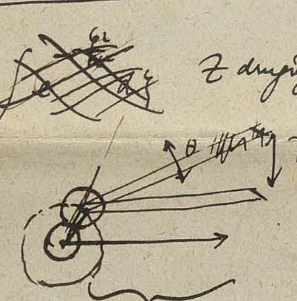
$=v_0\cos\psi(1+\varepsilon\cos\psi)$

$\cos\varphi=\cos\psi\,\frac{1+\varepsilon\cos\psi}{1+\frac{\varepsilon}{\cos\psi}}=\cos\psi\left(1+\varepsilon\cos\psi-\frac{\varepsilon}{\cos\psi}\right)$

$$\iiint\xi(\xi\cos l+\eta\cos m)\,\cancel{\dots}\;e^{-\frac{(\xi-u)^2+\eta^2+\zeta^2}{\alpha^2}}\,\cancel{\dots}\,d\xi+\cancel{\dots}\;e^{-\frac{\xi^2}{\alpha^2}}\;\xi\zeta\,d\xi$$

$v_0\,\cancel{\dots}\left[1+\frac{\varepsilon}{\cos\psi}\right]=v\cos\psi$

$=v_0\cos\psi(1+\varepsilon\cos\psi)$



Z drugiej strony

$$\frac{1}{2}\int\sin\varphi\,d\varphi\left[v-\frac{2}{3}\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right]\cos\varphi$$

$v-v$

$v=v_0(1+\varepsilon\cos\psi)$

$v=v_0+\varepsilon\left[v\cos\psi-U\right]$

$v\neq v_0(1+\varepsilon\cos\psi)-U\varepsilon$

$\cos\varphi=\cos\psi-\varepsilon\sin^2\psi$

$\frac{1}{\cos\psi}=\frac{1}{\cos\psi}\left(1+\varepsilon\frac{\sin^2\psi}{\cos\psi}\right)$

$U+V_0\cos\theta-u$

$$d\varphi=d\psi\,\frac{v\cos\psi}{v_0\cos\varphi}=d\psi\cos\psi\left[\frac{1}{\cos\varphi}+\varepsilon\right]$$

$\sin\varphi=\sin\psi(1+\varepsilon\cos\psi)$

$$=d\psi\cos\psi\left[\frac{1}{\cos\psi}+\varepsilon\frac{\sin^2\psi}{\cos\psi}+\varepsilon\right]\qquad\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{3}}\,c$$

$$=\cancel{\dots}\,d\psi\left[1+\frac{\varepsilon}{\cos\psi}\right]\qquad\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{8}{3\pi}}\,c$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin\psi(1+\varepsilon\cos\psi)\cos\psi\left(1+\frac{\varepsilon}{\cos\psi}\right)d\psi\left[v_0\,\cancel{\dots}+\frac{U}{v_0}\cos\psi\right.$$

$$\left.-\frac{2}{3}\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\,\cancel{\dots}\right]$$

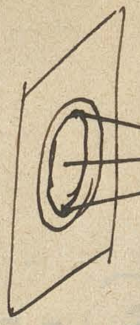
$$\neq\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin\psi\,d\psi\cos\psi\left(v_0-\frac{2}{3}\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}+u\cos\psi\right)$$

$\sin\psi\,(1+\varepsilon\cos\psi)(\cos\psi+\varepsilon)\,d\psi$

$$\sin\psi\left[\cancel{\cos\psi}+\varepsilon(1+\cos^2\psi)\right]d\psi\quad\left(v_0-\frac{2}{3}\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)+U\left[\sin\psi\cos^2\psi+\cancel{\dots}\right]=\left(v_0\,\cancel{\dots}-\frac{2}{3}\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{1}{2}\pm\frac{u}{3}$$

$$\neq\cancel{\dots}\,\frac{4}{3}\varepsilon\left(v_0-\frac{2}{3}\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)+\frac{U}{3}$$

Uvaigre lim $\frac{R}{\delta}=0$ lim $\frac{R}{a}=0$



$$v = \sum{}' \left\{ \frac{3}{4} Rc\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho}\right) + \frac{3}{4} Rc\, y^2 \left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\rho^3}\right) - \frac{3}{2} Rca\frac{(x+a)}{\rho^3} + \frac{9}{2} Rca\frac{(x+a)y^2}{\rho^5} \right\}$$

$$\lim_{x=\infty} v = \sum \frac{3}{4} Rca\frac{2x}{r^3} + \frac{9}{4}\frac{2 Rca x y^2}{r^5} - \frac{3}{2} Rca\frac{x}{r^3} + \frac{9}{2} Rca\frac{x y^2}{r^5}$$

$$= \sum{}' \left(\cancel{-\frac{3}{4} Rac\frac{x}{r^3} + \frac{27}{4} Rac\frac{xy^2}{r^5}}\right) = 9 Rca\sum\frac{xy^2}{r^5}$$ independent of $\frac{a}{\delta}$

$$\sum{}' \frac{x}{r^3} = \frac{1}{\delta^2}\int_{\xi=0}^{\infty}\frac{2\pi\,\xi\, d\xi\, x}{\sqrt{x^2+\xi^2}^3} = 2\pi x\frac{1}{\sqrt{x^2+\xi^2}}\Big|_0^\infty = \frac{2\pi}{\delta^2}$$

$$2\pi \cancel{\iint\frac{\xi\, d\xi\, d\varphi}{\sqrt{x^2+\xi^2}^3} = \iint\frac{dy\, dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}} = \varphi$$

$$= \varphi\left[\cancel{\frac{1}{\sqrt{x^2+\xi^2}} - \frac{1}{x}}\right]$$

$$\sum\frac{xy^2}{r^5} = \frac{1}{\delta^2}x\iint\frac{y^2\, dy\, dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}$$

$x^2+y^2+z^2 = x^2$

$y^2 = \xi^2\sin^2\varphi$

$z^2 = \xi^2\cos^2\varphi$

$dy\,dz = \xi\, d\xi\, d\varphi$

$\xi = x\tan\theta$

$d\xi = \frac{x\, d\theta}{\cos^2\theta}$

$$= \frac{x}{\delta^2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int\frac{\xi^3\sin^2\varphi\, d\xi\, d\varphi}{\sqrt{x^2+\xi^2}^5} = \frac{x}{\delta^2}\pi\int_0^\infty\underbrace{\frac{\xi^3\, d\xi}{\sqrt{x^2+\xi^2}^5}} = \cancel{\frac{\pi x}{\delta^2}\int\frac{y\,dy}{\sqrt{x^2+y}}}$$

$x^2+\xi^2 = x^2(1+\tan^2\theta) = \frac{x^2}{\cos^2\theta}$

$$= \int\frac{x^4\tan^3\theta\, d\theta\cos^5\theta}{\cos^2\theta\; x^5}$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\, d\theta$$

$\cos\theta\,(1-\cos^2\theta)$

$\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}$

$1-\frac{1}{3}$

$$= \frac{2\pi}{3\delta^2}$$

$$\lim_{x=\infty} v = \cancel{-\frac{3}{4}Rac\cdot\frac{2\pi}{\delta^2} + \frac{27}{4}Rac\frac{2\pi}{3\delta^2}}$$

$$\boxed{= \frac{6 Rac\pi}{\delta^2}}$$

independent of $\frac{a}{\delta}$?

if $\frac{a}{\delta}$ very small

$F = 6\pi\mu Rc$

$v_\infty = \frac{Fa}{\mu\delta^2}$

$F = \frac{v}{a}\frac{\mu}{\delta^2}$

~~why?~~ ... half the usual value ?

on the other side of the wall

velocity ... $= \frac{F}{\ldots} = 6\frac{Ra\ldots}{\delta^2}$

$$\frac{9}{2}-\frac{3}{2} = 3$$

Ruch wypadkowy (gdy wszystkie kule swobodnie się poruszają) = superpozycja n ruchów składowych przy których tylko n-ta kula się porusza, a wszystkie inne w spoczynku

$$v = \sum_n v_{0,0,0,0,1,n}$$

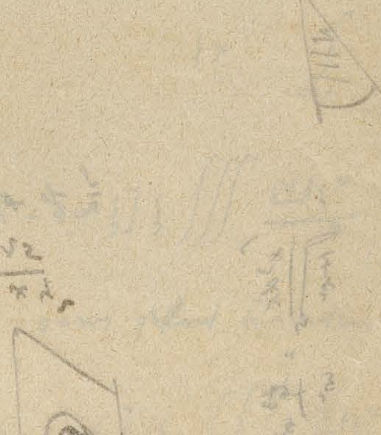
Chodzi zatem o rozwiązanie zadania pośredniczącego:

Jaki ruch powstaje jeśli wszystkie z wyjątkiem jednej są w spoczynku?

jeśli $\lim \frac{a}{\delta} = 0$ będzie to samo jak gdyby innych kul wcale nie było

1). Jedna jedyna istnieje która się porusza $\int \frac{}{\rho^3} u_1$

2). Druga ~~tej~~ nieruchoma; powstaje odbicie



$$+\frac{3}{2}Rc\frac{a\,y}{\rho^3}$$

$$u_{1S} = -\frac{3}{4}Rc\left(1-\frac{R^2}{\rho^2}\right)\frac{(x+2a)y}{\rho^3} + \frac{3}{2}Rc\left[3a - \frac{5(x+2a)R^2}{\rho^2}\right]\frac{(x+a)\,y(x+a)}{\rho^5}$$

$$v_{1S} = -\frac{1}{4}Rc\left(\frac{3}{\rho}+\frac{R^2}{\rho^3}\right) - \cdots \frac{y^2}{\rho^3} - \frac{3}{2}Rc\left[a - \frac{(x+2a)R^2}{\rho^2}\right]\frac{(x+a)}{\rho^3} + \frac{3}{2}Rc\left[3a - \frac{5(x+2a)}{\rho^2}R^2\right]\frac{y^2(x+a)}{\rho^5}$$

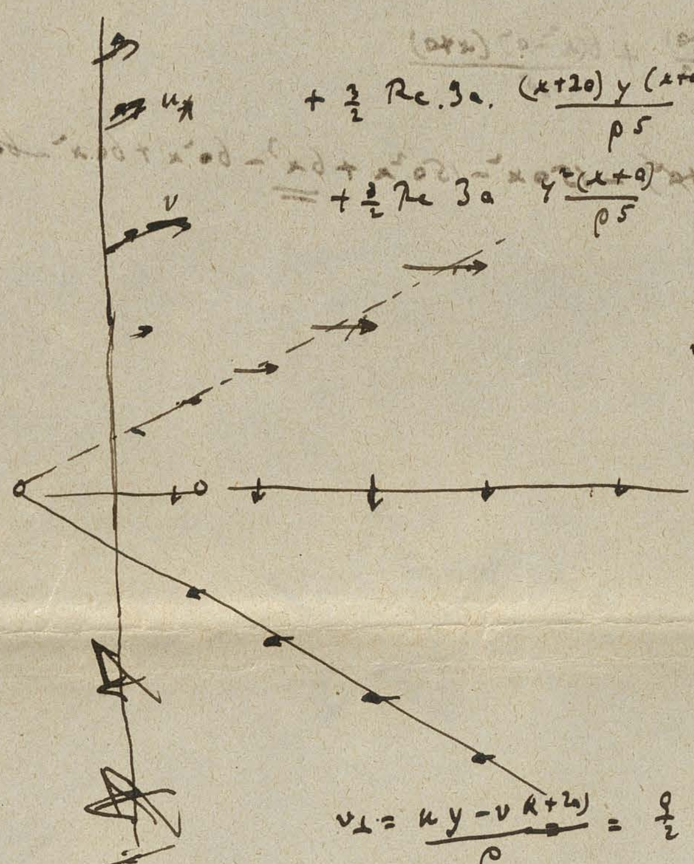
$$u = -2x\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{x^2}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial x}$$

$$v = -2x\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{x^2}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial y}$$

$$w = -2x\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{x^2}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial z}$$

$$\underbrace{ux+vy+wz}_{r\,v_r} = -2x\underbrace{\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\cdots\right)}_{r\frac{\partial}{\partial r}}u_1 + \frac{x^2}{\mu}(\cdots)p_1$$

$$v_r = -2x\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{x^2}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial r}$$



$$\frac{y}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$+\frac{3}{2}Rc\,3a\frac{(x+2a)\,y(x+a)}{\rho^5} = \frac{9}{2}Rca\frac{(x+a)}{\rho^3}\,y\frac{(x+2a)}{\rho^2} + \frac{3}{2}Rca\frac{y}{\rho^3}$$

$$+\frac{3}{2}Rc\,3a\frac{y^2(x+a)}{\rho^5} - \frac{3}{2}Rc\,a\frac{x+a}{\rho^3} = \frac{9}{2}Rca\frac{(x+a)}{\rho^3}\left[\frac{y^2}{\rho^2}-\frac{1}{3}\right]$$

$$v_\rho = \frac{u(x+2a)+vy}{\rho}$$

$$= \frac{9}{2}\frac{Rca(x+a)}{\rho^4}y\left[\frac{(x+2a)^2+y^2}{\rho^2}-\frac{1}{3}\right]$$

$$= 3\frac{Rca(x+a)y}{\rho^4} + \frac{3}{2}Rca\frac{y(x+a)}{\rho^4}$$

$$= \frac{3Rca\,y(3x+5a)}{\rho^4}$$

$$= \cancel{\frac{3Rca(x+a)}{\rho^3}}\cdots$$

$$v_\perp = \frac{uy-v(x+2a)}{\rho} = \frac{9}{2}\frac{Rca(x+a)}{\rho^3}\,\cancel{\frac{y^2(x+2a)-(x+2a)y^2}{\rho}}\cdots\frac{x+2a}{3\rho} + \frac{3}{2}Rca\frac{y^2}{\rho^3}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{Rca(x+a)}{\rho^3}\cos\varphi$$

$$\frac{v}{u} = \operatorname{tg}\gamma = \frac{\frac{y^2}{\rho^2}-\frac{1}{3}}{\frac{y(x+2a)}{\rho^2}} = \frac{3y^2-\rho^2}{y(x+2a)} = \frac{2y^2-(x+2a)^2}{y(x+2a)}$$

$$\text{dla } x=-a \qquad \operatorname{tg}\gamma = \frac{2y^2-a^2}{ya}$$

$$y\frac{(x+2a)}{\rho^5} + \frac{y(x+a)}{\rho^5} - \cancel{\frac{5y(x+a)(x+2a)^2}{\rho^7}} + \frac{2y(x+a)}{\rho^5} - \cancel{\frac{5(x+a)y^3}{\rho^7}} + \frac{(x+a)y}{\rho^5} + \frac{y(x+a)}{\rho^5} - \cancel{\frac{5y\,z^2(x+a)}{\rho^7}}$$

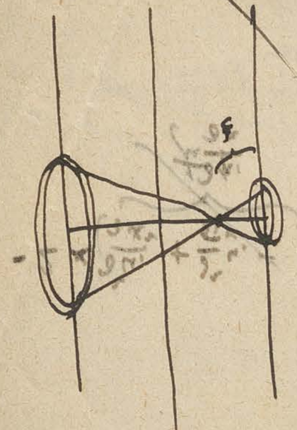
$$-\frac{5y(x+a)}{\rho^5}$$

$$-2x\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+\cdots\right) - 2\frac{\partial u_1}{\partial x} + \cancel{\frac{2x}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial x}} + \cancel{\frac{x^2}{\mu}\Delta p_1}$$

$$\cancel{\frac{x}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial x}}$$

17

Dla przestrzeni między śrubą a kulkami:



$$\sum \psi^2\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\rho^3}\right)$$

$$\int_0^{2\pi}\!\!\int \omega^3\,d\omega\,d\psi\,\cos^2\psi\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\rho^3}\right)$$

$$=\pi\int \omega^3\,d\omega\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\rho^3}\right)$$

$$\cancel{r=\frac{\omega}{\sin\varphi}} \qquad \cancel{\rho = r\,\frac{2a-\xi}{\xi}}$$

$$\omega = \xi\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

$$r=\frac{\xi}{\cos\varphi}$$

$$\rho=\frac{2a-\xi}{\cos\varphi}$$

$$=\frac{\pi}{\delta^2}\int \xi^4\,\mathrm{tg}^3\varphi\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\left[\frac{\cos^3\varphi}{\xi^3}-\frac{\cos^3\varphi}{(2a-\xi)^3}\right]=\frac{\pi}{\delta^2}\,\xi\left[1-\frac{\xi^3}{(2a-\xi)^3}\right]\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi}$$

$$\int\left(\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}-\sin\varphi\right)d\varphi$$

$$\underbrace{\frac{1}{\cos\varphi}+\cos\varphi\Big|_0}$$

$$\left[\frac{1}{\cos\varphi}+\cos\varphi-2\right]$$

$$\sum\frac{(x+a)}{\rho^3}=$$

$$(\xi+a)\int\frac{2\pi\omega\,d\omega}{\rho^3}=(a+\xi)\,2\pi\int\frac{\xi^2\,\mathrm{tg}\varphi\,d\varphi}{\cos^2\varphi}\,\frac{\cos^3\varphi}{(2a-\xi)^3}=\frac{2\pi\,\xi^2(a+\xi)}{(2a-\xi)^3}(\cos\varphi-1)$$

$$\sum\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho}\right)=2\pi\int\left(\frac{\cos\varphi}{\xi}-\frac{\cos\varphi}{2a-\xi}\right)\xi^2\,\mathrm{tg}\varphi\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=2\pi\xi\left[1-\frac{\xi}{2a-\xi}\right]\underbrace{\int\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\cos^2\varphi}}\left(\frac{1}{\cos\varphi}-1\right)$$

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2a}+\frac{2a^2}{(2a)^3}+\frac{6a^2\cdot 4a^2}{(2a)^5}\right)$$

$$\frac{3}{2a}+\frac{2}{4a}+\frac{2}{4a}$$

$$-\frac{x+a}{r^3}+\frac{2x}{r^3}-\frac{3(x^2+a^2)(x+a)}{r^3}$$

$$\cancel{-3(x+a)x^2}\;+\frac{6a(x+a)^2}{r^5}-\frac{30a(x+a)^3}{r^7}$$

$$+\frac{(x-a)}{r^3}-\frac{3(x-a)y^2}{r^5}+\frac{6ax(x+a)}{r^5}-\frac{30axy^2(x+a)}{r^7}$$

$$+\frac{x-a}{r^3}-\frac{3(x-a)x^2}{r^5}+\frac{6ax(x+a)}{r^5}-3$$

$$-\frac{6(x-a)(y^2+x^2)}{r^5}+\frac{15ax(x+a)}{r^5}-\frac{30ax(x+a)}{r^5}$$

$$+\frac{6a(x+a)^2}{r^5}-\frac{6(x-a)}{r^3}+\frac{6(x^2-a^2)(x+a)}{r^5}$$

$$6a(x^2+2ax+a^2)-15ax^2-15a^2x+6x^3-6a^2x+6ax^2-6a^3$$

$$u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} \quad \Big\| \quad V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad \rho = \sqrt{y^2+z^2}$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial p}{\partial x} =$$

$$\nabla^2 v = \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\nabla^2 w = \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial\rho} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = +\frac{y}{\rho^3}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} - \frac{y}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial\rho} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho^3}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} - \frac{3y^2}{\rho^5}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{3y^2}{\rho^4}\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} - \frac{y^2}{\rho^3}\frac{\partial^3\psi}{\partial\rho^3}$$

$$\nabla^2 u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial\rho} - \frac{1}{\rho^3}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial^3\psi}{\partial\rho^3}$$

$$F_t = -p_{xx}\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{a} + p_{xy}\frac{xy}{a\sqrt{\ }} + p_{xz}\frac{xz}{a\sqrt{\ }}$$

$$= \frac{-p_{xx}(a^2-x^2) + p_{xy}\,xy + p_{xz}\,xz}{a\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{x(xp_{xx}+yp_{xy}+zp_{xz}) - a^2 p_{xx}}{a\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\frac{(xp_{xx}+\dots)}{a} = \frac{1}{a^2}\Big[-a^2 p + \mu\Big[x\big(r\tfrac{\partial}{\partial r}-1\big)u + y\big(r\tfrac{\partial}{\partial r}-1\big)v + z\big(\cdots-1\big)w\Big] + \mu\underbrace{\Big(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\Big)}_{r\frac{\partial}{\partial r}}(xu+yv+zw)\Big]$$

$$F_t = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}\Big\{\cancel{-pxa^2}\ \mu x\Big[x\big(r\tfrac{\partial}{\partial r}-1\big)u + y\big(r\tfrac{\partial}{\partial r}-1\big)v + z\big(r\tfrac{\partial}{\partial r}-1\big)w\Big] + \mu x r\frac{\partial}{\partial r}(ux+vy+wz)$$
$$\cancel{+a^2 px} - a^2\mu\big(r\tfrac{\partial}{\partial r}-1\big)u - a^2\mu\frac{\partial}{\partial x}(ux+vy\ldots)\Big\}$$

$$= \frac{\mu}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}\Big\{\cancel{a^2\big(r\tfrac{\partial}{\partial r}-1\big)u}\ \cancel{y\big[x\big(r\tfrac{\partial}{\partial r}-1\big)v - y\big(r\tfrac{\partial}{\partial r}-1\big)u\big] + z\big[x\big(r\tfrac{\partial}{\partial r}-1\big)w - z\big(r\tfrac{\partial}{\partial r}-1\big)u\big]} + rx\frac{\partial}{\partial r}(ux+vy+wz) - a^2\frac{\partial}{\partial x}(ux+v\ldots)\Big\}$$

$$ux+vy+wz = \frac{2\alpha x}{r} - \frac{2\mathcal{D}x}{r^3} + Ux = \cos\theta\Big[2\alpha - \frac{2\mathcal{D}}{r^2} + Ur\Big]$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(ux+vy+wz) = \cos\theta\Big[U + \frac{4\mathcal{D}}{r^3}\Big] = \frac{Ux}{a} + \frac{4\mathcal{D}x}{a^4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\qquad) = \frac{2\alpha}{r} - \frac{2\alpha x^2}{r^3} - \frac{2\mathcal{D}}{r^3} + \frac{6\mathcal{D}x^2}{r^5} + U$$

$$u = \frac{\alpha}{r} + \frac{\mathcal{D}}{r^3} + \Big(\frac{\alpha}{r} - \frac{3\mathcal{D}}{r^3}\Big)\cos^2\varphi + U \quad \Big\| \quad \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\alpha}{r^2} - \frac{3\mathcal{D}}{r^4} - \frac{\alpha x^2}{r^4} + \frac{9\mathcal{D}x^2}{r^6}$$

$$v = \qquad \Big\| \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \Big(-\frac{\alpha}{r^2} + \frac{9\mathcal{D}}{r^4}\Big)\frac{xy}{r^2}$$

$$\big(r\tfrac{\partial}{\partial r}-1\big)u = -\frac{\alpha}{r} - \frac{3\mathcal{D}}{r^3} - \frac{\alpha x^2}{r^3} + \frac{9\mathcal{D}x^2}{r^5} - \frac{\alpha}{r} - \frac{\mathcal{D}}{r^3} - \frac{\alpha x^2}{r^3} + \frac{3\mathcal{D}x^2}{r^5} = -\frac{2\alpha}{r} - \frac{4\mathcal{D}}{r^3} - \frac{2\alpha x^2}{r^3} + \frac{12\mathcal{D}x^2}{r^5} - U \quad \Big|\ x$$

$$\big(r\tfrac{\partial}{\partial r}-1\big)v = \Big(-\frac{\alpha}{r} + \frac{9\mathcal{D}}{r^3}\Big) - \frac{\alpha}{r} + \frac{3\mathcal{D}}{r^3}\Big)\frac{xy}{r^2} = \qquad -\frac{2\alpha xy}{r^3} + \frac{12\mathcal{D}xy}{r^5} \quad \Big|\ y$$

$$\big(r\tfrac{\partial}{\partial r}-1\big)w = \qquad -\frac{2\alpha xz}{r^3} + \frac{12\mathcal{D}xz}{r^5} \quad \Big|\ z$$

$$x(\ )u + y(\ )v + z(\ )w = -\frac{4\alpha x}{r} + \frac{8\mathcal{D}x}{r^3} - Ux$$

$$u = \frac{3}{4} Rc \frac{xy}{r^3} - \frac{3}{4} R^3 c \frac{xy}{r^5}$$

$$v = \frac{1}{4} \frac{Rc}{r} + \frac{1}{4} \frac{R^3 c}{r^3} + \frac{3}{4} Rc \frac{y^2}{r^3} - \frac{3}{4} \frac{R^3 c y^2}{r^5}$$

$$w = \frac{3}{4} Rc \frac{yz}{r^3} - \frac{3}{4} R^3 c \frac{yz}{r^5}$$

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{3}{4} Rc \left\{ \frac{z}{r^3} - \cancel{\frac{3y^2z}{r^5}} + \cancel{\frac{3y^2z}{r^5}} \right\} - \frac{3}{4} R^3 c \left\{ \cancel{\frac{z}{r^5}} - \cancel{\left(\frac{5y^2z}{r^7} \frac{5y^2z}{r^7} \right)} \right\} + \frac{3}{4} \frac{Rc\,z}{r^3} + \frac{3}{4} \cancel{\frac{R^3 c\,z}{r^5}}$$

$$= \frac{3}{2} \frac{Rc\,z}{r^3}$$

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{3}{4} Rc \cancel{\left\{ \frac{3xyz}{r^5} \right\}} - + = 0$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \qquad = -\frac{3}{2} \frac{Rc\,x}{r^3}$$

$$u_{1S} = \overset{-u_p}{\cancel{-B \frac{xy}{\rho^3}}} + D \frac{(x+2a)\,y\,(x+a)}{\rho^5}$$

$$v_{1S} = \cancel{-\frac{1}{4} Rc} - v_p + D \frac{y^2 (x+a)}{\rho^5} - \frac{3}{2} Rc \frac{x+a}{\rho^3} \left[a - \frac{R^2 (x+2a)}{\rho^2} \right]$$

$$w_{1S} = -w_p + D \frac{(x+a)\,yz}{\rho^5}$$

$$\xi = -\frac{3}{2} \frac{Rc\,z}{\rho^3} + B \left\{ \frac{(x+a)\,z}{\rho^5} - \cancel{\frac{5(x+a)y^2 z}{\rho^7}} + \cancel{\frac{5y^2 z (x+a)}{\rho^7}} \right\} + \frac{3}{2} Rc \left\{ -\frac{3(x+a)\,z\,a}{\rho^5} + \frac{5R^2 (x+a)(x+2a)\,z}{\rho^7} \right\}$$

$$\cancel{+ \frac{yz(x+a)}{\rho^5} \frac{\partial D}{\partial y} - \frac{y^2(x+a)}{\rho^5} \frac{\partial D}{\partial z}}$$

$$\cancel{\frac{z}{\rho^3}} \qquad \frac{z}{\rho^2}$$

$$\xi = -\frac{3}{2} \frac{Rc\,z}{\rho^3} + \cancel{\frac{(x+a)\,z}{\rho^5} \frac{3}{2} Rc \left\{ \cancel{2} + 3a - \frac{5(x+2a) R^2}{\rho^2} - 3a + \frac{5R^2 (x+2a)}{\rho^2} \right\}}$$

$$\eta = -B \cancel{\frac{(x+2a)\,y\,(x+a)\,5z}{\rho^5}} + \cancel{5D \frac{(x+a)\,yz\,(x+2a)}{\rho^5}} + y \frac{(x+a)}{\rho^5} \cancel{(x+2a) \frac{2(x+2a)\,z}{\rho^4}} - \cancel{\frac{yz(x+a)}{\rho^5} \frac{(x+2a)^2}{\rho^2}}$$

$$\cancel{\frac{3}{2} Rc\; 5R^2} \qquad + \frac{(x+a)\,yz}{\rho^5} \cdot \frac{3}{2} Rc \frac{5R^2}{\rho^2}$$

$$- \frac{yz}{\rho^5} \frac{3}{2} Rc \left[3a - \frac{5(x+2a) R^2}{\rho^2} \right]$$

$$\eta \qquad = \frac{3}{2} Rc \frac{yz}{\rho^5} \left\{ -3a + \frac{5(x+2a) R^2}{\rho^2} + \frac{5(x+a) R^2}{\rho^2} \right\}$$

$$\zeta = +\frac{3}{2} \frac{Rc(x+2a)}{\rho^3}$$

$$X = \cancel{\frac{3}{4} \frac{R^3 c}{\rho^2} \frac{x}{r^2}} \quad \cancel{\frac{3}{2} R c \ldots} \; \frac{3}{2} Rc^2 \left(\frac{x+2a}{\rho^3} - \frac{x}{r^3} \right) = \cancel{\frac{9}{8} R^2 c^2 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{x+2a}{\rho^3} - \frac{x}{r^3} \right)}$$

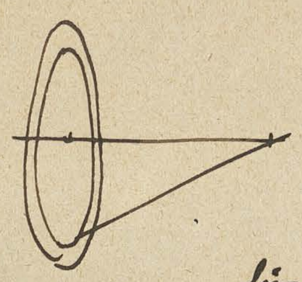
$$\mu \nabla u = \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{3}{2} Rc\mu\, y \left[\frac{x}{r^5} - \frac{(x+2a)}{\rho^5} \right]$$

$$\frac{X}{\mu \nabla u} = \cancel{\frac{3}{2}} \frac{c}{y} \frac{\dfrac{x+2a}{\rho^3} - \dfrac{x}{r^3}}{\dfrac{x+2a}{\rho^5} - \dfrac{x}{r^5}}$$

$$\frac{Rc^2}{r^2} : \frac{Rc\mu}{r^3}$$

$$\rho c : \frac{\mu}{r}$$

$$r = \frac{\mu}{c\rho}$$



$$\int_{r=0}^{R} \frac{2\pi r\,dr}{\sqrt{r^2+x^2}} = 2\pi \sqrt{r^2+x^2}\Big|_0^{r=R} = 2\pi\left(\sqrt{R^2+x^2}-x\right)$$

$$\lim 2\pi\left\{\cancel{\sqrt{R^2+\xi^2}}-\xi-\cancel{\sqrt{R^2+(2a-\xi)^2}}+(2a-\xi)\right\}$$

$$= 4\pi(a-\xi)$$

$$\frac{r^2}{\sqrt{r^2+x^2}}-\int\frac{2r}{\sqrt{r^2+x^2}}\,dr = \frac{r^2}{\sqrt{r^2+x^2}}-2\sqrt{r^2+x^2}$$

$$\sum\frac{y^2}{\rho^3}\int_0^{2\pi}\frac{r^3\,dr\,d\varphi\,\sin^2\varphi}{\sqrt{r^2+x^2}^{\,3}} = \pi\int_0^{R}\frac{r^3\,dr}{\sqrt{r^2+x^2}^{\,3}} = \pi\left[-2x-\frac{R^2}{\sqrt{R^2+x^2}}+2\sqrt{R^2+x^2}\right]$$

$$\sum r^2\left(\frac{1}{\rho_0}-\frac{1}{\rho_1}\right) = \cancel{\pi\left(\frac{1}{\xi}-\frac{1}{2a-\xi}\right)} = 4\pi(a-\xi)$$

$$\sum\frac{x+a}{\rho^3} = \frac{2\pi(a-\xi)}{(2a-\xi)\delta^2}$$

$$\sum(x+a)\frac{y^2}{\rho^5} = \frac{2}{3}\pi\frac{(a-\xi)}{(2a-\xi)}$$

$$\frac{3}{4}Rc\,4\pi(a-\xi)+\frac{3}{4}Rc\pi\,4(a-\xi)-\frac{3}{2}Rca\,\frac{2\pi(a-\xi)}{(2a-\xi)}+\frac{9}{2}Rca\,\frac{2}{3}\frac{\pi(a-\xi)}{(2a-\xi)}$$

$$\cancel{\sum\frac{x}{\rho^3}=\int_0^{\infty}\frac{2\pi r\,dr}{\sqrt{r^2+x^2}^{\,3}} = 2\pi\frac{1}{\sqrt{r^2+x^2}}\Big|_\infty = 2\pi\frac{1}{x}} = \frac{2\pi}{2a-\xi} \qquad v = \frac{6Rc\pi(a-\xi)}{\delta^2}$$

ale to tylko o ile $\frac{\xi}{a}$ małe

μv^2

$$= \cancel{\frac{3}{4}Rc\pi\left[\frac{1}{\xi}-\frac{1}{2a-\xi}+4(a-\xi)\right]}$$

zatem energia rozproszona per cm² sec

$$v_0 = \frac{6Rc\pi a}{\delta^2}$$

$$a\mu\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)^2 = a\mu\left(\frac{6Rc\pi}{\delta^4}\right)^2 = \frac{Fv}{\delta^2} = F.\frac{6Rc\pi a}{\delta^4}$$

v pierwszem przybliżeniu!

$F = \mu\,\underline{6Rc\pi}$ = opór Stokesa niezmieniony!

$= \mu\frac{\delta^2}{a}v_0$ ale opór bez porównania ~~mniejszy~~ większy niż by odpowiadało prędkości v_0

o ile $6\pi R < \frac{\delta^2}{a}$

zamiast $6\pi\mu Rv_0$ jest $\mu\frac{\delta^2}{a}v_0$

$6\pi R : \frac{\delta^2}{a}$

gdzie się to warunek wiąże z przybliżeniem?

v_0 może się zbliżyć do wartości c, tylko o ile R^2 wejdzie w rachunki o ile $R > \frac{\delta^2}{a}$; a tutaj wrócić z wyższemi potęgami, i obliczenie rozpisać.

Tak jak wynika z płynięcia laminarnego i to parabolicznie takie prostsze wzięcie dla R dużego $\neq$ gdy $v_0 = c$

chyba to możliwe tylko jeśli prędkość $\underline{v_0}$ mała w porównaniu z $\underline{c}$ (bo inaczej prawo Stokesa byłoby zmienione)

$$6\pi\frac{Ra}{\delta^2}c < c$$

$$6\pi R < \frac{\delta^2}{a}$$

gdyby się powiększało R^2 to wzrośnie tak jak przewidywano

Wreszcie:

$$F = \mu\,6R\pi(c-v_0)$$

$$= \mu\,6R\pi c\left(1-\frac{6R\pi a}{\delta^2}\right) = \mu\delta^2\frac{v_0}{a}\left(1-\frac{6R\pi a}{\delta^2}\right) = \mu\frac{\delta^2 v_0}{a}-6\pi\mu v_0$$

O ile tylko $\frac{\delta}{x}$ małe można uważać

ale δ musi być tego samego rzędu co a

$$\cancel{f}\sum \frac{1}{\rho^3} = \frac{1}{\delta^2}\int_0^\infty \frac{2\pi\,\xi\,d\xi}{\sqrt{(x+2a)^2+\xi^2}^{\,3}} = \frac{2\pi}{\delta^2(x+2a)}$$

$$\sum \frac{y^2}{\rho^5} = \frac{2\pi}{3\delta^2(x+2a)}$$

więc w każdym razie znikają wtórny dwa ostatnie i pozostają dla tych odległości tylko

$$v = \frac{3}{4}Rc\left[\underbrace{\sum\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho}\right)}_{\frac{2ax}{r^3}} + \underbrace{\sum y^2\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\rho^3}\right)}_{\frac{6axy^2}{r^5}}\right]$$

$$\frac{2ax}{r^3} \to \frac{4a\pi}{\delta^2} \qquad 6.\frac{2}{3}\frac{a\pi}{\delta^2} \qquad \text{stąd} = \frac{6\pi \cancel{\mu} a R}{\delta^2}$$

więc jest to ważne dla $x \gg \delta$

W każdym razie zatem w wielkich odległościach $x \gg \delta$ będzie ważne i o ile $\frac{R}{\delta}$ małe (w innym razie!)

$$v_\infty = \cancel{}\ \frac{6\pi Rca}{\delta^2}$$

z drugiej strony w każdym razie dla dostatecznie małych R, to znaczy o ile $v_0 < c$, mamy tyle przybliżenie

$$F = 6\pi\mu Rc \qquad \text{bez względu na stosunek } a : \delta$$

zatem mamy $F = \mu\,\delta^2 \frac{v_\infty}{a}$ tak jak gdyby ciecz płynęła laminarnie

ten sam wzór także ważny być musi dla $2R = \delta$ (jeśli $\frac{R}{a}$ ~~[illegible]~~ małe)

inaczej przybliżony $\frac{v_\infty}{a-Rc}$

więc pod tym samem założeniem (że $v_0 < c$) można

v_∞ obliczać względnie z siły F według kombinowanej z prób względnie zgodnie z Helmholtzem

W razie gdy $\delta = 2R$ $\quad \frac{R}{a}$ małe

$$F = \mu\frac{\delta^2 c}{a} = \frac{4\mu R^2 c}{a} \quad \text{zamiast normalnego oporu } 6\pi\mu Rc$$

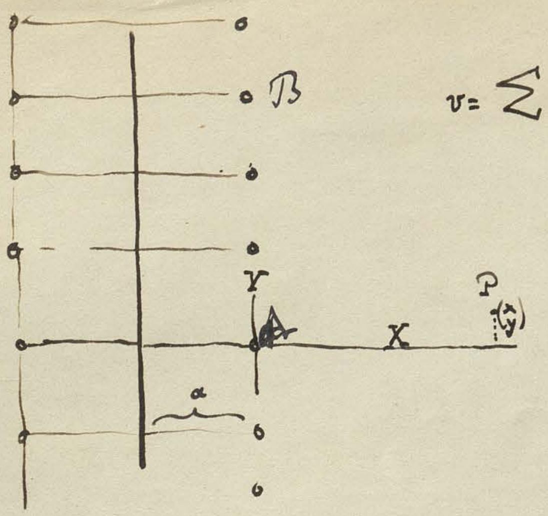
zmniejszony opór w stosunku $\frac{2R}{3\pi a}$

$$F = 6\pi\mu R(c - v_0) \qquad v_\infty = \frac{6\pi Rca}{\delta^2}$$

$$\frac{F}{v_\infty} = \frac{(c-v_0)\mu\,\delta^2}{ca}$$

$$F = \mu\frac{\delta^2 v_\infty}{a}\left(1 - \frac{v_0}{c}\right)$$

$$\frac{R^2}{l} : 6\pi a$$



82

$$v=\sum \tfrac{3}{4} Rc\left(1-\frac{R^2}{r_n^2}\right)\frac{(y-y_n)^2}{r_n^3}+\frac{1}{4}Rc\left(\frac{3}{r_n}+\frac{R^2}{r_n^3}\right)$$
$$-\frac{3}{4}Rc\left(1-\frac{R^2}{\rho_n^2}\right)\frac{(y-y_n)^2}{\rho_n^3}-\frac{1}{4}Rc\left(\frac{3}{\rho_n}+\frac{R^2}{\rho_n^3}\right)$$
$$-\frac{3}{2}Rc\left[a-\frac{(x+2a)R^2}{\rho_n^2}\right]\frac{(x+a)}{\rho_n^3}+\frac{3}{2}Rc\left[3a-\frac{5(x+2a)R^2}{\rho_n^2}\right]\frac{(y-y_n)^2(x+a)}{\rho_n^5}$$

$F=\mu u R\,fc.(R, a, \delta)$

$=\mu u R\,fc.\left(\frac{R}{a}, \frac{R}{\delta}\right)$ dla $\lim\frac{R}{\delta}=0$ $F=\mu u R.6\pi\left[1+\frac{9}{16}\frac{R}{a}\right]$

$\lim V_\infty=0$

---

dla $\lim\frac{R}{\delta}=\frac{1}{2}$, $\lim\frac{R}{a}=0$ $\Big\}$ $\lim V_\infty=u$, $\lim F=\mu\frac{\delta^2}{a}u$ $=\mu u R\cdot\frac{R}{a}\cdot\left(\frac{\delta}{R}\right)^2$

$\frac{1}{\delta^2}F=\mu\frac{u}{a}$

$6\pi\mu u R\left[\ldots\right]$

$$F=\left[1-\frac{1}{1+\left(\frac{\delta}{R}\right)^2\frac{R}{a}}\right]6\pi\mu u R$$
$$=\frac{\frac{\delta^2}{aR}}{1+\frac{\delta^2}{aR}}6\pi\mu u R$$
$$=6\pi\mu u\frac{\delta^2 R}{aR+\delta^2}$$

$k=\frac{9R}{16.a}$

$v=\left[v_0+v_{1s}\right]\left[1+k+k^2+(k^3-\lambda^3)+\ldots\right]$

Jaka siła wskutek ruchu kuli będzie wywierana na B?

w pierwszem przybliżeniu $Y_{AB}=6\pi\mu R v_B$

$$v_B=\frac{3}{4}Rc\,y_B^2\left[\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\rho^3}\right)-R^2\cancel{\left(\frac{1}{r^5}-\frac{1}{\rho^5}\right)}\right]+\frac{1}{4}Rc\left[3\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho}\right)+\cancel{R^2\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\rho^3}\right)}\right]$$
$$-\frac{3}{2}Rc\left[a-\cancel{\frac{2a}{\rho^2}R^2}\right]\frac{a}{\rho^3}+\frac{3}{2}Rc\left[3a-\cancel{\frac{10a}{\rho^2}R^2}\right]\frac{y_B^2\,a}{\rho^5}$$

dając $Y_s=0$

$V=V_0+v_{1S}+\sum v_B$

$Y=Y_0+\sum Y_{vB}$

$$-\left(\frac{1}{r^n}-\frac{1}{\rho^n}\right)=2a\frac{\partial\left(\frac{1}{r^n}\right)}{\partial x}+\frac{4a^2}{2}\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r^n}\right)}{\partial x^2}+\frac{8a^3}{2.3}\frac{\partial^3}{\partial x^3}$$
$$=-\frac{2anx}{r^{n+2}}+2a^2n\left(-\frac{1}{r^{n+2}}+\frac{(n+2)x^2}{r^{n+4}}\right)+8a^3\ldots\frac{x}{r^{n+4}}\quad\frac{1}{r^{n+6}}$$

tylko warunki, ile r^{2a}

$$\left(\frac{1}{r^n}-\frac{1}{\rho^n}\right)\Big|_{x=0}=\frac{2a^2n}{r^{n+2}}\qquad \frac{1}{r}-\frac{1}{\rho}=\frac{2a^2}{r^3}+\left(\frac{a^6}{r^7}\right)\quad\Big\|\quad\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\rho^3}=\frac{6a^2}{r^5}\qquad\frac{1}{r^5}-\frac{1}{\rho^5}=\frac{10a^2}{r^7}$$

$$Y=6\pi\mu Rc\left[1+\frac{9R}{16a}\right]-6\pi\mu R^2c\left\{\cancel{\frac{3}{4}2a^2\sum\frac{1}{r^3}}+\frac{3}{4}\cdot 6a^2\sum\frac{y^2}{r^5}-\frac{3}{2}a^2\sum\left(\frac{1}{r^3}-\frac{6a^2}{r^5}\right)+\frac{3}{2}3a^2\sum\left(\frac{y^2}{r^5}-\frac{10a^2y^2}{r^7}\right)\right\}$$
$$=6\pi\mu Rc\left\{1+\frac{9R}{16a}-R\left[9a^2\sum\frac{y^2}{r^5}+9a^4\sum\frac{1}{r^5}-45a^4\sum\frac{y^2}{r^7}\right]\right\}$$
$$=6\pi\mu Rc\left\{1+\frac{9R}{16a}-9R\left[\frac{a^2.4{\cdot}4}{\delta^3}+\underbrace{\frac{a^4.2{\cdot}9}{\delta^5}-\frac{5a^4.2{\cdot}3}{\delta^5}}\right]\right.$$
$$=6\pi\mu Rc\left\{1+9\frac{R}{a}\left[\frac{1}{16}-4{\cdot}4\left(\frac{a}{\delta}\right)^3+8{\cdot}6\left(\frac{a}{\delta}\right)^5\right]\right\}-\frac{8{\cdot}6.\,a^4}{\delta^5}$$

$11{\cdot}5$
$2{\cdot}9$
$8{\cdot}6$

Zmniejszenie oporu się uwydatni gdy $\left(\frac{a}{\delta}\right)^3>\frac{1}{70}$

$\frac{a}{\delta}>\frac{1}{4}$

Pod z ścianiem $R \ll \delta$ $R < a$ ~~stosunek $\delta : a$ dowolny~~

$a \gg \delta$ zatem $\delta > a$

będzie w każdym razie przybliżenie ważny wzór

$$F = 6\pi\mu R c \left(1 + \frac{9}{16}\frac{R}{a}\right)$$

$$v = v_0(1+k) + v_{13}(1+k) = (v_0 + v_{13})(1+k)$$

zatem $$v_\infty = \frac{6\pi R c a}{\delta^2}\left(1 + \frac{9}{16}\frac{R}{a}\right)$$

więc ściśle powstaje:

$$F = \mu \delta^2 \frac{v_\infty}{a}$$

$$u = \frac{3}{4}\frac{a}{r}\left(1+\frac{x^2}{r^2}\right)$$

$$v = \frac{3}{4}\,a\,\frac{xy}{r^3}$$

$$w =$$

nieskończenie ~~...~~ stronie

$$\frac{9}{16}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(1+\frac{2x^2}{r^2}+\frac{x^4}{r^4}\right)+\left(\frac{3}{4}\frac{axy}{r^3}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{axz}{r^3}\right)^2$$

$$= \frac{9}{16}\frac{a^2}{r^2}\left(1+\frac{3x^2}{r^2}\right)$$

$$X = 6\pi a\mu\left[1+\frac{9}{16}\frac{a^2}{r^2}\left(1+\frac{3x^2}{r^2}\right)\right]$$

$$Y = 6\pi a\mu$$

$$\frac{9}{16}\frac{a}{r^4}\,xy\left(1+\frac{x^2}{r^2}\right)+\frac{9}{16}\,a^2\,\frac{x^2 y}{r^6}$$

$$+\frac{9}{16}\,a\,\frac{xy}{r^3}\left(1+\frac{x^2}{r^2}\right)$$

$$= \frac{2\cdot 9}{16}\,a\,\frac{xy}{r^3} = \frac{27}{16}\,a\,\frac{xy}{r^3}$$

więc wpływ jednostronny ...

poprawki we wzorze $6\pi\mu a$ aż do wyr.

$$6\pi\mu a\left[1+\cdots\left(\frac{R}{\delta}\right)^{-}\right]$$

da się przedstawić przez superpozycję ~~...~~ rozkładów Stokesowskich, z odpowiednimi natężeniami

w kierunku xyz

statyczne n. p.

$$\lim_{r=\infty} u_2 = \frac{9\,ab}{16\,R\,r}\left(1+\frac{x^2}{R^2}\right)$$

$$\lim v_2 = \frac{9}{16}\,\frac{ab\,xy}{R^3 r}$$

więc takie jakgdyby w punkcie b była przedtem $u = \frac{3}{4}\frac{a}{R}\left(1+\frac{x^2}{r^2}\right)$

$v = \frac{3}{4}\frac{a}{R}\frac{xy}{r^2}$ itd.

Zatem także odbicie od ściany w ten sam sposób przez addytywną superpozycję

przyczem składowe prostopadłe muszą zniknąć zatem powstaną prądy niezależne $v = c(1+k)(\Sigma v_0 + \Sigma v_{1,3})$

i powstanie także

$$F = \mu\,\delta^2\frac{v_0}{a}$$

Zdaje się stosuje ~~...~~ Strömungsstrom

powstanie przy ścianie spadek liniowy prędkości i wielkość przewodzącej kuli będzie się przesuwać

z prędkością: $a\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_R = 4u\,\frac{a}{R}$

i prąd będzie $k\frac{(v_1 - v_0)}{a}\cdot 4 \ldots$

uwzględniając że wszystko będzie w zgodności z teorią

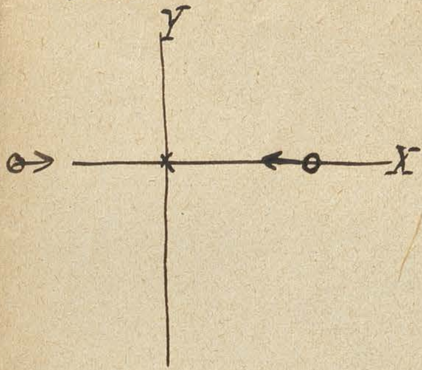
Helmholtza jeśli $\delta > a$

o ile $\frac{R}{\ldots} \lesssim \ldots$ tylko że amplituda

prędkości c będzie inna niż v_0

w warunku wiedząc że $v_0 \ll c$?

Ruch normalnie do ściany



$$u_0 = -\frac{3}{4} Rc\left[\frac{1}{r} + \frac{(x-a)^2}{r^3}\right]$$

$$u_{15} = \frac{3}{4} Rc\left[\frac{1}{\rho} + \frac{a^2+x^2}{\rho^3} + \frac{6ax(x+a)^2}{\rho^5}\right]$$

$$v_{15} = \frac{3}{4} Rc\left[\frac{(x-a)y}{\rho^3} + \frac{6axy(x+a)}{\rho^5}\right]$$

$$\Sigma\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho}\right) = \sum_{x=x}^{\infty} \frac{4\pi(h-x)x}{\delta^3}$$

$$\cancel{(x^2+\xi^2)(x+\xi)^2 + 6x\xi(x+\xi)^2}$$

$$\int_{\xi=0}^{h} \frac{(x-\xi)^2}{r^3}\, d\xi\, dy\, dz - \int_{\xi=0}^{h}\left[\frac{x^2+\xi^2}{\rho^3} + \frac{6x\xi(x+\xi)^2}{\rho^5}\right] d\xi\, dy\, dz = \int_{\xi=0}^{x} + \int_{x}^{h}$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2+y^2+z^2}$$

$$\rho = \sqrt{(x+\xi)^2+y^2+z^2}$$

$0 < \xi < x$

$$\cancel{\int\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho}\right) dy\, d\xi = 0}$$

$$\cancel{= \frac{4\pi x}{\delta^2}}$$

$$\int \frac{1}{r}\, dy\, dz = 2\pi\left[\sqrt{R^2+y^2+z^2}-(x-\xi)\right]$$

$$\int \frac{x-\xi}{r^3}\, dy\, dz = 2\pi\left(\cancel{\quad} + 1\right)$$

$$\int \frac{dy\, dz}{r^3} = \frac{2\pi}{x-\xi}$$

$$\int \frac{(x-\xi)^2}{r^3}\, d\xi\, dy\, dz = 2\pi\int_0^x (x-\xi)\, d\xi + 2\pi\int_x^h (\xi-x)\, d\xi$$

$$= \frac{2\pi}{\delta^3}\left\{x^2 - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{h^2}{2} - \cancel{\frac{x^2}{2}} - hx + \cancel{x^2}\right\}$$

$$-2\pi\int_0^h (\xi+x)\, dx$$

$$= -2\pi\left(\xi h + \frac{h^2}{2}\right)$$

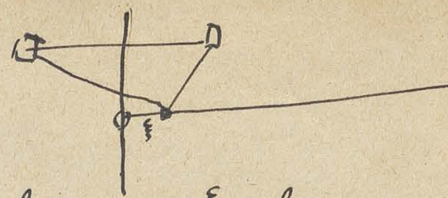
$$2\pi\int_0^{\xi} (\xi-x)\, dx + 2\pi\int_{\xi}^{h} (x-\xi)\, dx$$

$$\xi x - \frac{x^2}{2} \qquad \frac{x^2}{2} - \xi x$$

$$2\pi\,\frac{\xi^2}{2} + 2\pi\left(\frac{h^2}{2} - h\xi - \frac{\xi^2}{2} + \xi^2\right)$$

$$2\pi\left[-2\xi h + \xi^2\right]$$

linge ~~$r=\sqrt{\ldots}$~~ $r=$



~~$u_0 = -\frac{3}{4} R_0 \left[\frac{1}{r} + \frac{x^2}{r^3}\right]$~~

~~$u_{15} = \frac{3}{4} R_c \left[\frac{1}{\rho} + \frac{x^2 + 2ax + 2a^2}{\rho^3} + \frac{6a(a+x)(x+2a)^2}{\rho^5}\right]$~~

$$u_0 = -\frac{3}{4} R_c \left[\frac{1}{r} + \frac{(x-\xi)^2}{r^3}\right] \quad \Big\| \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\int_0^h dx\,dy\,dz = \int_0^\xi + \int_\xi^h$$

$$u_{15} = \frac{3}{4} R_c \left[\frac{1}{\rho} + \frac{x^2+\xi^2}{\rho^3} + \frac{6\xi x (x+\xi)^2}{\rho^5}\right] \quad \Big\| \quad \rho = \sqrt{(x+\xi)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\int \frac{1}{r}\, dx\,dy\,dz = 2\pi\, dx \left(\sqrt{(x-\xi)^2 + \zeta^2} - (\xi - x)\right)$$

$$x<\xi \qquad \int \frac{1}{\rho}\, dx \ldots = 2\pi\, dx \left(\sqrt{(x+\xi)^2 + \zeta^2} - (\xi + x)\right)$$

$$\Big\} \quad 2\pi\, dx \left[\cancel{\xi - x} - (\xi + x)\right] = -4\pi x\, dx$$

$$\int_0^\xi \ldots = -2\pi \xi^2$$

$$x>\xi \qquad \int \ldots = 2\pi\, dx \left[\sqrt{(x-\xi)^2 + \zeta^2} - (x-\xi)\right]$$

$$= 2\pi\, dx \left[\ldots - (x+\xi)\right]$$

$$\Big\} \quad 2\pi\, dx \left[-(x+\xi) + (x-\xi)\right] = -4\pi \xi\, dx$$

$$\int_\xi^h \ldots = 4\pi \xi^2 - 4\pi \xi h$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \qquad x<\xi \qquad + \int \frac{(x-\xi)}{r^3}\, dy\,dz = 2\pi\, dx \left[\frac{-(x-\xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \zeta^2}} - 1\right]$$

$$x>\xi \qquad + \int \frac{x-\xi}{r^3}\, dy\,dz = 2\pi\, dx \left[\frac{-(x-\xi)}{\sqrt{\ldots}} + 1\right]$$

$$\int_0^\xi \frac{(x-\xi)^2}{r^3}\, dx\,dy\,dz = 2\pi \cancel{\int \frac{(x-\xi)^2}{\sqrt{\ldots + \zeta^2}}\, dx} \; \int_0^\xi (x-\xi)\, dx$$

$$-\int \frac{(x-\xi)^2}{r^3}\, dx \ldots = +2\pi \left(\frac{\xi^2}{2} - \xi^2\right) = -\pi \xi^2$$

$$\Big\| \quad + \int_\xi^h \ldots = 2\pi \int_\xi (x-\xi)\, dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{h^2 - \xi^2}{2} - \xi h + \xi^2\right]$$

$$-\int_\xi^h \frac{(x-\xi)^2}{r^3} \qquad = -\pi \left[h^2 - 2\xi h + \xi^2\right]$$

$$-\int \frac{x+\xi}{\rho^3}\, dy\,dz = 2\pi \left[\cancel{\frac{x+\xi}{\sqrt{\ldots}}} - 1\right] \qquad \frac{2\xi^2 - \xi(x+\xi)}{x+\xi}$$

$$-\int \frac{x^2+\xi^2}{\rho^3}\, dx\,dy\,dz = -2\pi \int_0^h \frac{x^2+\xi^2}{x+\xi}\, dx = -2\pi \int \left(x + \frac{\xi^2 - x\xi}{x+\xi}\right) dx = -2\pi \left[\frac{x^2}{2} - \xi x + 2\xi^2 \lg(x+\xi)\right]\Big|_0^h$$

$$\int \frac{x^2+\xi^2}{\rho^3}\, dx\,dy\,dz \qquad = +2\pi \left[\frac{h^2}{2} - h\xi + 2\xi^2 \lg\frac{(h+\xi)}{\xi}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} - \int \frac{dy\,dz}{\rho^3} = \frac{-2\pi}{x+\xi}$$

$$+ \int + \frac{3(x+\xi)}{\rho^5}\, dy\,dz = \frac{2\pi}{(x+\xi)^2}$$

$$+ \int \frac{6x\xi(x+\xi)^2}{\rho^5}\, dx\,dy\,dz = +4\pi \int \frac{x\xi}{x+\xi}\, dx = +4\pi \int \xi \left(1 - \frac{\xi}{x+\xi}\right) dx$$

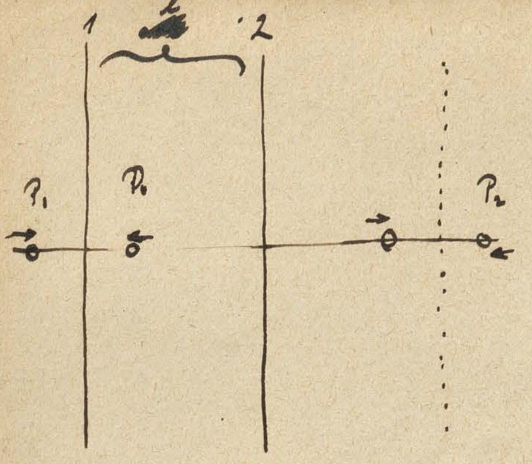
$$= +4\pi \left[\xi x - \xi^2 \lg(x+\xi)\right]\Big|_0^h$$

$$= +4\pi \left[\xi h - \xi^2 \lg\frac{(\xi+h)}{h}\right]$$

$$-2\pi\xi^2 + 4\pi\xi^2 - 4\pi\xi h - \pi\xi^2 - \pi\left[h^2 - 2\xi h + \xi^2\right] + \pi h^2 - 2h\xi\pi \; \cancel{\ldots} \; + 4\pi\xi h$$

$$= \cancel{\ldots} - \cancel{\ldots}$$

$$0$$



u_{1S} wird gespiegelt durch 2

Wert von u_{1S} im Punkt P_2:

$$\frac{3}{4} Rc\left[\frac{1}{2(l+a)} + \frac{a^2+(2l+a)^2 + 6a(2l+a)}{(2(l+a))^3}\right]$$

$$= \frac{3}{4} Rc\left[\frac{4l^2+8al+4a^2+a^2+4l^2+4al+a^2+12al+6a^2}{8(l+a)^3}\right]$$

$$\frac{12a^2+24al+8l^2}{8(l+a)^3}$$

$$= \frac{3}{4} Rc\left[\frac{3a^2+6al+2l^2}{2(a+l)^3}\right]$$ więc taka sama jak prędkość w punkcie P_2 wytwarzana kula poruszająca się z prędkością: $\frac{3a^2+6al+2l^2}{4(a+l)^2} c$

$$= \frac{3}{4} Rc\left[\frac{3}{2}\frac{1}{a+l} - \frac{l^2}{2(a+l)^3}\right]$$

$$= \frac{\cancel{\;}}{2l}$$

gespiegelt $u_{2S} = -u_{1S}$

więc prędkość wynikająca z tego w punkcie P_0 przez odbicie w 2:

$$u_{(2S)_0} = \frac{3}{4} Rc'\left[\frac{1}{2l} + \frac{(l-a)^2+(l+a)^2+6(l-a)(l+a)}{8l^3}\right]$$

$$\frac{2(l^2+a^2)+6(l^2-a^2)}{8l^3} = \frac{1}{l} - \frac{a^2}{2l^3}$$

$$= \frac{3}{4} Rc'\left[\frac{3}{2l} - \frac{a^2}{2l^3}\right]$$

w kierunku przeciwnym

$$u_{(2S)_0} = -\frac{3}{4} Rc \cdot \frac{3l^2-a^2}{2l^3} \cdot \frac{2l^2+6al+3a^2}{4(a+l)^2}.$$

$$\begin{aligned} &2(a^2+2ab+b^2)\\ &+6a^2+6ab\\ &+3a^2\\ \hline &11a^2+10ab+2b^2 \end{aligned}$$

~~Wert von u_{1S} im Punkt P_2~~

$$u_{1S} = \frac{3}{4} Rc\left[\frac{1}{\rho} + \frac{a^2+x^2}{\rho^3} + \frac{6ax(a+x)^2}{\rho^5}\right]$$

$$u_{2S} = u_{1S} + 2(l-a)\frac{\partial u_{1S}}{\partial x} + \frac{(l-a)^2}{\;}\frac{\partial u_{1S}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u_{1S}}{\partial x} = \frac{3}{4} Rc\left[-\frac{1}{l^2} + \frac{2x}{l^3} - \frac{3(a^2+x^2)x}{l^5} + \frac{6a(a+x)^2}{l^5} + \frac{120x(a+x)}{l^5} - \frac{30\,ax^2(a+x)^2}{l^7}\right]$$

$$-\frac{1}{l^2} + \frac{2x}{l^3} + \frac{6a^3+21a^2x+24ax^2-3x^3}{l^5}$$

$$= -\frac{3}{4} Rc\left[\frac{1}{2l} + \frac{a^2+(l-a)^2+6a(l-a)}{l^3}\right]$$

$$+2(l-a)\left[\cancel{-\frac{1}{l^2} - \frac{l-a}{l^3}} + \frac{3(l-a)(a^2+(l-a)^2)}{l^5} + \frac{6a}{l^3} - \frac{12a(l-a)}{l^4} + \frac{30a(l-a)^2}{l^5}\right]$$

$\rho = 2(l+a)$ $x = a$ $\xi = 2l+a$

$$u_{(3S)_0} = \frac{3}{4} Rc'\left[\frac{1}{2(l+a)} + \frac{a^2+(2l+a)^2 + 6a(2l+a)}{8(l+a)^3}\right]$$

$$\frac{4a^2+8al+4l^2+2a^2+4al+4l^2+12al+6a^2}{8(a+l)^3} = \frac{12a^2+24al+8l^2}{8(a+l)^3}$$

$$(u_{2S}+u_{3S})_0 = -\frac{3}{4} Rc\,\frac{2l^2+6al+3a^2}{4(a+l)^2}\left[\frac{3l^2-a^2}{2l^3} - \frac{2l^2+3al+3a^2}{2(a+l)^3}\right]$$

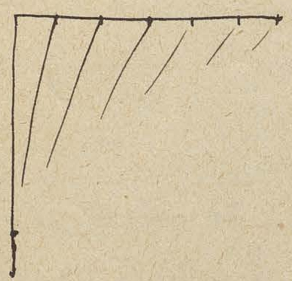
$$(a^3+3a^2l+3al^2+l^3)(3l^2-a^2) = \cancel{3a^3l^2} + \cancel{9a^2l^3} + \cancel{9al^4} + 3l^5$$
$$-a^5 - 3a^4l - \cancel{3a^3l^2} - \cancel{a^2l^3} - \cancel{2l^5} - 3al^4 - 3a^2l^3$$

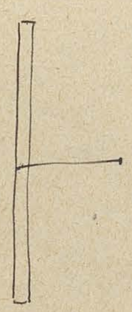
$$= \frac{l^5 + 6al^4 + 5a^2l^3 - 3a^4l - a^5}{2l^3(a+l)^3}$$

$$\Sigma \frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}} = \frac{1}{R}\left[\left(\frac{a}{R}\right)^2+\left(\frac{y}{R}\right)^2\right]^{-1/2} = \frac{1}{R}\left[1+\frac{a^2}{R^2}+\left(\frac{y^2}{R^2}-1\right)\right]^{-1/2} = \frac{1}{R\sqrt{1+\frac{a^2}{R^2}}}\left[1+\frac{R^2-y^2}{R^2+a^2}\right]^{-1/2}$$

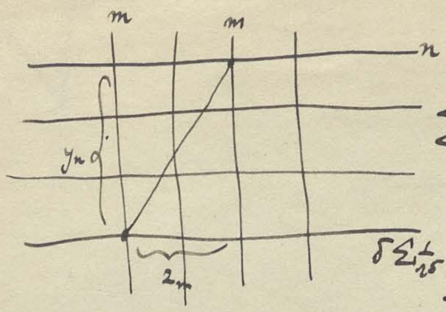
$$\cancel{\frac{1}{a}\left[1+\left(\frac{y}{a}\right)^2\right]^{-1/2} + y\left[1+\left(\frac{a}{y}\right)^2\right]^{-1/2}} \qquad = \frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{2}}\left[1+\frac{y^2-a^2}{2a^2}\right]^{-1/2} = \frac{1}{a\sqrt{2}}\left[1-\frac{a^2-y^2}{2a^2}\right]^{-1/2}$$





$u = 2,$



$$\sum y_n^2 \sum \frac{1}{r_m^5}$$

$$\delta \sum \frac{1}{r^5} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{y^2+z^2}^5} = \int \frac{y\, d\varphi \cos^5\varphi}{\cos^2\varphi} = y^{-4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{1}{y^4}\int (\cos\varphi - \sin^2\varphi\cos\varphi)\, d\varphi$$

$$\underbrace{+\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}}_{\frac{4}{3}}$$

$\cancel{y^2+z^2=r^2}$ $\quad dz = \frac{y}{\cos^2\varphi} d\varphi$

$\cancel{z = r\sin\varphi}$

$z = y\, \mathrm{tg}\, \varphi$

$$\sum \frac{y^2}{r^5} = \frac{4}{3\delta} \sum \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\delta^3}\frac{4}{3}\left[\cancel{2} + 2\left\{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots\right\}\right]$$

1
0.25
0.111
0.067
0.040
0.032
0.020
0.125
1.65

$\frac{4.4.3}{3} = \frac{17.2}{2} = 8.6$

$$\sum \frac{y^2}{r^5} = \frac{4.4}{\delta^3}$$

$$\sum \frac{1}{r^5} = \frac{4}{3\delta} \sum \frac{1}{y^4} = \frac{4}{3\delta}\left[2\left\{1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \frac{1}{625} + \underbrace{\frac{1}{3 \cdot 5^3}}_{=\frac{1}{225}}\right\}\right]$$

1
0.067
0.012
0.004
0.002
0.004
1.09

$\frac{2.18 \cdot 4}{3} = 8.72$

$$\sum \frac{1}{r^5} = \frac{2.9}{\delta^5}$$

$$\int \cos\varphi (1 - \sin^2)^2 = \int \cos\varphi - 2\sin^2\varphi\cos\varphi + \sin^4\varphi\cos\varphi$$

$$2\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{16}{15}$$

$$\sum \frac{y^2}{r^7} = \frac{1}{\delta}\frac{1}{y^6}\int \cos^5\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{16}{15\delta^5} \cdot 2 \cdot 1.09 = 2 \cdot \underbrace{1.09 \cdot 1.07}_{1.17}$$

$$= 2.3$$

$$\sum \frac{y^2}{r^7} = \frac{2.3}{\delta^5}$$

$$-\tfrac{1}{2} \qquad \frac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} \qquad \frac{-\frac{5}{2}}{3} \qquad -\frac{\frac{7}{2}}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{4a^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{r}\left[1 - \left(1 + \frac{4a^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{2}\frac{4a^2}{r^2} - \frac{3}{8}\left(\frac{4a^2}{r^2}\right)^2 + \frac{5}{16}\left(\frac{4a^2}{r^2}\right)^3 - \frac{35}{128}\left(\frac{4a^2}{r^2}\right)^4 - \dots\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{2a^2}{r^2} - \frac{6a^4}{r^4} + 20\frac{a^6}{r^6} - \quad \right]$$

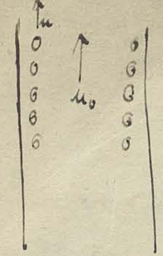
$$\mathrm{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} - 1$$

$$\mathrm{tg}^2\varphi + 1 = \frac{1}{\cos^2\varphi}$$

$$1 + \cos^2\varphi = 1 + \frac{1+\cos 2\varphi}{2} = \frac{3+\cos 2\varphi}{2}$$

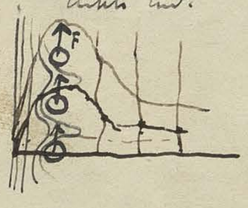
$$= 1 + \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\varphi} = \frac{2+\mathrm{tg}^2\varphi}{1+\mathrm{tg}^2\varphi} =$$

16. $\frac{1}{12}$ 16



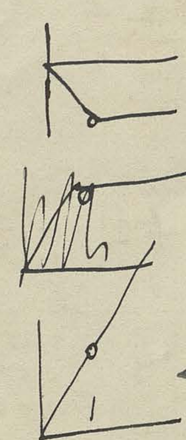
Elektr. Endosm.: $u_0 = \varepsilon u$ $u \sim \rho \frac{\partial V}{\partial x} \frac{1}{\mu} = \frac{J\sigma}{\mu}$

Strömungsstrom: $J = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2}$ $\rho \frac{\partial V}{\partial x} =$



" Superpozycja metod

$u = \alpha \frac{\Delta p}{\Delta l}$;



prędkość cieczy [illegible] że siła [illegible] elektr. pola równa się [illegible]

Zwykła metoda Strömungsstrom: obserwacja potencjału wystarczającego do utrzymania ruchu warstwy

stąd zatem

$$u = \alpha \frac{\Delta p}{\Delta l} = \frac{1}{\mu} \rho \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\alpha \mu}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta l}$$

Zdaje mi się, że ile ε równe ≤ 1 to nie były zgodności $\omega(\varphi_1 - \varphi_2)$

$$u = \alpha \, \cancel{[illegible]} (R^2 - r^2)$$

$$\frac{\alpha \left(R^2 \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4}\right) 2\pi}{R^2 \pi} = \bar{u}$$

$$\alpha = \frac{2\bar{u}}{R^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_R = -2\alpha R$$

XVIII

przepływu cieczy

84/53 I A 28 1910 r.

Notatki do

Van der Waals'

Zustandsgleichung

Durège Theorie d. ellipt. Functionen 1887	6.50
— Elemente d. Functionentheorie 1893	6.80
— Die ebenen Curven dritter Ord. 1871	7.20
Dziwiński Wykłady matematyki tom 1. 1902.	30.–
Encyklopädie der mathem. Wissenschaften (Burckhardt-Meyer)	107.30
Enneper Elliptische Functionen 1890	22.–
Escherich Einleitung in d. anal. Geom. des Raumes 1881.	6.–
Fiedler Darstellende Geom. 3 Th. 1888.	35.–
Folkierski Rachunek różniczkowy i całkowy	
Fort & Schlömilch Lehrb. d. analyt. Geometrie 2 Th 1898	10.–
Forsyth Lehrbuch der Differentialglgen 1889	14.–
Theorie d. Differentialglgen I Th. 1893.	12.–
Fricke R. Vorl. über versch. Gebiete d. höheren Math. 1900	12.–
Geiser Theorie d. Kegelschnitte 1867.	6.–
Gordan Invariantentheorie 1887.	18.–
Goursat Vorl. über Integration d. partiellen Differentialglgen I. Ord. 1893.	7.50
Graefe Vorl. über d. Th. der Quaternionen 1883.	3.60
Grassmann Gesammelte Werke 1902. 2 Bd.	58.–
Gretschel Lehrbuch zur Einf. in d. organische Geometrie 1868.	7.–
Hankel Th. der complexen Zahlensysteme 1867.	2.–
Heine Handbuch d. Kugelfunctionen 1881	12.–

Bemerkung über den ~~mittleren~~ gegenseitigen ~~kürz~~ Abstand von Gasmolekülen und über Van der Waals' Zustandsgleichung.

~~In der Abh.~~

Im 67 Bande dieser Annalen hat Herr P. Hertz eine Abhandlung veröffentlicht, in welcher er unter Anderen die Meinung ausspricht, dass sich bisher alle Theoretiker in der Gastheorie einer den tatsächlichen Verhältnissen nicht entsprechenden vereinfachten Überlegungsweise bedient hätten, ~~welche darin besteht, dass man sich~~ indem sie die Gasmoleküle als gleichförmig verteilt annehmen, ~~so dass die auf ein bestimmtes Volum entfallende Zahl dieser~~ und als deren gegenseitigen Abstand den Wert $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ~~annehmen~~ ansehen (wo n die auf die Volumeinheit durchschnittlich entfallende Zahl bedeutet) gleichsam als ob die Moleküle in einem cubischen Raumgitter angeordnet wären.

Diesbezüglich möchte ich nun ~~auf zwei Arbeiten hinweisen, in welchen ich vor~~ bemerken dass ich in zwei Arbeiten*) vor einigen Jahren Formeln für die ~~Wahrscheinlichkeit des Vorkommens von~~ gemäss den Wahrscheinlichkeitsgesetzen sich notwendigerweise ~~einstellenden~~ Ungleichförmigkeiten der Dichteverteilung, sowohl für ideale Gase als auch für Gase mit allgemeiner Zustandsgleichung, abgeleitet habe ~~und~~ dann auch auf Erscheinungen hingewiesen ~~zu deuten sind~~, habe, welche ~~[illegible]~~ als experimentell ~~deutlich~~ wahrnehmbare Consequenzen dieser Ungleichförmigkeit ~~deuten las~~ gedeutet werden müssen.

Hier möchte ich nur zeigen, dass die von Hertz (und allgemeiner in strengerer Weise) abgeleitete Wahrscheinlichkeitsformel, falls man sich auf den dreidimensionalen Raum beschränkt, gleichbedeutend ist ~~mit~~ mit einer von mir angegebenen Formel ~~[illegible]~~ und möchte daran

Bekanntlich ist die ~~haben~~ ~~seitens~~ Boltzmann, H. Lorentz, Jäger, Van Laar ~~die~~ ursprüngliche ~~gehabte~~ angenäherte Berechnungsweise v. d. Waals durch exactere Methoden ersetzt, worden ~~und~~ ~~haben~~ welche als ~~die~~ theoretische, den Voraussetzungen der v. d. Waals'schen Theorie entsprechende Zustandsgleichung die Formel geliefert haben:

$$p + \frac{a}{v^2} = \frac{RT}{v}\left[1 + \frac{b}{v} + \frac{5}{8}\frac{b^2}{v^2} + \left(\frac{1283}{8960} + \frac{3}{2}\,0{\cdot}0958\right)\frac{b^3}{v^3} + \cdots\right]$$

*) Zittingsverslag der Kon. Akad. v. Wet. Amst. 1898/99 p. 477 Beibl. 23 (1899) p. 547

Dabei rührt das ~~erste~~ quadratische Glied der nach Potenzen von $\frac{b}{v}$ fortschreitenden Reihe von der Berücksichtigung der Zusammenstösse zweier Moleküle, das cubische von dreifachen Zusammenstössen dreier Moleküle.

Dabei setzen aber jene Methoden voraus, dass die Anzahl von Molekülpaaren, deren Centraldistanz zwischen σ und $\sigma + \delta$ liegt, $2\pi n^2 r^2 dr$ beträgt (Gleichung 149 Boltzmann II p. 146)

Sie ist offenbar ~~kleiner~~ grösser als die Wahrscheinlichkeit, dass nur ein Punkt zwischen r_1 und r_2 hineinfällt aber gar keiner innerhalb r_1, diese erhält man als Produkt von welche gleich ist

$$W'_{(r_1, r_2)} = e^{-nk_1} \cdot n(k_2 - k_1)\, e^{-n(k_2-k_1)} = n(k_2-k_1)\, e^{-nk_2}$$

(3) (2)

~~Geht~~ Indem man ~~jedoch~~ zur Grenze für $r_2 = r_1 + dr$ übergeht, so erhält man aus beiden Ausdrücken denselben (auch von Hertz abgeleiteten) Wert

$$w(r)\, dr = e^{-nk}\, n \frac{dk}{dr} dr = 4\pi r^2 n\, e^{-\frac{4\pi n}{3} r^3} dr$$

1), Für die Wahrscheinlichkeiten dass ~~[illegible]~~ der Nachbarpunkt eine Entfernung zwischen r und $r+dr$ habe, resp. dass die Kugelschale $r \ldots r+dr$ nur einen oder auch mehrere Punkt enthalte. ~~oder auch mehrere~~

(4) da ~~Die~~ Wahrscheinlichkeit dass mehrere Punkte in derselben vorkommen ist offenbar klein von höherer Ordnung ist.

~~Die~~ Anzahl von Molekülpaaren welche einen Abstand zwischen r und $r+dr$ besitzen ist somit pro Vol. Einheit

$2\pi r^2 n^2 e^{-\frac{4\pi n}{3} r^3} dr$, was an Stelle der durch ein Versehen entstellten Formel 6) meiner Arbeit zu setzen ist.

Einige Worte ~~möchte ich~~ mögen noch ~~[illegible]~~ der Bedeutung dieser Überlegungen für Van der Waals' Zustandsgleichung der Gase ~~hinzufügen~~ gewidmet werden. Ich hatte schon (loc. cit. darauf hingewiesen in welcher Weise ~~dass~~ das Glied $\frac{a}{v^2}$ ~~[illegible]~~ jener v. d. W. Gleichung modificiert werden müsse, falls die Anziehungssphäre der Moleküle nicht grösser ist ~~ist im Verhältnis~~ als die Räume innerhalb welcher noch merkliche Dichtigkeitsunregelmässigkeiten ~~[illegible]~~ auftreten und hatte bemerkt dass auch die ~~von b abhängigen Glieder beeinflusst werden~~

Berechnung der von $\frac{b}{v}$ abhängigen Glieder durch Berücksichtigung dieser Ungleichförmigkeiten zu verbessern ~~[illegible]~~ ist. ~~müsse~~.

Für die Wahrscheinlichkeit, dass i kräftelose Punktmoleküle sich in einem Raume k befinden, welchem bei gleichförmiger Verteilung die Anzahl nk entfallen würde, habe ich loc. cit. p 628 den Ausdruck angegeben: $\frac{\nu^{n} e^{-\nu}}{n!} = f(n)$ $\quad \frac{(nk)^{i} e^{-nk}}{i!} = f(i)$

Dieser Ausdruck genügt auch offenbar der Bedingung, dass die Summe aller Wahrscheinlichkeiten gleich Eins ist, und dass die durchschnittlich auf jenen Raum entfallende Molekülzahl nk beträgt, da wir haben: $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = 1$ $\quad \sum_{i=0}^{\infty} f(i) = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\, f(n) = \nu \qquad \sum i\, f(i) = nk$$

Da die Lagen der Moleküle von einander unabhängig sind, kann man sich einen kugelförmigen Raum vom Radius r um ein gegebenes Molekül herum construirt denken und nach der Wahrscheinlichkeit fragen, dass ~~in diesem Raum~~ der Nachbarpunkt eine grössere Entfernung als r besitzt, dass also kein anderes Molekül in jenen Raum hineinfällt. Das ist die von Hertz mit $1 - W(r)$ bezeichnete Wahrscheinlichkeit, für welche obiger Ausdruck (resp. Formel (4) p 628 loc. cit.) mit $n=0$ ergibt: $1 - W(r) = e^{-\nu}$ und daraus folgt die Wahrscheinlichkeit dass der Nachbarpunkt eine kleinere Entfernung habe als r übereinstimmend mit Hertz:

$W(r) = 1 - e^{-\nu}$ oder in Hertz's Bezeichnungsweise $1 - e^{-nk}$.

Die von Hertz mit $W(r_1, r_2)$ bezeichnete Wahrsch. dass der Nachbarpunkt eine Entfernung zwischen r_1 und r_2 besitze ist identisch mit der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit dass in die Kugel r_1 gar kein Punkt, in die Kugelschale $r_2 - r_1$ ein oder mehrere Punkte hineinfallen

$W(r_1, r_2) = e^{-\nu v_1}\left(1 - e^{-\nu(v_2 - v_1)}\right) = e^{-\nu v_1} - e^{-\nu v_2} = W(r_1) - W(r_2)$ (übereinstimmend mit Hertz)

$$\int_0^\infty 4\pi r^3 \mu \, e^{-\frac{4}{3}\pi r^3 \mu} \, dr$$

$$\frac{4}{3}\pi\mu \, r^3 = x \qquad r = \sqrt[3]{\frac{x}{\left(\frac{4}{3}\pi\mu\right)}}^{1/3}$$

$$4\pi\mu \, r^2 \, dr = dx$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} \, dx \quad x^{1/3}}{\sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi\mu}}$$

$$x^{n-1} \, e^{-x} \, dx = \Gamma_3$$

Gretschel	Lehrbuch zur Einf. in d. organische Geometrie 1868.	7.—
Hankel	Th. der complexen Zahlensysteme 1867.	2.—
Heine	Handbuch d. Kugelfunctionen 1881.	12.—
Heis	Aufgabensammlung 1894.	3.50
—	Auflösungen dazu (Ruland) 3 Bd. 1900.	19.—
Helmert	Ausgleichungsrechnung 1872	7.—
Hensel u. Landsberg	Th. d. algebr. Functionen e. Variab. 1902	26.—
Hermite	Sur les integrales definies, la th. de fonctions … 1891.	12.—
Herz	Wahrscheinlichkeitsrechnung 1900.	8.—
Hesse	Vorl. über anal. Geom. d. Raumes 1876	10.—
—	" " " " Ebene 1881	5.20
—	Wyznaczniki (Zdziarski) 1880	1.— K
Holzmüller	Th. der isogonalen Verwandtschaft 1882.	11.20.
Imschenecki	Sur l'intégr. des équat. aux dérivées part. du I ordre (Houel) 1869	12.—
L'Intermédiaire des mathématiciens	8 Bd (Laisant-Lemoine) 1901	45.—
Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung	(Cantor Dyck) 12 Bd.	125.—
Joachimsthal	Anw. d. Diff. Rech. auf Flächen u. Linien 1890.	6.—
Jordan	Cours d'Analyse 3 vol. 1896.	40.—
Junker	Diff. u. Integral Rechnung (Göschen-Sammlung)	
Kelland & Tait	Introduction to Quaternions 1873	7.50.
		970.30 Mk
		+ 1.00 K

84/53

I A 25

Rozważanie

teoretyczne

Paweł Nykołow II

Władysław Müller II wdowa po urzędniku: 100 K.

Oron. Portek I przed. I sfl. podurzędnik Kolej: 1600 K. 4 u. mat odr. Zoll d.
47 ~~47~~ drewn. dom Estreicher d. Wróbl. b.d.

Major Samuel Betaban II. nauczyc. ludowy 960 K. + 96 2 u. + 144 1 z. mat bez 1895 sem. nauczyc. 1899
48 ~~48~~ ojciec: agent handlowy

Franc. Nowak II rolnik 3·5 morga 2 inwentarsk. ...... 2 z. c. mat bez 1898 dobre absolutory 2 Dubl.

Erwin Schlingler I:II wdowa po gorzelniku — — 2 lata na prawie ?

~~Adam Drozd ? ?~~ ?

~~Jul. Adamski I ?~~ ?

Stan. Teodorowicz III urzędnik Kolejowy: 3200 K. — 8 u. ? germanista 51 17 68

Przyczynek do kwestyi sporu między termodynamiką i K. t. g.

Kilka uwag

Uwagi o uzasadnieniu termodynamiki i kinetycznej teoryi gazów.

Zur Frage des Widerspruchs zwischen Thermodynamik und kinetischer Gastheorie.

Einige Bemerkungen über die Begründung des ~~[illegible]~~ Entropiesatzes und Boltzmann's Grundgleichung

O pewnej wadliwości w uzasadnieniu zasady entropii oraz zasadniczego równania Boltzmanna w teoryi kinetycznej gazów.

H. Theorem

in der Begründung

Über gewisse Mängel in Beweis des Entropiesatzes und der Boltzmann'schen Grundgleichung der Kinetischen Gastheorie.

~~W dawniejszych pracach autor rozwinął zapatrywania~~

które stanowią przedmiot dawniejszych prac teoretycznych

Wiadomo że zjawiska t. zw. fluktuacyi termodynamicznych, teoretycznie zbadane zostały przez autora

które pod względem teoret. wyjaśnione zostały prz…

oraz (badań doświadczalnych

oraz Einsteina, a doświadczalnie stwierdzone przez Svedberga, Perrina

a pod względem doświadczalnym głównie przez prace 9 * oraz ich uczniów, dowodzą pewnej

wadliwości ~~przyjętego~~ przyjętego systemu termodynamiki, i wykazały autorowi że (pojęcie tzw. zwykłe

~~zasady~~ ~~pr~~ zmuszają one nas do częściowego porzucenia t. zw. drugiej zasady.

wykazał

dwóch

Wbrew tym zapatrywaniom autor w (dawniejszych pracach rozwinął pogląd, że właściwie zasada ta w zwykłe

miejsce

przyjętej formie (entropia systemu izolowanego nie może wzrastać) jest błędna, że jednak ważnem pozostaje

zasady entropii za równoważną z tem

stwierdzenie

twierdzenie że (perpetuum mobile II rodzaju (jest niemożliwem. Zwykle uważa się ~~te~~ ~~[illegible]~~ (twierdzenia ~~[illegible]~~

— w ścisłem słowa znaczeniu —

się

~~równoważne~~, ponadto wiadomo że Boltzmann ustawił ~~(dowodził~~ ~~zasady entropii~~ na podstawie poglądów teoryi kinet.

(t. zw. H-Theorem). Wyłania się zatem pytanie, jakie wady tkwią z jednej strony w zwykle przyjętym sposobie

wyprowadzania zasady entropii z zasady niemożliwości perpetuum mobile, a z drugiej strony w ~~Boltzmanna~~

teoryi fundament

~~wywodzie~~ zasadniczego równania Boltzmanna które wedł. Boltzmanna ~~[illegible]~~ ~~podstawy~~) ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~,

~~wywodach~~, dotyczących (teoryi kinetycznej gazów

wady te sprowadzić się dają do

~~Wady te w obu wypadkach~~ Autor wykazuje że ~~wadliwość~~ ~~[illegible]~~ pominięcia zjawiska fluktuacyi;

w termodynamice występują one w postaci determinističnego, przyjmującego)

~~w pierwszym przypadku~~ ~~[illegible]~~ (~~[illegible]~~ założenia że przebieg zjawiska ~~[illegible]~~ jest

ściśle

~~[illegible]~~

określony jest przez podanie pewnych makroskopijnych parametrów, w teoryi kinetycznej zaś uwydatniają się one)

~~[illegible]~~ (w matematycznej formie owego równania,

Autor ~~[illegible]~~ dowodzi że

Boltzm.

~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ nie uwzględniającym wcale nierówności rozkładu drobin. (Równanie ~~[illegible]~~ ważnem jest

że byłoby błędnem stosować je, jak to

tylko dla przeciętnego stanu zbiorowiska analogicznych systemów gazowych, ale ~~[illegible]~~ ~~pewnie by~~ ~~[illegible]~~

systemu

~~do~~ zwykle się czyni do stanu pewnego indywidualnego ~~stanu~~ (gazowego.

Edm. Lucyan	Tęczarowski I.	wdowa po sekr. powiatowym: 1000 K.	5 r.	mat odzn. przez rok korepet. w [illegible]	
Zdz. Zygm.	Wełnisz III.	prowadzący księgi gruntowe przy sądzie w Rzeszowie. IX rangi	4 r.	—	Rehm. cel Finkel (3) b.d. dawn.
Andrzej 21 (20)	Wyka II	rolnik	4 r. utrzymujący rod.	Demb. (3) cel " (2) cel Danysz b.d Finkel Sem. b.d.	Finkel cel Demb. cel Rehm. Rep. zad.
Ign. 22 (21)	Strycharski II.	em. podurzędnik kolej: 1000 K.	2 r. 1 z.	Wrotk. (3) b.d. Kruczek dostd " (3) dostd	W. thn b.d.
Emil	Sadowski I	księgarz rachm. 1058 K.	6 r.	mat bez	
Alex. 39 ~~38~~	Solecki IV	840 K. kontroler targowy stypp.!!	1 s r. 1 b z 1 s z	Smol (5) cel Lab. chem.? cel Sem. mat. cel	
Stefan	Strzelecki II. piwowarek zapowie	stajenny pocztowy: 400 K. i skromna realność		—	
Paweł	Mykołów II	—	—	mat bez z roku 1901	
Wład. [illegible]	H[illegible]	wdowa po urzędniku:		—	

Luźne kartki
z pracy o błękicie nieba
1916/1917

Doświadczalne sprawdzenie teoryi Rayleigha o istocie błękitu nieba.

Z pomiędzy rozlicznych teoryj błękitu nieba największe ~~[illegible]~~ uznanie zyskała teorya Rayleigha, ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ tłomacząca to zjawisko jako opalescencyę ~~skutek uginania światła przez drobne cząstki w atmosferze zawieszone~~, analogiczną do (t. zw. zjawisko Tyndalla) które wszystkie [illegible] w ośrodkach mętnych wskutek uginania światła przez cząstki zawieszone.

Początkowo Rayleigh sądził że przyczyną opalescencyi są cząstki obce (kropelki, pyłki) jeśli wszelakie tylko się uwolnią nie dały się ~~[illegible]~~ później przychylił się do zdania że przyczyną tej są sam drobiny powietrza i pod tym założeniem wyprowadził wzór określający spółczynnik opalescencyi:

$$h = \frac{32}{3} \frac{\pi^3 (n-1)^2}{N \lambda^4}$$

Spółczynnik ten wynoszący dla powietrza koło $15 \cdot 10^{-7}$, oznacza ułamek światła padającego, który w każdym cm^3 gazu zostaje na wszystkie strony rozproszony, a tem samem też oznacza (procentowe) osłabienie promienia pierwotnego przy przechodzeniu przez gaz.

Światło wysyłane do przyrządu [illegible] [illegible]

Usiłowano dotychczas sprawdzić wzór ten a tem samem teoryę Rayleigha przy pomocy pomiarów nad ekstynkcyą światła słonecznego w atmosferze ziemskiej, przyczem jednak znaczna niepewność warunków atmosferycznych, obecność pyłków i kropelek mgły, oraz nie uwzględniony wpływ [illegible] tworzą poważne źródło niepewności.

W ciągu badań nad teoryą t. zw. opalescencyi krytycznej gazów znajdujących się w stanie [illegible] doszedłem do wniosku, że opalescencya powietrza i innych gazów powinna się dać dostrzedz bezpośrednio sposobem laboratoryjnym także w zwykłych warunkach, przy ciśnieniu normalnem, jeżeli jednak światło wzbudzające będzie dostatecznie silne, a tło ~~[illegible]~~ ~~i obserwować się będzie ściśle~~

zupełnie ciemne. Przyrząd który w tym celu skonstruowałem składał się z rury metalowej, przegrodzonej szeregiem odpowiednio dobranych sporządzonych zasłon, oraz z systemu soczewek, skupiających światło lampy łukowej w środku rury; ściśle oświetlone ~~[illegible]~~ można obserwować przez boczne okienko, wentralnie zasłoniętym wkoło.

Ściany rury były pokryte smarem złożonym z sadzy i glicerynu (do wnętrza można było wpuścić gaz osuszony i przefiltrowany przez złotą masę waty zwilżonej gliceryną, i oczyszczony od jonów

… sich um das Absetzen von Kolloidteilchen aus einer anfangs homogenen Lösung an einer adsorbierenden Kugelfläche handelt, und zwar geben sie im letzteren Falle die durchschnittliche Anzahl der betreffenden Teilchen an, um welche die wirkliche Anzahl in zufälliger Weise herumschwanken wird.

4. Reflektierende Wand.

Kehren wir nun wieder zur Frage nach der experimentellen Meßbarkeit der Diffusion an grob dispersen Kolloiden zurück.

Da ist nun außer Brillouins Arbeit eine sehr schöne Untersuchung Westgrens[1]) zu nennen, in welcher wiederum von festen Wänden, aber nicht von adsorbierenden, sondern von reflektierenden Gebrauch gemacht wird. Dies entspricht dem normalen Verhalten einer kolloiden Lösung, deren Teilchen im allgemeinen, solange die elektrische Doppelschicht wirksam

TR

1) A. Westgren, Zeitschr. f. phys. Chem. 89, 63, 1914.

ist, keine Tendenz haben, an den Wänden zu kleben. Die mathematische Theorie derartiger Fälle ist ganz analog dem vorhergehenden Falle; wir können wiederum die Diffusionstheorie zur Berechnung der Verteilung benützen, nur müssen wir die Grenzbedingung einführen, daß die reflektierende Wand keine Substanz durchläßt; also muß für dieselbe gelten: $\frac{\partial u}{\partial N}=0$.

Nehmen wir beispielsweise an, die Ebene $x=0$ wirke als reflektierende Wand, so läßt sich die Verteilung zur Zeit t auf Grund des bekannten Reflexionsprinzips durch Superposition von symmetrisch zur Wand gelegenen Quellen[1]) konstruieren; war die Anfangsverteilung durch eine Funktion $u=\varphi(x)$ gegeben, so resultiert daraus nach Analogie mit (3):

$$u=\int_0^\infty \varphi(x_0)[W(x_0,x)+W(-x_0,x)]\,dx_0. \quad (47)$$

Westgrens Anordnung erfordert aber keine ~~derlei~~ Rechnungen. Er konzentrierte die Teilchen sämtlich an der Ebene $x=0$ (und zwar dadurch, daß die betreffende mikroskopische Kammer in passender Weise auf einer Zentrifuge befestigt und eine Zeitlang der Wirkung der Zentrifugalkraft ausgesetzt wurde) und beobachtete dann das allmähliche Wegdiffundieren derselben. Da für die Teilchen in diesem Falle offenb…

artigen

…Schwerkraft bemerkbar macht.

Infolgedessen kommen wir zu der physikalisch evidenten Schlußfolgerung, daß auch im Falle variabler Kräfte für genügend kurze Zeiten das Superpositions-Prinzip gelten muß, und dies ermöglicht uns die Verallgemeinerung der Theorie der Diffusion für den Fall, daß die betreffenden Teilchen von irgendwelchen Kräften beeinflußt werden.

Haben wir es mit Teilchen zu tun, welche unter Einfluß einer Kraft $f(x)$ die durchschnittliche Geschwindigkeit $\beta f(x)$ erlangen, so resultiert die Teilchenmenge, welche durch die

1) Dabei ist aber der Auftrieb seitens des umgebenden Mediums (von der Dichte ϱ_0) zu berücksichtigen, welcher im Falle der Aerostatik nur eine unbedeutende — der Benützung des Van der Waalsschen $(v-b)$ anstatt v entsprechende — Korrektur liefern würde. A. Einstein, Ann. d. Phys. 19, 376, 1906; M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. 21, 756, 1906; J. Perrin, loc. cit. S. ■; außerdem C. R. 158, 1168, 1914; B. Iljin, Zeitschr. f. phys. Chem. 87, 366, 1914; A. Westgren, Arkiv f. mat. Svensk. Akad. 9, Nr. 5 (1913); R. Constantin, C. R. 158, 1171, 1341, 1914.

2) Vgl. M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. 48, 1103, 1915.

Flächeneinheit eines Querschnittes x durchströmt, aus Superposition jener konstanten Wanderung und der Diffusionsströmung; sie beträgt also:

$$-D\frac{\partial u}{\partial x}+\beta u f(x)$$

und daraus erhält man die Differentialgleichung für u:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\beta\frac{\partial}{\partial x}[uf(x)]. \quad (50)$$

Dieselbe definiert die Verteilung einer diffundierenden Substanz, welche unter Einfluß einer äußeren Kraft $f(x)$ steht. Andererseits können wir sie im Sinne des Äquivalenzprinzipes auf ein einzelnes Kolloidteilchen beziehen und dadurch die relative Häufigkeit u der verschiedenen Lagen desselben bestimmen, d. h. wir erhalten die betreffende Verallgemeinerung der Brownschen Bewegungsformel.

Eine Probe können wir sofort ausführen, da ich für einen Spezialfall, d. i. unter Annahme einer das Teilchen in die Ruhelage zurücktreibenden elastischen Kraft die betreffende Wahrscheinlichkeitsfunktion auf direktem synthetischen Wege ermittelt hatte[1]). Es ist dies jenes Beispiel, welches ich in dem Göttinger Vortrag vor drei Jahren besprochen hatte:

$$W(x_0,x,t)=\sqrt{\frac{\gamma}{\ldots}}\,e^{-\frac{\gamma(x-x_0e^{-\gamma t})^2}{\ldots}}$$

hin

Tymczasowe streszczenie

elektrycznych za pomocą silnego pola elektrycznego. Wyniki ~~były~~ następujące:

1). Powietrze, przy prześwietleniu wązką w kierunku ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ przepuszcza światło, niespolaryzowane, co pochodzi od pyłków pokazując ~~[illegible]~~ zawieszonych, dających się często nawet zauważyć gołem okiem jako punkty świecące

2). Po kilku dniach, gdy pyłki osiadły na ściankach rury, albo też zaraz po ~~przepuszczeniu~~ przepuszczeniu powietrza oczyszczonego, pozostaje opalescencyjne ~~światło~~ słabe, o odcieniu wyraźnie niebieskawym więcej niebieskim, ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ zupełnie liniowo spolaryzowane w płaszczyźnie . — —

3). We wodorze zjawisko to jest słabsze, dostrzegalne tylko dla oka dobrze wypoczętego

4). W chlorku ~~[illegible]~~ etylu opalescencja ~~[illegible]~~ jest bezporównanie silniejsza; zaimprowizowane urządzenie fotometryczne wykazywało natężenie kilkanaście razy większe ~~silniejsze~~ niż w powietrzu. ~~[illegible]~~

Niebieskawa barwa daje się wykazać ~~[illegible]~~ wyraźnie przy użyciu szkieł barwnych. ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ Stan polaryzacji światła dowodzi, że chodzi tu istotnie o zjawisko Tyndalla, a z teorią wzorem Rayleigha zgadza się zupełnie względne natężenie światła, które według ... ~~[illegible]~~ w wodorze powinno być 4 razy mniejsze, w chlorku etylu 16 razy silniejsze niż w powietrzu.

Przystępując do pomiarów W toku się doświadczenia więcej precyzyjnych dokładniejszych, przy użyciu słońca jako źródła światła, ~~[illegible]~~

Stwierdzi powstawanie zjawiska, mimo starannego oczyszczenia gazu ~~powietrza~~ oraz użycia natężenie ~~[illegible]~~

— które według wzoru Rayleigha w wodorze powinno być 4 razy mniejsze, w chlorku etylu 16 razy silniejsze niż w powietrzu — przemawiają bardzo za ~~teorią Rayleigha~~ tem, że cząsteczki są tu ~~[illegible]~~ same drobinami gazowemi.

theorie nützlich sein wird. Stellen wir uns nämlich die Aufgabe, in ganz analoger Weise die Anzahl Teilchen zu berechnen, welche bis zur Zeit t an einer vollkommen adsorbierenden Kugelfläche vom Radius R haften bleiben würden.

Da handelt es sich offenbar nur darum, die Lösung der Diffusionsgleichung mit den Nebenbedingungen:

1. $u = c$ für: $t = 0$ und $r > R$
2. $u = 0$ für: $r = R$ und $t > 0$

zu finden.

Da die Konzentration u offenbar nur vom Radius und von der Zeit abhängt, kann die Lösung mittels bekannter Methoden bewerkstelligt werden, indem die Differentialgleichung die Form annimmt: T,

$$\frac{\partial (ru)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} \tag{43}$$

somit auf Grund der Analogie mit der linearen Wärmeleitung in der Form:

$$u = c\left[1 - \frac{R}{r} + \frac{2R}{r\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{r-R}{2\sqrt{Dt}}} e^{-x^2} dz\right] \tag{44}$$ /c

gelöst werden kann; es läßt sich ganz einfach aposteriori die Tatsache verifizieren, daß hierdurch die Differentialgleichung (43), wie auch die Grenzbedingungen erfüllt werden.

Daraus folgt für die Menge der sich in der Zeit $t \cdots t + dt$ durch Diffusion an der Kugelfläche R ausscheidenden Substanz:

$$J\,dt = 4\pi D R^2 \frac{\partial u}{\partial r}\Big|\, dt = 4\pi D R c\left[1 + \frac{R}{\sqrt{\pi D t}}\right] dt \tag{45}$$

und für die Menge, welche von Anfang bis zur Zeit t abgeschieden wurde:

$$M = \int_0^t J\,dt = 4\pi D R c\left[t + \frac{2R\sqrt{t}}{\sqrt{\pi D}}\right]. \tag{46}$$

Diese Formeln sind einerseits für die Fälle gewöhnlicher, sagen wir „klassischer" Diffusion verwendbar, wie beispielsweise Ausscheidung von übersättigtem Wasserdampf an kugelförmigen Kondensationskernen, andererseits für Beispiele wo es sich ...

und ich bemerkt haben, muß das sog. Sedimentations-Gleichgewicht dem Exponentialgesetz der Aerostatik[1]) Genüge leisten, was später durch die schönen Versuche Perrins und dessen Mitarbeiter bestätigt und zur Ausarbeitung einer sehr präzisen Bestimmungsmethode der Loschmidtschen Zahl benutzt wurde; es muß nämlich gelten:

$$\nu = \nu_0 \, e^{-\frac{N}{HT}\frac{4\pi}{3} a^3 g (\varrho - \varrho_0) x} \tag{48}$$ $e^{-\frac{N}{HT}\frac{4\pi}{3}}$

(wo a den Teilchenradius, $(\varrho - \varrho_0)$ den Dichteunterschied der Teilchensubstanz gegenüber der Flüssigkeit bedeutet.)

Will man aber die ganze Erscheinung gründlich verstehen, so muß man die mikroskopische Analyse des Vorgangs ausführen, d. h. man muß untersuchen, in welcher Weise die Bewegungen der einzelnen Teilchen infolge der Schwerkraft und der Gegenwart des Gefäßbodens modifiziert werden, was eine wesentlich schwierigere Aufgabe[2]) ist.

Würde nur die konstante Schwerkraft ins Spiel kommen, ohne daß eine Begrenzung des Raumes zu berücksichtigen wäre, so würde die Lösung einfach daraus folgen, daß die Schwerkraft eine konstante, fortschreitende Bewegung (mit der Geschwindigkeit c) hervorruft, welche sich über die Brownsche Bewegung (1) superponiert:

$$W(x, x_0, t)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{(x - x_0 - ct)^2}{4Dt}} dx, \tag{49}$$ x

so daß an Stelle der Ausgangsabszisse x_0 die Größe $x_0 - ct$ auftritt.

Das mittlere Verschiebungsquadrat ist in diesem Falle:

$$\overline{(x - x_0)^2} = 2Dt + (ct)^2$$

und man sieht, daß für genügend kurze Zeiten das zweite Glied im Verhältnis zum ersten verschwindet. Da die Verschiebungs-Geschwindigkeit der Brownschen Bewegung anfangs unendlich groß ist, versteht man auch unmittelbar, ohne Rechnung, daß die Bewegung anfangs rein „Brownisch" erfolgt, und daß sich erst im Laufe der Zeit die allmähliche Verschiebung infolge der Schwerkraft ... /8

O prof. Łucjanie
Grabowskim

Grabowski Lucyan 29 lat ; doktorat 1900 w Monachium
4-5 lat w Krakowie , 3 lata w Monachium ,
1 w Pulkowie

---

1). Einige Bemerkungen zur Erklärung d. Polbewegung
Wien. Sitzgsber. 107 (1898)

2). Beobachtungen von kleinen Planeten
Astron. Nachrichten (1898)

3). Theorie d. harmonischen Analysators
Wien. Sitzgsber. (110) 1901

4). Zur Frage d. Veränderlichkeit von ~~α~~ κ Persei
Astron. Nachricht. (1902)

5). O ~~obserw~~ obserwacyach fotometrycznych Nowej Perseusza dokonanych w Obserwator. w Pulkowie
Wiadom. matemat. (1902)

6). W druku: Photometrische Beobachtungen d. Nova Persei auf d. Sternwarte i Pulkowo
Akad. Petersburg 1902

W manuskrypcie : O okresie Algola diss. Monach. , ~~zostanie~~ obrobione z powodu nowszych obserwacyi, będzie służyć do habilitacyi.

Materyały do:

1). gwiazdy Gill'a

2). o mikrometrze nieosobistym Repsolda

~~Hohes~~ ~~Das~~ Profes.-Coll. der phil. Facultät der Univ. zu Lemberg ~~an~~ erlaubt sich hiermit (dem k.k. Unterrichts Minist. ~~die~~ ~~den~~ Vorschlage zu unterbreiten ~~beantragt~~ eine Lehrkanzel für Astronomie an der genannten Universität zu schaffen ~~gründen~~, da die Gründung einer solchen Professur nunmehr schon zu einer unabweislichen Nothwendigkeit geworden ist.

~~Auf~~ ~~Die~~ Bedeutung ~~Wichtigkeit~~ der Astronomie als einer selbstständigen Wissenschaft, ja als Krone der exakten Wissenschaften überhaupt braucht wohl nicht näher hervorgehoben zu werden. ~~All~~ Allbekannt ist ferner der untrennbare Zusammenhang der Astronomie mit der allgemeinen ~~Physik~~ Physik, insbesondere der Mechanik und Spectroskopie, ebenso mit der Mathematik, welche ~~jahrhunderte~~ jahrtausendelange von der Astronomie Anregung empfangen hat und auch in ihr die augenscheinlichsten größten Triumphe gefeiert hat. ~~Endlich möge noch~~ Es ist wohl auch nicht nöthig ~~auf~~ die Wichtigkeit derselben als Hilfswissenschaft für den Geographie, Geologie ~~endlich~~ Chronologie ~~für die~~ und Schiffahrt, endlich deren praktische Anwendungen in der Nautik und Geodäsie ~~ja sogar auch~~ ~~Historiker~~ näher zu beleuchten.

In der That dürfte es ~~Es dürfte demgemäß~~ auch in der ganzen Welt ~~kaum eine~~ keine zweite Universität von der Bedeutung Lembergs geben, welche nicht eine Lehrkanzel für Astronomie ~~besitzt~~ besäße — ~~in Österreich wäre außer Lemberg nur noch Czernowitz anzuführen~~ — und an vielen größeren Universitäten ist diese Professur (~~Astron~~ (eventuell in Verbindung mit verwandten Fächern wie Geophysik, Geodäsie etc.) mehrfach besetzt.

~~Sie ist ja nicht nur durch den Gegenstand ihrer Forsch~~ diejenige unter den exakten Wissenschaften welche

Unter den exakten Wissenschaften zeichnet sie sich aus durch ihr historisches Alter ~~und~~ ~~erst~~ durch die Größe und Erhabenheit ~~ihres~~ des ~~Gegenstandes ihrer Forschung~~ ihres Endzweckes, die Erforschung des Weltalls, und nicht nur die durch ~~den innigen Zusammenhang mit~~ ihre Bedeutung für andere ~~Wissens~~zweige des menschlichen Wissens.

~~So~~ möge nur auf die ~~Zusammenhang der Astr. mit der allg. Physik~~ Rolle welche die Astr. in der allg. Ph. gespielt hat hingewiesen: ~~werden~~ sie hat Newton die Gesetze ~~der Mechanik~~ mechanischen Kräfte gelehrt und bildet bis heutzutage die Hauptstütze für die theoretische Mechanik, sie hat zuerst eine Messung der Geschwindigkeit des Lichtes ermöglicht, ~~und dadurch~~ sie hat die Aberration und das Doppler'sche Princip des Lichtes erwiesen welche bis heutzutage ~~durch~~ ~~keinen~~ den terrestrischen Experimenten unzugänglich sind, und eine Brücke an der Erkenntnis – es ~~möge~~ seien nur die Spectralbeobachtungen erwähnt ~~ent~~ – erschlossen.

Ebenso ist bekannt, dass die Mathematik gehört

In richtiger Erkenntnis ~~dieser~~ der bedeutungsvollen Rolle der Astronomie haben auch seit jeher ~~die Culturen~~ die Regierungen sämmtlicher Völker und Staaten, welche auf den Namen Culturstaaten Anspruch machten, ~~der Astronomie~~ ihrer Pflege besondere ~~Pflege~~ Aufmerksamkeit gewidmet, und auf keine andere der exakten Wissenschaften sind solche Summen von staatswegen verwendet worden wie auf die Astron–

In Österreich ~~gibt es~~ ~~außer~~ ist (außer Czernowitz) Lemberg ~~nur noch~~ ~~Czernowitz~~ als einzige Universität anzuführen, wo keine Professur für diesen Gegenstand besteht ~~was umso~~ welcher doch auch an Mittelschulen gelehrt werden muss und als Prüfungsgegenstand für das Lehramt an Gymnasien und Realschulen figuriert.

Da die Nothwendigkeit der Gründung einer solchen Lehrkanzel in Lemberg, insbesondere in Anbetracht der rasch wachsenden ~~[illegible]~~ Hörerzahl der realistischen Fächer, klar am Tage liegt, können nur zwei Punkte in Fragen kommen, betreffs welcher eine Schwierigkeit bestehen könnte, namentlich die ~~[illegible]~~ Schaffung eines astronomischen Observatoriums und die Personalfrage. ist eine künftige Lösung dieser Angelegenheit dadurch erleichtert, dass

In Betreff des ersten Punktes ~~hat das Professoren Collegium~~ beim Entwurfe der Pläne für das neue Universitätsgebäude für geeignete Localitäten Vorsorge getroffen wurde. Um jedoch die dringende Schaffung dieser Professur nicht weiter verzögern zu müssen, hat das Professoren Collegium von weiteren diesbezüglichen Vorschlägen derzeit einstweilen Abstand genommen, da sich der ord. Prof. der Astron. an der technischen Hochschule in Lemberg Dr. Laska in dankenswerther Weise bereit erklärt hat, ~~[illegible]~~ die ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ Durchführung der praktischen ~~[illegible]~~ astronomischen Arbeiten an seinem Observatorium an der k.k. technischen Hochschule zu gestatten.

3 190

Da demnach die erwähnte Schwierigkeit durch das Entgegenkommen Prof. Laskas beseitigt ist, bleibt nur noch die Frage zu erledigen, welche Candidaten zu einer würdigen Vertretung ~~für~~ dieses Lehramtes befähigt sind. und ... [illegible]

Von den Forschern polnischer Zunge welche ~~auf~~ in neuerer Zeit Arbeiten aus dem Gebiete der Astronomie geliefert haben, können in Betracht kommen: nach Alter geordnet

1). Kowalczyk
2). Ceraski
3). Birkenmajer
4). Merecki
5). Ernst
6). Grabowski
7). Graff

Von diesen entfällt des Alters wegen Kowalczyk, welcher nahezu 70 Jahre zählt.

Ebenso Graff; gegenwärtig bei der Normalaichungscommission in Berlin ~~[illegible]~~ und als Hilfsastronom der Urania in Berlin thätig, welcher wenig über 20 Jahre alt ist.

Ceraski ist gegenwärtig Direktor der Sternwarte in Moskau.

Birkenmajer

... fand aber bisher zu wenig Gelegenheit sich als praktischer Astronom zu bethätigen.

Merecki ist gegenwärtig Observator an einer Privatsternwarte in Warschau und mehr als astronomischer Amateur bekannt.

Da [illegible] die mündliche Übereinkunft durch den Antrag [illegible]
[illegible] ist, bleibt nur noch die Frage zu erledigen, welche [illegible]
in einer [illegible]
[illegible] beschäftigt wird. [illegible]

Von den [illegible] Lange welche [illegible] aus der Arbeit der
[illegible] gehört haben, können in Betracht kommen [illegible]

1) Landwirtschaft
2) Gewerbe
3) [illegible]
4. [illegible]
5. [illegible]
6) [illegible]
7) [illegible]

Von diesen entfällt Landwirtschaft welche unter 20 Jahre zählt
[illegible] Jahr 14 und
[illegible]
[illegible]
Gewerbe ist [illegible]

[illegible]

[illegible] der Arbeit [illegible]

[illegible]
[illegible]
[illegible]

4 101

Es kommen mithin ~~drei~~ eigentlich nur zwei Candidaten in Betracht, welche eine eingehendere Besprechung erfordern nämlich Grabowski u. Ernst.

Dr. Lucyan Grabowski, 29 Jahre alt, ist derzeit Adjunkt an der Sternwarte in Krakau.

Er studirte in Krakau, gieng dann auf einige Jahre nach München, wo er unter Seeliger astronomische Forschungen betrieb und das Doctorat ablegte und schließlich ~~nach Pulkowa~~ war er ein Jahr lang in Pulkowa thätig.

Seine wissenschaftlichen Arbeiten sind

1) Beobachtungen von kleinen Planeten Astr. Nachr. enthält ~~Beobachtungs Resultate von~~ Messungen der Position von 4 Planetoiden welche an der Münchner Sternwarte ~~ausgeführt~~ wurden ausgeführt

2) Einige Bemerkungen zur Erklärung der Polbewegung

~~3) Theorie der harmonischen Analysatoren Doctordissertation~~

~~3)~~ Bekanntlich hat ~~ist~~ die Erdaxe nicht eine absolut im Raume ~~fest~~ fixe Richtung sondern führt kleine kreiselartige Schwankungen aus, welche zu den in den letzten Jahrzehnten von zahlreichen Astronomen beobachteten Schwankungen der Polhöhe Veranlassung geben, und welche von Helmert theoretisch näher untersucht worden sind.

Grabowski bemerkt, dass die in Chandler's Formel zusammengefassten empirischen Resultate ~~[illegible]~~ zu einigen Correcturen Verbesserungen der Helmert'schen Erwägungen nöthigen und zeigt überhaupt, wie aus ~~durch~~ der Bewegung der Rotationsaxe die Bewegung der Trägheitsaxe abgeleitet werden kann, was auch in Hinsicht auf ~~einen Erklärung~~ Versuch Spitaler's einer ~~der~~ Erklärung jener ~~[illegible]~~ Bewegungen von Bedeutung ist.

näher ausgeführt sind.

5

3). Theorie d. Harmon. Analysators.

~~Grabowski behandelt in dieser Abhandlg, welche von ihm als Doctordissertation verwendet wurde~~ Die Theorie dieses Instruments, welches für manche Anwendungen in der ~~welches für die~~ Astronomie und ~~Geophysik~~ Physik von Henrici in London erfunden ~~von~~ ~~die~~ grosse Bedeutung ~~hat~~ war in den Grundzügen schon bekannt. Von Grabowski wurde sie in dieser Abhandlg, seiner Doctordissertation, mit Rücksicht auf den Einfluss der verschiedenen Fehlerquellen bis ins letzte Detail vervollständigt, wodurch ~~erst~~ nunmehr die Genauigkeit der Messungen bei Anwendung dieses Instruments erheblich gesteigert werden kann.

4). Zur Frage der Veränderlichkeit von α Persei

Die Beobachtungen der Veränderlichkeit des im vergangenen Jahre ~~neuen erschienenen~~ ~~veränderlichen~~ Sternes Nova Persei wurden von zahlreichen Astronomen meist durch Vergleichung mit dem oben erwähnten Sterne ausgeführt.

Nun hat der Guthnick ~~in~~ Bonn ~~die Frage aufgeworfen ob~~ behauptet, dass auch α Persei ~~nicht~~ selbst veränderlich ist, was eine Revision jenes gesammten Beobachtungsmaterials erfordern würde. Diese Behauptung wird von Grabowski durch Discussion seiner eigenen in Pulkowa angestellten Beobachtungen dieses Sternes widerlegt.

~~Außer diesen bisher in Druck erschienenen Arbeiten~~

5). O obserwacyach fotometrycznych Nowej Perseusza dokonanych w Obserw. w Pulkowie [Photometrische Beobachtungen der Nova Persei auf - - -]

Es ist dies nur ein kurzer Auszug aus einer ~~ausführlicheren~~ ~~demnächst~~ in den Sitzgs der Kais Akad zu Petersbg erscheinenden in Druck befindlichen Arbeit, welche eine Darlegung des ~~...~~ ~~umfangreichen~~ von Grabowski und Zeipel in Pulkowa gewonnenen auf die Veränderlichkeit von Nova Persei bezüglich Beobachtungsmaterials enthält.

6 103

Außer diesen im Druck erschienenen Arbeiten besitzt Grabowski noch

6). ein Manuscript ~~[illegible]~~ „Über die Periode Algols" auf Grund welches ihm von der Krakauer Akademie d. W. ein Reisestipendium nach Pulkowo verliehen wurde, und welche demnächst in Druck erscheinen soll. Sie enthält eine Anwendung der harmonischen Analyse auf die Veränderlichkeit des Sternes Algol ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ zum Zwecke der Gewinnung einer verlässlichen experimentellen Basis zur Entscheidung der viel umstrittenen Frage, ~~welche~~ ~~die~~ ~~Ursache~~ was für Ursachen die Veränderlichkeit jenes Sternes bedingen.

Aus diesen Arbeiten gibt sich Grabowski als ein vielversprechendes junges Talent zu erkennen, von welchem ~~noch namhafte~~ in Zukunft mit Zuversicht eigenständige Leistungen ~~[illegible]~~ erwartet werden können. In den Arbeiten Grabowski's ~~Insbesondere~~ ist vor allem deren ~~die~~ peinlich genaue Detailarbeit und Gründlichkeit ~~seiner Arbeiten~~ bemerkenswert, welche ~~sich auch in~~ namentlich in den in das Gebiet der Instrumentenkunde hinüberspielenden Untersuchungen auffällt. Diese scheinen überhaupt sein Lieblings-Spezialfach zu bilden, Abhandlg 2 (und Abhdlg 3) erweist auch seine ~~Geschicklichkeit~~ Eignung bei Behandlung mathematisch theoretischer Untersuchungen, doch ~~ist~~ sind die Anzahl speciell astronomischen (praktischen Beobachtungs- und) ~~[illegible]~~ Arbeiten 1 4 5 verhältnismäßig geringer ~~[illegible]~~ und die behandelten Gegenstände sind wenig vielseitig.

Alles in allem ergibt sich G. als

104

Bezüglich ~~Das~~ zweiten Candidaten Dr Ernst können wir uns kurz fassen, da

über ~~de~~ denselben schon in der am 13 Juli 1900 betreffs Ertheilung der venia

legendi ~~[illegible]~~ an das Hohe k.k. Ministerium gerichteten Eingabe ausführlich berichtet wurde.

Dr Ernst hat ausser ~~einer~~ einem leichtfasslichen Lehrbuch

Astronomia gwiazd stałych

und zwei populär wissenschaftlichen Schriften

O przyrodzie planet

O końcu świata i kometach

bis zu seiner Habilitierung
(folgende wissenschaftlichen Arbeiten veröffentlicht:

Ausserdem zahlreiche Beobachtungen von Planeten u. Kometen in den Astr. Nachr.,

~~und~~ Ephemeriden von Aletheia in den astr. Abh. u. Veröffentl. d. k.k. R.I. für Grad-

und populär wissenschaftliche Artikel in Wszechświat.

Indem betreffs Inhaltsangabe ~~der meisten~~ ~~jener Arb~~ jener Arbeiten auf das erwähnte

frühere Referat verwiesen wird, mögen ~~[illegible]~~ hier überdies ~~nur~~ noch zwei seit jener Zeit erschienenen

Abhandlungen angeführt werden:

O nowym wzorze interpolacyjnym dla widma pryzmatycznego

Es wird darin eine neue Interpolationsformel zur Reducirung des prismatischen Spectrums auf das normale Spectrum ~~aufgestellt~~ begründet, welche genauere

~~und mit so viel geringerem Aufwand an Rechnung~~ ~~wesentlich leichter~~ Rechenarbeit wesentlich erleichtert

Resultate liefert als die bisher als beste empfohlene Hartmann'sche und welche daher die.

6) wyznaczenie ~~[illegible]~~ szerokości geogr. Lwowa za pomocą gwiazd kulminujących w zenicie.

und demnächst in den Sitzgsb. d. Krak. Ak. erschein

Diese Arbeit (In welcher der Verfasser auf Grund eigener an der Sternwarte zu Lemberg angestellter astronomischer Messungen die geogr. Breite der Sternwarte Lembergs ermittelt ~~hat~~, enthält eine erhebliche Berichtigung der bisher ~~allgemein~~ angenommenen Daten.

Zur Charakteristik sämtlicher dieser Arbeiten sei bemerkt:

Die populärwissensch. Schriften sowie das Werkchen 1). zeugen von ~~gan~~ ausgebreiteter Litteraturkenntnis, sowie der Gabe einen schwierigen Gegenstand leicht fasslich darzustellen. Abhandlgn 4 und 7 bringen erhebliche neue Beiträge auf dem Gebiete der theoretischen Astronomie. Die Berechnung des Planeten Aethra zeigt, dass Dr Ernst den mühevollen numerischen Rechnungen der modernen Astronomie vollkommen gewachsen ist.

2, 6, 9 sowie die zahlreichen Beiträge zu den Astron. Nachrichten, erweisen ~~Dr Ernst als~~ dem sein Eifer und Geschick im astronomischen Beobachten und in der Bearbeitung des gewonnenen Materials.

~~Aus~~ ~~In der Vergleichung~~ Dr Ernst wissenschaftliche ~~Thätigkeit~~ Leistungen zeichnen sich im Vergleich zu jenen Grabowski's vor Allem durch grössere Fülle und Vielseitigkeit aus, was ~~dadurch erklärt wird~~ darin begründet ist, dass Dr Ernst eben seit ~~[illegible]~~ längerer Zeit als Grabowski ~~[illegible]~~ mit praktischen astronomischen Forschungen beschäftigt ist. ~~[illegible]~~ Dr Ernst hat ~~sich~~ thatsächlich auf allen Gebieten der rechnenden und beobachtenden Astronomie ~~als tüchtiger Fachmann~~ ~~erprobt.~~ seine Leistungsfähigkeit erwiesen.

9

106

~~Auf den gleichen Grund ist~~

Mit dem erwähnten Umstande steht auch die unverkennbar grössere Selbstständigkeit und Reife der Arbeiten Dr Ernst's in Zusammenhange.

Wenn weiters berücksichtigt wird, dass Dr Ernst seit einer Reihe von Jahren als Assistent am Observatorium der k.k. techn. Hochschule thätig ist und als solcher sich mit sämmtlichen praktischen Obliegenheiten vollständig vertraut gemacht hat, während Dr Grabowski erst ~~vor kurzem~~ in den letzten Monaten eine analoge Stellung in Krakau erlangt hat, wenn weiters in Erwägung gezogen wird, dass Dr Ernst seit zwei Jahren habilitirter Docent an der Universität zu Lemberg ist, Grabowski ~~noch nicht~~ dagegen die Docentur ~~[illegible]~~ noch nicht erlangt hat, so muss zugegeben werden, dass bei ersterem eine ~~[illegible]~~ grössere Garantie für ~~[illegible]~~ selbstständige wissenschaftliche Forschung wie auch für eine ersprießliche pädagogische Thätigkeit gegeben ist.

~~[illegible]~~

Aus diesem Grunde hat die ~~Professoren Collegium der phil. Fac.~~ bei der Sitzung vom einstimmig beschlossen, Dr Ernst als Candidaten für die ~~Professur der~~ Lehrkanzel der Astronomie vorzuschlagen.

~~Dasselbe erlaubt~~ Somit wendet sich das Prof. Colleg. d. phil. Facultät d. Univ. zu Lemberg an d. Hohe Minist. f. C. u. U. mit der Vorschlage Bitte, dass kk Ministerium möge — in Anbetracht des dringenden Bedürfnisses nach Nothwendigkeit einer Professur für Astronomie und Anbetracht der vorzüglichen Eignung Dr Ernsts für eine solche — Herrn Dr Ernst zum ausserord. Prof. d. Astronomie a. d. Univ. Z. ernennen.

Pani [illegible]

będzie o wpół do czwartej

u p. Redaktora.