I

„Funkcye elliptyczne"

według Weierstrassa (Seliwanow).

Rozdział I.

Теорія эллиптическихъ функцій.

Показат. ф-ія

$$\mathcal{E}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}$$

имѣетъ слѣд. свойства:

1) при конечном значеніи аргумента она имѣетъ характер цѣлой ф-іи;

2) существует теорема сложенія:

$$\mathcal{E}(x+y) = \mathcal{E}(x) \cdot \mathcal{E}(y);$$

3) значенія ф-іи образуют геометрическую прогрессію, если значенія аргумента составляют ариѳм. прогр.

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3); \quad \mathcal{E}(x_1) \cdot \mathcal{E}(x_3) = \mathcal{E}^2(x_2) \text{ или}$$

$$\frac{\mathcal{E}(x_2)}{\mathcal{E}(x_1)} = \frac{\mathcal{E}(x_3)}{\mathcal{E}(x_2)};$$

4) между ф-іей и производной существует алгебраич. зависимость

$$\frac{\partial \mathcal{E}(x+y)}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{E}(x+y)}{\partial y} \text{ или } \frac{\mathcal{E}'(x)}{\mathcal{E}(x)} = \frac{\mathcal{E}'(y)}{\mathcal{E}(y)} = \text{const}.$$

5) $\mathcal{E}$ період. ф-ія с періодом $2\pi i$

$$E(x+2n\pi i) = E(x).$$

Возьмемъ $\varphi(u) = E(au+b)$; она имѣетъ слѣд. свойства:

1) $\varphi(u)$ однозначн. ф-ія съ характеромъ цѣлой ф-іи;

2) ариѳм. ряду аргументовъ соотвѣтств. геометр. рядъ значеній самой ф-іи, т.е. имѣетъ мѣсто теорема сложенія вида

$$\varphi(u)\cdot\varphi(v) = C\varphi(u+v),$$ гдѣ C — пост.;

3) между φ и ея произв. существ. алгебраич. зависимость;

4) φ — періодич. ф-ія съ періодомъ $2\omega = \frac{2\pi i}{a}$.

Пусть теперь $\varphi(u) = F(e^{au})$ раціон. ф-ія отъ e^{au}, она тоже будетъ раціон. ф-іей отъ e^{au+b} или отъ $\varphi(u)$ и пусть $u_2 = \frac{u_1+u_3}{2}$, тогда

$$\varphi(u_1) = F(e^{au_1}),\ \varphi(u_2) = F(e^{au_2}),\ \varphi(u_3) = F(e^{au_3})$$ и

$$e^{au_1}\cdot e^{au_3} = (e^{au_2})^2.$$

Исключивъ e^{au_1}, e^{au_2} и e^{au_3}, получимъ алгебраич.

зависимость

$$G[\psi(u_1), \psi(u_2), \psi(u_3)] = 0.$$

Положим

$$u + v = u' + v',$$

то имеют место ур—ія

$$G\left[\psi(u), \psi(v), \psi\left(\frac{u+v}{2}\right)\right] = 0$$

$$G\left[\psi(u'), \psi(v'), \psi\left(\frac{u+v}{2}\right)\right] = 0,$$

или, исключив $\psi\left(\frac{u+v}{2}\right)$,

$$G_1[\psi(u), \psi(v), \psi(u'), \psi(v')] = 0.$$

Взяв $u' = 0$, получим теорему сложенія (2) в видѣ

$$G_1[\psi(u), \psi(v), \psi(u+v)] = 0.$$

Далье

$$\psi'(u) = a\, e^{au} F'(e^{au}),\quad \psi(u) = F(e^{au});$$

по исключеніи e^{au}, найдем алгебраич. зависимость

$$G[\psi(u), \psi'(u)] = 0,$$

чѣмъ доказывается свойство (3).

Пусть s дано и надо найти u такъ, что

$$\psi(u) = F(e^{au}) = s.$$

Если F — $m^{ой}$ степени относит. e^{au}, то оно имѣетъ m корней вообще

$$e^{au} = s_1,\ e^{au} = s_2, \dots\ e^{au} = s_m.$$

Пусть рѣшенія этихъ ур-ій: $u_1, u_2, u_3 \dots u_m$;

$u = u_1 + 2n_1\omega,\ u_2 + 2n_2\omega, \dots, u_m + 2n_m\omega$ (гдѣ $\omega = \frac{2\pi i}{a}$)

$n_1, n_2, \dots n_m$ положит. или отрицат. цѣлые числа.

Слѣд. $\psi(u)$ період. ф-ія с періодомъ $2\omega = \frac{2\pi i}{a}$, это — свойство (4).

Къ этому классу принадл. тригонометр. ф-іи

$$\cos u = \frac{1}{2}(e^{ui} + e^{-ui})$$

$$[\cos(u+v) - \cos u \cos v]^2 = (1-\cos^2 u)(1-\cos^2 v)$$

періодъ $2\omega = \frac{2\pi i}{i} = 2\pi$; $(a = i)$

Можно предложить себѣ вопросъ, какія ф-іи удовлетворяют ~~сл~~ свойству (2), т. е. существует ур-іе алгебраическое

$$\mathcal{F}\left[\varphi(u_1), \varphi(u_2), \varphi(u_3)\right] = 0, \text{ при } u_2 = \frac{u_1+u_3}{2}.$$

Пусть $\varphi(u)$ ~~а~~ аналит. ф-ія, опредѣл. рядом

$$\varphi(u(a) = A_0 + A_1(u-a) + A_2(u-a)^2 + \ldots\ldots$$

Можно положить A_1 не $= 0$, если бы $A_1 = 0$, то разложеніе можно бы ~~ра~~ по разложить по степеням $u - a'$, гдѣ a' мало отлич. от a и коэф. при $(u-a')$ не $= 0$

Пусть $u_2 = \frac{u_1+u_3}{2}$ и пусть u_1, u_3 находятся въ предѣлах сходимости ряда.

I $\varphi(u_1) - A_0 = A_1(u_1-a) + A_2(u_1-a)^2 + \ldots\ldots$

II $\varphi(u_2) - A_0 = A_1(u_2-a) + A_2(u_2-a)^2 + \ldots\ldots$

III $\varphi(u_3) - A_0 = A_1(u_3-a) + A_2(u_3-a)^2 + \ldots\ldots$

Из I и III можно получить

$$u_1 - a = \frac{1}{A_1}(\varphi(u_1) - A_0) + \ldots\ldots = P(\varphi(u_1) - A_0)$$

$u_3 - a = \frac{1}{A_1}\left[\varphi(u_3) - A_0\right) + \dots = \mathfrak{P}\left(\varphi(u_3) - A_0\right)$

(знак $\mathfrak{P}(x)$ означает ряд, расположенный по степеням x)

Следов. $\frac{u_1+u_3}{2} - a = u_2 - a = \frac{1}{2}\left\{\mathfrak{P}\left(\varphi(u_1) - A_0\right) + \mathfrak{P}\left(\varphi(u_3) - A_0\right)\right\}$

Подставив это значение $u_2 - a$ во II, найдем зависимость между $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$ и $\varphi(u_3)$. Надо определить φ так, чтоб эта зависимость была алгебраич. ур-ием.

Взяв вместо u аргумен $v = u - a$, и положив $\psi(v) = \varphi(a+v)$, найдем ф-ію, определенную для окрестности полевой точки или вокруг полевой точки. Если φ — искомая ф-ія, то должно иметь мест[о] алгебр. ур-іе

$$G\left[\psi(v_1), \psi(v_2), \psi(v_3)\right] = 0, \quad v_2 = \frac{v_1 + v_3}{2}$$

Взяв $v_1 + v_3 = v_1' + v_3'$, найдем

$$G_1\left[\psi(v_1), \psi(v_3), \psi(v_1'), \psi(v_3')\right] = 0$$

или при $v_1' = 0$

$$G_2\left[\varphi(v_1), \varphi(v_3), \varphi(v_1+v_3)\right] = 0$$

φ будетъ имѣть теорему сложенія.

Ф-ія φ должна быть однозначною. Многія многозначныя ф-іи имѣютъ теорему сложенія. Пусть имѣемъ алгебр. ур-іе степ. $\underline{m}$:

$$G\left[\varphi(u), e^{au}\right] = 0$$

$\varphi(u)$ — m-значная ф-ія отъ e^{au}. Исключивъ e^{au} и e^{av} изъ ур-ій

$$G\left[\varphi(u), e^{au}\right] = 0, \quad G\left[\varphi(v), e^{av}\right] = 0, \quad G\left(\varphi(u+v), e^{au}\cdot e^{av}\right) = 0,$$

получимъ для $\varphi(u)$ теорему сложенія.

Пусть между $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ и $\varphi(u+v)$ существуетъ алгебр. зависимость

$$\text{I} \quad G(x, y, z) = 0,$$

гдѣ $x = \varphi(u)$, $y = \varphi(v)$, $z = \varphi(u+v)$

$$\frac{\partial G}{\partial x}\cdot\frac{dx}{du} + \frac{\partial G}{\partial z}\cdot\frac{dz}{du} = 0; \quad \frac{\partial G}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dv} + \frac{\partial G}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

или, замѣтивъ, что $\frac{\partial z}{du} = \frac{\partial z}{\partial v}$,

$\underline{\underline{II}}$ $\frac{\partial G}{\partial x}\cdot\frac{dx}{du}-\frac{\partial G}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dv}=0.$

Исключив z из ур-ий $\underline{I}$ и $\underline{II}$, получим

$\underline{\underline{III}}$ $G_1\left(x, y, \frac{dx}{du}, \frac{dy}{dv}\right)=0.$

Положив v пост., найдем алгебр. зависимость между x и $\frac{dx}{du}$. Чтобы при этом получилось тождество, то в

$$G_1=\sum_{\varkappa,\mu} A_{\varkappa\mu}\, x^{\varkappa}\left(\frac{dx}{du}\right)^{\mu}$$

каждый коэфф. $A_{\varkappa\mu}=0$, это и будет алгебр. зависим. между y и $\frac{dy}{dv}$.

Пусть из ур-ий $\underline{II}$ z получается в видѣ раціональной ф-ии от $x, y, \frac{dx}{du}, \frac{dy}{dv}$. Что это возможно, можно дать примеры для $\underline{\cos \sin}$:

$z=xy-\frac{dx}{du}\cdot\frac{dy}{dv}$, для $\sin$: $z=x\frac{dy}{dv}+y\frac{dx}{du}$.

Итак пусть

$$z=F\left(x, y, \frac{dx}{du}, \frac{dy}{dv}\right),$$

гдѣ F — знак раціон. ф-ии, или

$$\varphi(u+v)=F\left[\varphi(u), \varphi(v), \varphi'(u), \varphi'(v)\right].$$

Пусть ф-ія $\varphi(u)$ определ. рядом, сходящ~~имся~~ при $|u| < r$. Ряды φ и φ' должны удовлетворить предыдущее ур-іе, если $|u| < \frac{r}{2}$, $|v| < \frac{r}{2}$ при $v = u$

$$\varphi(2u) = \mathfrak{F}_1[\varphi(u), \varphi'(u)], \text{ гдѣ } u < \frac{r}{2},$$

или $\varphi(u) = \mathfrak{F}_1\left[\varphi\left(\frac{u}{2}\right), \varphi'\left(\frac{u}{2}\right)\right]$, гдѣ $u < r$.

$\varphi(u)$ представлена в видѣ частнаго двух рядов, кот. рад. сходимости r, если вм. $\varphi\left(\frac{u}{2}\right)$ и $\varphi'\left(\frac{u}{2}\right)$ подставим их разложенія в ряд, получим

$$\varphi = \frac{f(u)}{g(u)}, \text{ откуда } \varphi\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{u}{2}\right)}{g\left(\frac{u}{2}\right)}, \quad \varphi'\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{g\left(\frac{u}{2}\right) f'\left(\frac{u}{2}\right) - f\left(\frac{u}{2}\right) g'\left(\frac{u}{2}\right)}{g^2\left(\frac{u}{2}\right)}$$

Подставив эти ряды в ф-ю $\mathfrak{F}$, найдем

$$\varphi(u) = \frac{f_1(u)}{g_1(u)}, \text{ гдѣ } \left|\frac{u}{2}\right| < r, \text{ или } |u| < 2r.$$

Отсюда найдем $\varphi\left(\frac{u}{2}\right)$ и $\varphi'\left(\frac{u}{2}\right)$ для $\left(\frac{u}{2}\right) < 2r$ и подставив в $\mathfrak{F}_1$, получим

$$\varphi(u) = \frac{f_2(u)}{g_2(u)}, \text{ гдѣ уже } |u| < 4r$$

и т. д.; наконец получим

$$\varphi(u) = \frac{f_n(u)}{g_n(u)}, \text{ гдѣ } |u| < 2^n \cdot r$$

n — можетъ быть сколь угодно велико, поэтому $\varphi(u)$ можетъ быть представлена, какъ частное двухъ рядовъ с безконечно большимъ радіусомъ сходимости.

Всѣ эти дроби $\frac{f_k(u)}{g_k(u)}$, $\frac{f_l(u)}{g_l(u)}$ равняются ряду $\varphi(u)$, первоначально данному при $|u|<r$; при этомъ

$$\frac{f_k(u)}{g_k(u)} = \frac{f_l(u)}{g_l(u)} \text{ или } f_k(u)\, g_l(u) = f_l(u) \cdot g_k(u)$$

Это равенство имѣетъ мѣсто для всѣхъ u, для к-рыхъ $|u|<r$, ряды въ обѣихъ частяхъ равенства тождественны; поэтому дроби $\frac{f_k(u)}{g_k(u)} = \frac{f_l(u)}{g_l(u)}$ въ ихъ общемъ кругѣ сходимости.

Первоначально опредѣленная ф-ія $\varphi(u)$ для значеній u, под. к-рыхъ $< r$, можетъ быть расширена, если для знач. $|u|>r$ придать ей тѣ значенія, которыя при этомъ принимаютъ дробь $\frac{F(u)}{G(u)}$, числитель и знаменатель к-рой ряды с бесконечно большим кругом схо-димости, где

$$\varphi(u) = \frac{F(u)}{G(u)}.$$

Если $\underline{a}$ конечное значенiе $\underline{u}$, то F и G можно расположить по степеням $(u-a)$

$$\varphi(u) = \frac{\mathfrak{P}_1(u|a)}{\mathfrak{P}(u|a)}$$

$\varphi(u)$ не будет иметь определеннаго зна-ченiя, если в знам. низшая степень $(u-a) >$, чем в числит., т. е.

$$\varphi(u) = (u-a)^{-m}\,\frac{\mathfrak{P}_1'(u|a)}{\mathfrak{P}'(u|a)},$$

где $\mathfrak{P}_1'$ и $\mathfrak{P}'$ не обращ. в нуль при $\underline{u} = \underline{a}$, $\underline{m} > 0$.

Ф-iя φ может иметь в конечном удале-нiи от любой точки бесконечныя значенiя, но перваго рода (ausserwesentliche singuläre Stelle), [т. е. такая бесконечность], кот. мо-жет быть уничтожена умноженiем на нѣкоторую степень $(u-a)$, в этом случ. на $(u-a)^m$].

Для первоначально опредѣленной ф-іи имѣло мѣсто ур-іе

$$\varphi(u+v) = F(\cancel{\varphi u}\, \varphi u, \varphi v, \varphi' u, \varphi' v) = \frac{G_1(\varphi u, \varphi v, \varphi' u, \varphi'(v))}{G_2(\varphi u, \varphi v, \varphi'(u), \varphi' v)}$$

Расширенная ф-ія $\varphi(u) = \frac{F(u)}{G(u)}$ совпадаетъ с $\varphi(u)$, для $|u|<r$. Поэтому имѣетъ мѣсто ур-іе

$$F(u+v)\cdot G_2 - G(u+v)\cdot G_1 = 0,$$

если mod. $(u+v)<r$; ~~это~~ ур-іе должно быть тождественно $=0$, поэтому оно имѣетъ мѣсто и при $|u+v|>r$.

Надо теперь изслѣдовать, будетъ-ли ф-ія $\varphi(u)$ періодична, т. е. существуетъ ли P, что

$$\varphi(u+P) = \varphi(u)$$

Здѣсь является вопрос: дана трансцендентная ф-ія $f(u)$, как частное двух повсюду сходящихся рядов; опредѣлить при сколь ких значений u, $f(u) = b$." Можно показать, что, если при заданном b, u имеет m значений, то в бесконечно малой окрестности b существует точка b', для кот. u имеет более m значений.

Сначала докажем теорему. Если из плоскости значений u исключить произвольно большую, но конечную часть, то в остальной будут значения u, при которых $f(u)$ больше всякой наперед заданной величины.

Во первых, пусть $f(u)$ имеет бесчисленное множество бесконечностей первого рода. Внутри замкнутой области их конечное число, поэтому вне ее будет бесконечное число, пусть a одна из таких точек.

Для точек в окрестности a, $f(u)$ предст. в видѣ

$$f(u)=(u-a)^{-m}\varphi(u-a)$$

$f(u)$ к.к. угодно велико близ a.

Во вторых, пусть ф-ія не имѣетъ безконечности 1-го рода; она представ. тогда в видѣ постоянно сходящ. ряда

$$f(u)=A_\mu u^\mu + A_{\mu+1}u^{\mu+1}+\dots$$

гдѣ μ можетъ $=0$. Пусть для всѣхъ значеній u, под. к-рых $=r$, maxim. $|f(u)|=g$, тогда, как изв.,

$$|A_n|\le g\,r^{-n}.$$

Если бы для большихъ r, g оставалось бы меньше нѣкоторой величины, то должно было бы быть $A_n=0$, т.е. $f(u)$ равнялось бы постоянной. Слѣд., для большихъ r, $|f(u)|$ к.к. угодно велико.

Въ третьихъ, пусть ф-ія имѣетъ конечное число безконечныхъ точекъ и a_k одна изъ этихъ точекъ.

$$f(u,a) = (u-a)^{-m}\varphi(u/a) = F(u,a) + \varphi_1(u/a),$$

гдѣ $F(u,a)$ аггрегатъ членовъ с отрицательными показателями въ точкѣ $u=a$, ф-ія $f(u,a) - F(u,a)$ будетъ конечна.

Пусть всѣ безконечныя точки будутъ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

$$f_1(u) = f(u) - F_1(u,a_1) - F_2(u,a_2) - \ldots - F_n(u,a_n)$$

ф-ія $f_1(u)$ не имѣетъ безконечныхъ точекъ; поэтому, какъ показано въ случаѣ второмъ, она принимаетъ какъ угодно большія значенія при весьма большомъ u, ф-іи $F_1, F_2, \ldots F_n$, какъ содержащія только отрицат. степени u примутъ при этомъ весьма малыя значенія, слѣд. $f(u)$ можетъ быть какъ угодно велико.

Сказанное примѣнимо и къ ф-іи $\frac{1}{f(u)-b}$, т.е. она какъ угодно велика для нѣкоторыхъ точек въ замкнутой области, слѣд. $f(u)-в$ может быть сколько угодно мало, будет-ли оно равно нулю, это неизвѣстно. Для нѣкотораго u_1 $f(u_1)=в_1$, гдѣ $в_1$ т.к. угодно близко к $в$; $в_1$ лежит внутри круга, описаннаго т.к. угодно малым радiусом около $в$. || Можно найти u_2 вблизи u_1 т.к., что $f(u_2)=в_2$, гдѣ $в_2$ вблизи $в_1$ и лежит внутри весьма малаго круга, описаннаго около $в_1$.

$$f(u_2)-f(u_1)=f^{(\mu)}(u_1)\frac{(u_2-u_1)^\mu}{\mu!}+\ldots$$

обернув этот ряд, получим

$$u_2-u_1=\varphi\left[\left(f(u_2)-f(u_1)\right)^{\frac{1}{\mu}}\right]=\varphi\left[(в_2-в_1)^{\frac{1}{\mu}}\right],$$

отсюда найдем u_2. || Около u_1 опишем круг весьма малаго радiуса; внутри его будет по крайней мѣрѣ одна точка u', для которой $f(u')=в_2$, гдѣ $в_2$ т.к. угодно близко к $в_1$. Вблизи u_1 можно найти u_2 т.к. что $f(u_2)=в_2$. И т.к.

мы имеем двѣ точки u' и u_2, для котор. f имѣетъ тоже значеніе.

Пусть, продолжая разс. остр. дальше, мы нашли

$$f(u_1)=b_1,\ f(u_2)=b_2,\ f(u_3)=b_3, \dots f(u_n)=b_n$$

гдѣ b_n менѣе вблизи b. Въ области величины u, за исключеніемъ окрестностей точекъ $u_1, u_2, \dots u_n$, найдется по крайней мѣрѣ одна точка u'_{n+1}, для к-рой $f(u'_{n+1})=b_2$, гдѣ b_2 вблизи b_1.

По доказанному можно найти в окрестностях $u_1, u_2 \dots u_n$ такія точки $u_1', u_2', \dots u_n'$, что $f(u_1')=b_2$, $f(u_2')=b_2, \dots f(u_n')=b_2$, да кромѣ того $f(u'_{n+1})=b_2$, чѣмъ обнаруживается теорема, высказанная на страницѣ 13.

Ур-іе $f(u)=b$ может быть удовлетворено конечнымъ значеніемъ величины u, но вблизи b

найдется точка b', котор. соотвѣтствуетъ какое угодно большое число значеній u.
Теперь можем перейти к разысканію однозначных ф-ій, имѣющих теорему сложенія. Пусть для $\varphi(u)$

$$G[\varphi(u+v),\varphi(u),\varphi(v)]=0$$

и пусть это ур-іе $n^{\text{ой}}$ степени относительно $\varphi(u+v)$. Ф-ія $\varphi(u)$ может быть раціональною и пусть $\varphi(v_1)=b,\ \varphi(v_2)=b, \dots \varphi(v_{n+1})=b$ и

$$G[\varphi(u+v_\mu),\varphi(u),b]=0, \text{ гдѣ } \mu=1,2,3,\dots n+1$$

Это ур-іе удовлетворяется при всяком u, $n+1$ значеній $\varphi(u+v_\mu)$, тогда как оно $n^{\text{ой}}$ степени относительно $\varphi(u+v)$. Поэтому 2 корня должны быть равные, эти два равные корня могут быть различные при разных значеніях u. Можно доказать, что для нѣкотораго μ и ν

$$\varphi(u+v_\mu)=\varphi(u+v_\nu)$$

при всякомъ u. (ν тоже равно $1, 2, 3, \dots, n+1$).
Т. к. $\varphi(v_\mu)$ конечно (оно $=b$), то $\varphi(u+v_\mu)$ и $\varphi(u+v_\nu)$ для малыхъ значеній u разлагаются въ рядъ по степенямъ u. Въ результатѣ получ.

$$\varphi(u+v_\nu)-\varphi(u+v_\mu)=A_{\mu\nu}+A'_{\mu\nu}u+A''_{\mu\nu}u^2+\dots\dots$$

Если не всѣ коэфф. $=0$, и $A_{\mu\nu}$ не $=0$, то для нѣкотораго u, mod. кот. $<$ нѣкотораго d, эта разность не $=0$. Если же $A_{\mu\nu}=0$, то разложеніе имѣетъ видъ

$$\varphi(u+v_\nu)-\varphi(u+v_\mu)=u^\lambda\left(A^{(\lambda)}_{\mu\nu}+A^{(\lambda+1)}_{\mu\nu}u+\dots\right)$$

Эта разность тоже не обращается въ нуль для значеній $u <$ нѣкотораго d и не $=0$.
Составимъ произведеніе

$$\Pi\left[\varphi(u+v_\nu)-\varphi(u+v_\mu)\right]$$

Если бы не всѣ коэфф. одной изъ разностей $=0$, то для нѣкотораго u произведеніе Π

не вполне $=0$, между тем два корня ур-ія $\mathfrak{F}=0$, должны быть равны при всяком u. Следов. для нѣкотораго u и v разность $\varphi(u+v_r)-\varphi(u+v_\mu)$ имѣет весь коэфф. при u равные нулю. Поэтому при всяком u

$$\varphi(u+v_r)-\varphi(u+v_\mu)=0$$

Подставив $u-v_\mu$ вм. u, получим, что для всякаго u $\underline{\varphi(u+v_r-v_\mu)=\varphi(u)}$, т. е. ф-ія $\varphi(u)$ періодическая.

Скажем нѣсколько слов о періодических функціях вообще. Пусть ф-ія $\varphi(u)$ имѣетъ періодъ P,

$$\varphi(u+P)=\varphi(u)$$

Возьмем $u-P$ вмѣсто u

$$\varphi(u-P)=\varphi(u)$$

Повторив нѣсколько разъ эту подстановку, найдем

$$\varphi(u+nP)=\varphi(u)$$

гдѣ n положительное или отрицат. цѣлое число.

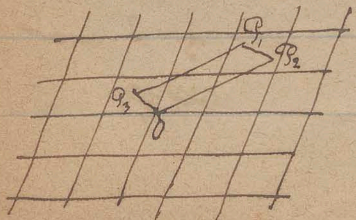
Если бы функція имѣла періоды $P_1, P_2, P_3, \dots P_n$ то были бы періоды $\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \dots + \mu_n P_n$, гдѣ $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ какія угодно цѣлыя числа.

Докажемъ теорему, что болѣе двухъ періодовъ быть не можетъ. Періоды величины конечныя.

$$\varphi(u+v) = \varphi(u) + v\left\{\varphi'(u) + \varphi''(u)\frac{v}{2} + \dots\dots\right\}$$

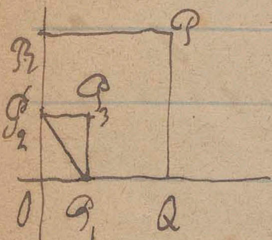
Пусть u выбрано такъ, что $\varphi'(u)$ не $=0$, тогда при $|v| <$ нѣкотораго g, выраженіе въ скобкахъ не равно нулю и потому $\varphi(u+v)$ не $= \varphi(u)$, если $|v| < g$.

Это значитъ, что въ нѣкоторомъ конечномъ отдаленіи отъ нулевой точки нѣтъ періодическихъ точекъ. Раздѣлимъ плоскость двумя системами параллельныхъ линій, на такія малыя части, чтобы въ четырехъ параллелограммахъ, окружающихъ нулевую точку не было періодическихъ точекъ. Можно показать, что въ



каждомъ изъ паралл. не можетъ быть болѣе одной періодической точки.

Пусть въ одномъ изъ нихъ 2 період. точки P_1 и P_2, тогда $P_1 - P_2$ будетъ тоже періодъ, эта-же разность есть точка P_3, лежащая въ одномъ изъ четырехъ параллелограммовъ, окружающихъ 0, чего по предположенію быть не можетъ. Слѣд. всякій конечный, замкнутый контуръ заключаетъ только конечное число періодическихъ точекъ. Если вообще есть періодическія точки, то на одной изъ прямыхъ, выходящихъ изъ 0, будетъ одна точка ближайшая къ 0, назовемъ ее P_1. Пусть имѣется еще періодическая точка P'. Въ треугольникѣ OP_1P' можетъ быть только конечное число, одна изъ нихъ P_2 будетъ ближайшею къ OP_1, такъ что въ треугольникѣ OP_1P_2 никакихъ нѣтъ періодическихъ точекъ. Построимъ точку



$P_3 = P_1 + P_2$. Въ $\Delta P_1P_2P_3$ не можетъ быть період. точекъ. Если Q были таковой, то и въ тр. OP_1P_2 была бы тоже періодическая точка $Q' = P_3 - Q$, чего быть не можетъ. Слѣд. въ парал. $OP_1P_3P_2$ нѣтъ періодическихъ точекъ. Пусть имѣетъ періодъ точку $P = Q + R$, $\frac{Q}{P_1} = \xi_1$, $\frac{R}{P_2} = \xi_2$, гдѣ ξ_1, ξ_2 величины дѣйствительныя.

Пусть $\xi_1 = \mu_1 + \xi_1'$, $\xi_2 = \mu_2 + \xi_2'$

гдѣ μ_1, μ_2 положительныя или отрицательныя цѣлыя числа, а ξ_1' и ξ_2' положительныя правильныя дроби. Тогда $P = \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \xi_1' P_1 + \xi_2' P_2$, но $\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2$ періодъ, слѣд. и $\xi_1' P_1 + \xi_2' P_2$ тоже періодъ. Это-же послѣднее изображаетъ точку внутри парал. $OP_1P_3P_2$. Слѣд. $\xi_1' = 0$, $\xi_2' = 0$ и періодич. точки P имѣютъ форму $\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2$, гдѣ μ_1 и μ_2 какія угодно цѣлыя числа. Если нѣтъ элементарнаго періода P_2, то функція просто періодическая и имѣетъ періодъ $P = \mu_1 P_1$.

Это-же доказательство можно перевести на алгебраическій языкъ. Пусть A и B двѣ величины, отношеніе которыхъ величина мнимая и пусть

$A = a + a'i$, $B = b + b'i$ и $ab' - a'b$ не $= 0$.

Возьмемъ другую комплексную величину C можетъ быть представлено въ видѣ $C = c + c'i = \alpha A + \beta B$, гдѣ α и β величины дѣйствительныя и опредѣляемыя изъ ур-ій $c = \alpha a + \beta b$, $c' = \alpha a' + \beta b'$.

Докажемъ сначала, что въ конечной области конечное число періодовъ. Разсмотримъ такія точки C, чтобы α принимало всѣ значенія отъ $-g$ до $+g$ и β тоже. Здѣсь g взято такъ велико, чтобы охватить всю внутрую область. Эту послѣднюю разобьемъ на части такъ, чтобы въ каждой изъ нихъ α заключалось между $\frac{\mu g}{n}$ и $\frac{(\mu+1)g}{n}$

β " $\frac{\nu g}{n}$ и $\frac{(\nu+1)g}{n}$

гдѣ μ и ν цѣлыя числа отъ $-n$, до $(n-1)$; всего подраздѣленій будетъ $4n^2$; n такое большое цѣлое и положит. число, что въ четырехъ отдѣленіяхъ, въ которыхъ:

$$\begin{cases}\alpha = -\frac{g}{n} \cdots 0 \\ \beta = -\frac{g}{n} \cdots 0\end{cases} \qquad \begin{cases}\alpha = -\frac{g}{n} \cdots 0 \\ \beta = 0 \cdots +\frac{g}{n}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha = 0 \cdots +\frac{g}{n} \\ \beta = -\frac{g}{n} \cdots 0\end{cases} \qquad \begin{cases}\alpha = 0 \cdots +\frac{g}{n} \\ \beta = 0 \cdots +\frac{g}{n}\end{cases}$$

не заключалось бы ни одного періода. Предположимъ, что въ одномъ изъ ~~нихъ~~ прочихъ подраздѣленій 2 періода

$$P' = \alpha' A + \beta' B \quad \text{и} \quad P'' = \alpha'' A + \beta'' B$$

Тогда былъ бы періодъ $P = P'' - P' = (\alpha'' - \alpha')A + (\beta'' - \beta')B$

гдѣ $\alpha = \alpha'' - \alpha'$ заключается между $-\frac{q}{n}$ и $+\frac{q}{n}$

$\beta = \beta'' - \beta''$ ——— " ——— " ——— $-\frac{q}{n}$ и $+\frac{q}{n}$

Этотъ періодъ находился бы въ одномъ изъ вышеупомянутыхъ четверыхъ подраздѣленій, что невозможно. Въ конечномъ контурѣ конечное число подраздѣленій и слѣд. конечное число періодовъ. Пусть P' періодъ, въ одномъ изъ періодовъ вида $\xi P'$, ξ имѣетъ наименьшее положительное значеніе ξ_1, положимъ $P_1 = \xi_1 P'$. Всѣ періоды вида $\xi P'$ могутъ быть представлены въ видѣ ξP_1, гдѣ ξ — цѣлое. Если бы $\xi = \mu_1 + \xi'$, гдѣ μ_1 — цѣлое число а ξ' лежитъ между 0 и 1, $P = \mu_1 P + \xi P_1$, ξP_1 было бы меньшимъ періодомъ, чѣмъ P_1, что невозможно, слѣд. $\xi' = 0$ и періодъ имѣетъ форму $P = \mu_1 P_1$.

Пусть имѣется еще періодъ P', причемъ $\frac{P'}{P}$ величина комплексная. Всякій другой періодъ можетъ быть представленъ въ видѣ $P = \alpha P_1 + \beta P_1'$, гдѣ α и β величины дѣйствительныя. Изъ всѣхъ періодовъ, въ которыхъ α между 0 и 1, одному соотвѣтствуетъ наименьшее положительное β, назовемъ этотъ періодъ P_2. Можно будетъ P представить въ видѣ $P = \xi P_1 + \eta P_2$; пусть $\xi = \mu_1 + \xi'$, $\eta = \mu_2 + \eta'$; μ_1 и μ_2 цѣлыя числа; ξ', η' прав. дроби. $P = \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \xi' P_1 + \eta' P_2$.
$\xi' P_1 + \eta' P_2$ будетъ періодъ, что невозможно, слѣд. $\xi' = 0$, $\eta' = 0$ и $P = \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2$.

Разсмотримъ теперь вопросъ, какую форму должна имѣть періодическая функція съ періодомъ 2ω. Одна изъ такихъ функцій $x = e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$

Пусть имѣемъ еще одну однозначную функцію $\varphi(u)$ такую, что $\varphi(u+2\omega) = \varphi(u)$.

Каждому значенію $u + 2n\omega$ соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе x и ф-ціи $\varphi(u)$. Поэтому $\varphi(u)$ есть однозначная функція отъ x, назовемъ ее $f(x)$. Докажемъ, что $f(x)$ аналитическая ф-ція отъ x.

$$x = e^{\frac{\pi i}{\omega}u}, \quad x_0 = e^{\frac{\pi i}{\omega}u_0}$$

$$x - x_0 = e^{\frac{\pi i}{\omega}u_0}\left[e^{\frac{\pi i}{\omega}(u-u_0)} - 1\right] = Const\left[\frac{\pi i}{\omega}(u-u_0) + \cdots\cdots\right]$$

Такъ какъ коэфф. при $u-u_0$ не $=0$, то

$$u - u_0 = \mathfrak{P}(x - x_0) \quad \text{при } x \text{ близъ } x_0$$

$\varphi(u)$ аналитическая функція отъ u, поэтому она разл. въ рядъ по степенямъ $u-u_0$. При помощи только что полученнаго разложенія, найдемъ

$$f(x) = \mathfrak{P}_1(x - x_0).$$

Предѣлы для x: $x=0$ и $x=\infty$. Поэтому, на основаніи теоремы изъ теоріи аналит. функцій, $f(x)$ можетъ быть представлена въ видѣ

$$\varphi(u) = f(x) = \frac{G_1(x) - G_2\left(\frac{1}{x}\right)}{G_3(x) - G_4\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} A_n x^n}{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} B_n x^n} \quad \left[\text{гдѣ } x = e^{\frac{\pi i}{\omega}u}\right]$$

Можно доказать, что <u>если $f(x)$ трансцендентная ф-ція отъ x</u>

<u>то $\varphi(u)$ необходимо имѣетъ другой періодъ $2\omega'$, причемъ $\frac{\omega'}{\omega}$ величина комплексная, если $\varphi(u)$ имѣетъ теорему сложенія</u>

Не трудно доказать, что для x близкого къ нулю или для весьма большого x ф-ія $f(x)$ можетъ быть какъ угодно велика. Тоже справедливо и для функціи $\frac{1}{f(x)-b}$. Отсюда слѣдуетъ, что если ур-іе $f(x)=b$ удовлетворяется n значеніями x, то вблизи b существуетъ точка b', которой соотвѣтствуютъ $(n+1)$ значеній x.

Пусть для $\varphi(u)$ имѣетъ мѣсто теорема сложенія:

$$G\left(\varphi(u),\ \varphi(v),\ \varphi(u+v)\right)=0.$$

Это ур-іе положимъ $n^{ой}$ степени относительно $\varphi(u+v)$. Если $\varphi(u)=f(x)$ трансцендентная функція отъ x, то найдется такое b, чтобы

$$f(x_1)=b,\quad f(x_2)=b,\ \ldots\ldots\quad f(x_n)=b,\quad f(x_{n+1})=b.$$

или $\varphi(u_1)=b$, $\varphi(u_2)=b$, ——— $\varphi(u_n)=b$, $\varphi(u_{n+1})=b$

Разность $u_\mu-u_\nu$ не можетъ равняться кратному 2ω, т.к.

$$\frac{x_\mu}{x_\nu}=e^{\frac{(u_\mu-u_\nu)\pi i}{\omega}},\quad x_\mu \text{ не } = x_\nu$$

Должны быть удовлетворены ур-ія $\mathfrak{G}(b, \varphi(v), \varphi(u_\mu+v))=0$, $\mu=1,2,\dots,n+1$

Два корня этого ур-ія $\varphi(u_\mu+v)$ должны быть равны и, на основаніи разсужденій на стр. 13, для нѣкотораго μ ν должно быть при всякомъ v

$$\varphi(v+u_\mu)=\varphi(v+u_\nu), \text{ отсюда}$$

$$\varphi(v+u_\mu-u_\nu)=\varphi(v)$$

$u_\mu-u_\nu$ не есть кратное 2ω. Слѣд. $\varphi(u)$ функція двояко-періодическая.

Отсюда вытекаетъ, если $\varphi(u)$ имѣетъ одинъ періодъ и теорему сложенія, то $\varphi(u)$ — непремѣнно раціональная ф-ія отъ $e^{\frac{\pi i}{\omega}u}$

Пусть $\varphi(u)$ двояко періодическая ф-ія, періоды навны 2ω и $2\omega'$; (какъ мы видѣли, $\frac{\omega'}{\omega}$ величина комплексная). Всѣ значенія u вида:

$$u'=u_0+2\xi_1\omega+2\xi_1'\omega' \quad ; \; \xi_1, \xi_1' \text{ положит. прав. дроби}$$

выполняютъ нѣкоторый параллелограммъ, который назовемъ періодическимъ (Periodenparallelogramm). Пусть

$$u = u_0 + 2\xi\omega + 2\xi'\omega'$$

где $\xi = \nu + \xi_1$, $\xi' = \nu_1 + \xi_1'$; ν и ν_1 цѣлыя числа

$$u - u' = 2\nu\omega + 2\nu_1\omega$$

$\varphi(u)$ и $\varphi(u')$ имѣютъ равныя значенія. Назовемъ точки u и u' соотвѣтственными (congruent). Точка u_0 совершенно произвольна, можно положить $u_0 = 0$. Всѣ значенія, которыя вообще можетъ принять $\varphi(u)$, она въ дѣйствительности имѣетъ внутри період. парал., выходящаго изъ нулевой точки. Всякая аналит. ф-ія имѣетъ безконечныя и нулевыя точки. Онѣ должны найтись и внутри період. парал. Докажемъ, что порядокъ соотвѣтствующихъ нулевой или безконечной точекъ въ каждомъ парал. одинъ и тотъ же.

Пусть a нулевая или безконечная точка порядка λ въ перв. парал.

$$\varphi(u/a) = (u-a)^{\pm\lambda}\left(A_0 + A_1(u-a) + \dots\right)$$

Пусть a' соотвѣт. точка въ любомъ изъ остальныхъ пар.

$$a' = a + 2\nu\omega + 2\nu_1\omega'$$

$$\varphi(u|a') = \varphi(u|a + 2\nu\omega + 2\nu_1\omega') = \varphi(u - 2\nu\omega - 2\nu_1\omega'|a) = \varphi(u|a)$$

Разложение по степенямъ $u-a'$ такое же, какъ и по степенямъ $u-a$. Поэтому точки a и a' нулевыя и безконечныя одного и того-же порядка.

Назовемъ $w = 2\nu\omega + 2\nu_1\omega'$

Обозначимъ $\sigma(u)$ такую двоякопериодическую функцію, чтобы $\sigma(w) = 0$, причемъ нуль перваго порядка.

Тогда ф-ія

$$\varphi(u) = \frac{\sigma^{\lambda_1}(u-a_1)\,\sigma^{\lambda_2}(u-a_2)\ldots\ldots\sigma^{\lambda_r}(u-a_r)}{\sigma^{\mu_1}(u-b_1)\,\sigma^{\mu_2}(u-b_2)\ldots\sigma^{\mu_s}(u-b_s)}\, e^{g(u)}$$

будетъ имѣть нулевыя точки $a_1+w, a_2+w, \ldots a_r+w$ порядка $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_r$ и безконечныя точки $b_1+w, b_2+w, \ldots$ порядка $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_s$. Задача сводится къ разысканію такой $\sigma(u)$ и къ изученію ея свойствъ. Эту функцію можно представить въ видѣ безконечнаго произведенія подобно тому, какъ цѣлая ф-ія по заданнымъ корными представляется въ видѣ конечнаго произведенія.

Такъ напр. $f(x) = Cx^{\mu}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)$

каждый множитель $\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)$ повторенъ столько разъ сколько единицъ въ порядкѣ нулевой точки. Функція $f(x)$ обращается въ нуль при $x=0, a_1, a_2, \dots$ Но это представленіе имѣетъ только тогда смыслъ, если рядъ $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu}$ безусловно сходящійся. Найдемъ, что если рядъ $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{m+1}$ безусловно сходящійся, то общій членъ произведенія

$$\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)e^{\frac{x}{a_\nu}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^3+\dots+\frac{1}{m}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^m}$$

Ф-ія разлагается въ произведеніе первоначальныхъ ф-ій подобно тому, какъ число разлагается въ произведеніе простыхъ чиселъ.

Функціей первоначальной называется такая, которая имѣетъ одно безконечное и одно или ни одного нулевого значенія. Напр.

$$\left(\frac{k}{x-\alpha}+l\right)e^{g\frac{1}{x-\alpha}}$$

или если это безконечное значеніе x уходитъ въ безконечность $(kx+l)e^{g(x)}$

Если $k=0$, то ф-ія не имѣетъ нулевой точки, если $l=0$, то нулевая точка при $x=0$. Всякая однозначная ф-ія съ одной безконечною точкой (mit einer singulären Stelle) представляется въ видѣ произведенія такихъ первичныхъ функцій съ одною-же безконечною. Достаточно принять $g(x)$ цѣлою ф-іею.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{r=0}^{\infty} x^r = \frac{d}{dx}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{x^r}{r} \text{ для всѣхъ } |x|<1$$

Послѣ интегр-ія

$$1-x = e^{-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{x^r}{r}}$$

Установимъ обозначенія:

$$\mathcal{E}(x,0) = 1-x$$
$$\mathcal{E}(x,1) = (1-x)e^{x}$$
$$\mathcal{E}(x,2) = (1-x)e^{\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}}$$
$$\text{-------------------}$$
$$\mathcal{E}(x,m) = (1-x)e^{\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^m}{m}}$$
$$\mathcal{E}(x,m) = (1-x)e^{\sum_{r=1}^{m}\frac{x^r}{r}} = e^{-\sum_{r=m+1}^{\infty}\frac{x^r}{r}} = e^{-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{x^{m+r}}{m+r}} \text{ (для } |x|<1).$$

Funkcya $\mathcal{E}(x, m)$ jest pierwotna i staje się 0 dla $x=1$, a nieskończonoś-
cią tylko dla $x=\infty$ (wzięta pod kształtem pierwszym)

$$\mathrm{I} \quad \mathcal{E}\left(\frac{x}{a}, m\right) = \left(1 - \frac{x}{a}\right) e^{\sum_{r=1}^{m} \left(\frac{x}{a}\right)^r \frac{1}{r}}$$

jest także funkcja pierwotna, która staje się zerem dla $x=a$

Jeżeli $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$, to

$$\mathrm{II} \quad \mathcal{E}\left(\frac{x}{a}, m\right) = e^{-\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{m+r} \left(\frac{x}{a}\right)^{m+r}}$$

Niech będzie szereg wielkości $a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots$, których ilość skończona zawiera się w obrębie skończonym i nadto $\lim\limits_{n=\infty} |a_n| = \infty$. Wieloczyn

$$\prod_{\nu} \mathcal{E}\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$$

będzie przedstawiał funkcyę, stającą się zerem w punktach oznaczonych z odpowiednią wielokrotnością, jeżeli tylko każdy czynnik $\mathcal{E}\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$ jest powtórzony odpowiednią ilość razy.

Każdej wartości a_ν dobrana jest liczba m_ν, żeby wieloczyn zbiegał się bezwarunkowo. Niech

$$|a_1| < |a_2| < |a_3| < \ldots \quad < |a_n| < \ldots$$

Zaczynając od pewnego a_n, $\left|\frac{x}{a_n}\right| < 1$

$$\prod_{\nu} \mathcal{E}\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) = \prod_{\nu=1}^{n} \mathcal{E}\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) \cdot \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \mathcal{E}\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$$

Ze wzoru II

$$\prod_{\nu=n+1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) = e^{-\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\sum\limits_{\tau=1}^{\infty}\frac{1}{m_\nu+\tau}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+\tau}}$$

Wykładnik przy e ma wartość skończoną, jeśli $\sum\limits_{\nu=n+1}\sum\limits_{\tau=1}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu+\tau}$ albo $=\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{1-\left|\frac{x}{a_\nu}\right|}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu+1}$ jest zbieżny.

Ta sama zaś jest $< \frac{1}{1-\kappa}\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu+1}$, gdzie κ największa z liczb $\left|\frac{x}{a_\nu}\right|$. Jest ona wielkość skończona, jeśli $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu+1}$ jest skończona.

W każdym ~~innym~~ zwentę przypadku można dobrać takie m_ν, żeby szereg był zbieżny; w ostateczności można założyć $m_1=0$, $m_2=1$, ... $m_\nu=\nu-1$. Wtedy otrzyma się szereg $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{\nu}$ napewno zbieżny, poczynając bowiem od pewnego wyrazu będzie $\left|\frac{x}{a_\nu}\right|<1$.

Można więc dobrać takie m_ν, żeby iloczyn $\prod\limits_\nu E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$ był bezwarunkowo zbieżny. Potem suma będzie

$$-\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{1}{m_\nu+\tau}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+\tau} = -\mathfrak{P}(x, n+1)$$

jeśli uszykujemy ją podług x. Ten szereg $\mathfrak{P}$ będzie zbieżny, jeśli się weźmie $|x|$ mniejsze $|a_{n+1}|$, $|a_{n+2}|$, ... Biorąc więc $|x|$ mniejsze absol. wartości a_1 a_2 ... otrzymamy zbieżne szeregi $\mathfrak{P}(x,1)$, $\mathfrak{P}(x,2)$, ...

$$-\mathfrak{P}(x,1)+\mathfrak{P}(x,n+1) = -\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{1}{\tau+m_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+\tau} - \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{1}{\tau+m_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+\tau}\right\}$$

$$= -\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{1}{\tau+m_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+\tau}$$

$$e^{-\mathfrak{P}(x,1)+\mathfrak{P}(x,n+1)} = e^{-\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{1}{\tau+m_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+\tau}}$$

albo ze wzoru II

$$\text{III} \qquad e^{-\mathfrak{P}(x,1)} = \left\{\prod_{\nu=1}^{n} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)\right\} e^{-\mathfrak{P}(x,n+1)}$$

Ma to miejsce, jeśli $\left|\frac{x}{a_\nu}\right|<1$, $\nu=1,2,3,\ldots$

Rozwijając obydwie części wzoru III na szereg, mamy:

$$\text{IV} \qquad e^{-\mathfrak{P}(x,1)} = 1+B_1x+B_2x^2+\ldots \qquad \text{dla } |x|<|a_1|,|a_2|,|a_3|,\ldots$$

$$e^{-\mathfrak{P}(x,n)} = 1+B_1^{(n)}+B_2^{(n)}x^2+\ldots \qquad \text{dla } |x|<|a_{n+1}|,|a_{n+2}|,\ldots$$

Funkcye $E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$, a więc także iloczyny tych funkcyj rozwijają się na szeregi stale zbieżne. Stąd prawa strona wzoru III daje szereg

$$\text{V} \qquad 1+A_1x+A_2x^2+\ldots \qquad \text{zbieżny, dla } \left|\frac{x}{a_\nu}\right|<1,\ \nu=n+1,n+2,\ldots$$

Obydwa szeregi III i V mają wartości jednakowe dla $|x|<|a_1|,|a_2|\ldots$ są więc tożsamościowe (t.j. o jednakowych spółczynnikach) i mają wartości jednakowe dla $|x|<|a_{n+1}|,|a_{n+2}|\ldots$

Tutaj n, a więc i a_{n+1} mogą być jakkolwiek wielkie liczby, promień zbieżności szeregu V^{go} jest także jakkolwiek wielki, jest więc i szereg IV stale zbieżny, a równanie III ma miejsce dla każdej wartości x. Dla tego wieloczyn:

$$\text{VI} \qquad f(x)=\left\{\prod_{\nu=1}^{n} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) e^{-R(x,n+1)}\right\}$$

rozwija się na szereg stale zbieżny t.j. $f(x)$ jest to ~~całkowita~~ funkcya całkowita, jednowartościowa.

Widzieliśmy, że

$$R(x,n+1)=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{1}{m_\nu+\tau}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+\tau} < \frac{1}{1-K}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+1}$$

przy należycie wybranem m

$$\lim_{n=\infty} R(x,n+1)=0$$

Więc $\quad f(x)=\prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$

$f(x)$ rozwija się więc nie tylko na szereg stale zbieżny, lecz również i na wieloczyn stale zbieżny. Jeżeli dla $x=0$, $f(x)=0$ wielokrotności μ, to $f(x)=x^{\mu}\prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$.

Ten wieloczyn, zarówno z szeregiem $R(x,n+1)$ nie tylko są zbieżne, lecz nadto są jednostajnie zbieżne. Stąd wynika, że wzór powyższy można różniczkować (logarytmowo)

$$\frac{d\log f(x)}{dx} = \frac{\mu}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mathcal{E}'\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)}{\mathcal{E}\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)} \quad \text{albo:}$$

$$\frac{d\log f(x)}{dx} = \frac{\mu}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{x-a_\nu} + \frac{1}{a_\nu} + \frac{x}{a_\nu^2} + \cdots + \frac{x^{m_\nu-1}}{a_\nu^{m_\nu}} \right\}$$

Można różniczkować wzór ten dowolną ilość razy, gdyż zawsze otrzymujemy po zróżniczkowaniu szereg jednostajnie i bezwarunkowo zbieżny. Czasami się zdarza, że $m_\nu >$ pewnego skończonego m. Po m=krotnem zróżniczkowaniu otrzymujemy:

$$\frac{d^{m+1}\log f(x)}{dx^{m+1}} = (-1)^m \mu \frac{m!}{x^{m+1}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^m \lambda_\nu \frac{m!}{(x-a_\nu)^{m+1}}$$

gdzie λ_ν wyraża wielokrotność a_ν. Dla bezwarunkowej zbieżności tego szeregu wystarcza, żeby

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{m+1}$$

była bezwarunkowo zbieżna, co rzeczywiście częstokroć się zdarza. To $\underline{m}$ możemy wziąć zamiast m_ν.

Dla przykładu rozwiniemy na iloczyn funkcyę $\sin x\pi$

$$\sin x\pi = x\pi \prod_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{g_n(x)}$$

Tu kreska położona u góry Π oznacza, że wyraz, odpowiadający $n=0$ ma być opuszczony.

Trudność leży w wyznaczeniu funkcyi $g_n(x)$

Zróżniczkowawszy wzór ten logarytmowo, mamy:

$$\pi\,\mathrm{cotg}\,\pi x = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' g_n'(x) + \frac{1}{x} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{x-n}$$

Różniczkując raz jeszcze, przychodzi:

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi x} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' g_n''(x) + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{x-n}\right)^2$$

Zaprowadźmy znakowania:

$$s(x) = x\prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}$$

$$s_1(x) = \frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\frac{1}{x-n}+\frac{1}{n}\right\}$$

$$s_2(x) = -s_1'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-n)^2}$$

Funkcya $s_2(x)$ ma okres 1, gdyż $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-n+1)^2} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-n)^2}$ t. j.

$$s_2(x+1) = s_2(x).$$

Jeżeli się podzieli płaszczyznę wartości x^{u} na pasy przez linie równoległe do osi η w odległości 1, to funkcya $s_2(x)$ ~~ma~~ będzie w każdym z nich przybierała te same wartości. Niech $x = \xi + \eta i$. Nie potrzebujemy nadawać ξ innych wartości jak między 0 i 1.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{(x-n)^2}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\xi-n)^2+\eta^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\xi-n)^2+\eta^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\xi+n)^2+\eta^2}$$

Zważywszy, że dla dodatniego n

$$n-\xi > n-1 \quad , \quad n+\xi > n$$

znachodzimy

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{(x-n)^2}\right| < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2+\eta^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+\eta^2} < \frac{2}{\eta^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\eta^2}$$

$s_2(x)$ jest nieskończenie małe dla nieskończenie wielkiego η, gdyż da się to spostrzec w każdym pasie, na które podzielona została płaszczyzna. Tę samą własność posiada i funkcya $\frac{1}{\sin^2 x\pi}$, jak to daje się widzieć ze zrównania:

$$\frac{1}{\sin^2 x\pi} = \frac{4}{2-e^{2x\pi i}-e^{-2x\pi i}} = \frac{4}{2-e^{-2\eta\pi}e^{2\xi\pi i}-e^{2\eta\pi}e^{-2\xi\pi i}}$$

Obie funkcye $s_2(x)$ i $\frac{1}{\sin^2 x\pi}$ dla $x=0$, $x=1$ stają się nieskończenie wielkimi, pozostają jednakże skończonymi dla wartości pośrednich. Łatwo się przekonać, że różnica $\frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} - s_2(x)$ zawsze ma wartość skończoną. Rozwińmy $\frac{\pi}{\sin x\pi}$ na szereg $\frac{\pi}{\sin x\pi} = \frac{1}{x} + x\mathfrak{P}(x^2)$, skąd $\frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} = \frac{1}{x^2} + \mathfrak{P}(x^2)$

Funkcya $s_2(x)$ dla ξ, $0 \leqq |\xi| < 1$ daje się rozwinąć na szereg tegoż kształtu, w różnicy więc $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} - s_2(x)$ wyraz $\frac{1}{x^2}$ zniszczy się, a sama różnica pozostanie skończoną dla wszystkich wartości danego pasa, a więc i na całej płaszczyźnie. Tama zaś funkcya, która dla żadnej wartości na całej płaszczyzny nie staje się ∞ musi być ilością stałą. Nadto stała ta ma powinna być zerem, dla tego że przy $\eta = \infty$ obie funkcye stają się nieskończenie małymi. Stąd $\sum' g_n''(x) = 0$ i $s_2(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi}$.

Dalej $\sum' g_n'(x) = C$, i $s_1(x) + C = -\pi^2 \int \frac{dx}{\sin^2 x\pi} = \pi \operatorname{cotg} x\pi$

Stała C daje się łatwo ~~oznaczyć~~ wyznaczyć

$$s_1(-x) = -\frac{1}{x} - \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} \right)$$

Wyrazy sumy mają też same wartości, jeżeli się weźmie $-n$ zamiast n

$$s_1(-x) = -\frac{1}{x} - \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{n} \right) \quad \text{t. j.} \quad s_1(-x) = -s_1(x)$$

$s_1(x)$ jest funkcya nieparzysta. Przedtem mieliśmy

$$s_1(x) + C = \pi \operatorname{cotg} x\pi \text{ , więc}$$

$$-s_1(x) + C = -\pi \operatorname{cotg} x\pi \quad \text{t. j.} \quad C = 0.$$

Tak więc $s_1(x) = \pi \operatorname{cotg} x\pi$.

Ze równania $s_1(x) = \frac{s'(x)}{s(x)}$ znachodzimy $s(x) = \frac{1}{\pi} \sin \pi x$, więc $g_n(x) = \frac{x}{n}$

Stąd wzory powyższe ukażą się w kształtach:

$$\pi S(x) = \sin x\pi = x\pi \prod_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(1-\frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}}$$

$$S_1(x) = \pi \operatorname{cotg} x\pi = \frac{1}{x} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{n}\right)$$

$$S_2(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-n)^2}$$

Mimochodem ustanowimy tu wzór jeden, który nam się z czasem przyda.

$$\frac{\sin x\pi}{\pi} = x - \frac{1}{3!}x^3\pi^2 + \frac{1}{5!}x^5\pi^4 + \cdots$$

Stąd $\left(\frac{\pi}{\sin x\pi}\right)^2 = x^{-2}\left(1 - \frac{1}{6}x^2\pi^2 + \frac{1}{5!}x^4\pi^4 - \cdots\right)^{-2} = x^{-2} + \frac{1}{3}\pi^2 + \cdots$

Z powyższego wzoru wynika:

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} = x^{-2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \cdots$$

więc $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Przechodzimy teraz do utworzenia funkcyi $\sigma(u)$, która staje się zerem rzędu 1^{go} dla $u=0$, $u=w$, gdzie $w = 2\nu\omega + 2\nu'\omega'$, a ν i ν' są liczby całkowite dodatnie lub odjemne.

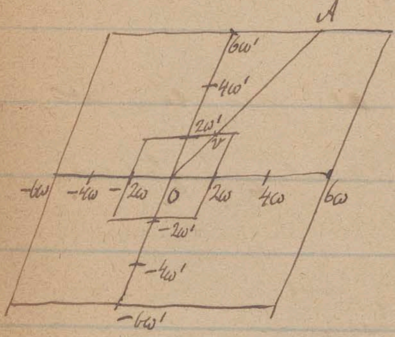
Funkcya $\sigma(u)$ ma kształt następujący:

$$\sigma(u) = u \prod_{w}{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{g_\lambda\left(\frac{u}{w}\right)}$$

gdzie znowu $g_\lambda\left(\frac{u}{w}\right)$ jest kształtu: $\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{u}{w}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{m_\lambda}\left(\frac{u}{w}\right)^{m_\lambda}$.

Można przyjąć, że wszystkie m_λ równe są m, jeżeli szereg

$\sum_w \left|\frac{1}{w}\right|^{m+1}$ będzie bezwarunkowo zbieżny. Dowiedźmy, że $m=2$



Ze środka spółrzędnych poprowadźmy dwie linie (proste), przechodzące przez punkty $\pm 2\omega, \pm 4\omega, \pm 6\omega, \ldots$ i przez punkty $\pm 2\omega', \pm 4\omega', \ldots$. Przez 4 punkty $\pm 2r\omega$ i $\pm 2r\omega'$ (r całkowite dodatnie) linie równoległe do tamtych dwóch. Cała płaszczyzna rozdzieli się w ten sposób na ~~prost~~ równoległoboki, otaczające punkt 0. Wyrazy szeregu $\sum \left(\frac{1}{w}\right)^{m+1}$ rozbijmy na grupy tak, żeby każda zawierała wszystkie w, odpowiadające tylko jednemu równoległobokowi (jedna jednemu, druga drugiemu itd). Wykreślmy równoległobok przez punkty $2\omega, 2\omega', -2\omega, -2\omega'$. Poprowadźmy z 0 linię 0A do jednego z punktów w, położonego na boku równoległoboku, odpowiadającego pewnemu r. Odcinek tej linii zawarty ~~zawarty~~ we wnętrzu równoległoboku nazwijmy przez v. Wtedy mamy $w = rv$ i $|w| = r|v|$, $\left(\frac{1}{w}\right)^{m+1} = \frac{1}{r^{m+1}}\left|\frac{1}{v}\right|^{m+1}$

We wnętrzu małego równoległoboku będzie pewne (v) najmniejsze, rozwijmy je przez v_0.

$$\left|\frac{1}{v}\right| < \frac{1}{v_0} \quad ; \left|\frac{1}{w}\right|^{m+1} \leqq \frac{1}{r^{m+1}}\left(\frac{1}{v_0}\right)^{m+1}$$

Na bokach więcnego równoległoboku ilość punktów w będzie: $4(2r+1)-4 = 8r$ i $\sum\left(\frac{1}{w}\right)^{m+1}$ rozciągnięte na te wszystkie $8r$ punktów będzie

$$\sum_r \left|\frac{1}{w}\right|^{m+1} \leqq \frac{8}{r^m}\left(\frac{1}{v_0}\right)^{m+1}$$

Więc suma cała

$$\sum_w \left|\frac{1}{w}\right|^{m+1} \leqq 8\left(\frac{1}{v_0}\right)^{m+1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^m}$$

Wiadomo, że $\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^m$ dla $m=2$ zbiega się bezwarunkowo

Będzie więc $\sigma(u)$ miała kształt następujący:

$$\sigma(u) = u\prod_w'\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2}$$

$$w = 2\nu\omega + 2\nu'\omega'$$

W tym wzorze nadajmy najpierw w wszystkie te wartości dla których $\nu'=0$. Będzie

$$\left(\sigma(u)\right)_{\nu'=0} = u\prod_\nu'\left(1-\frac{u}{2\nu\omega}\right)e^{\frac{u}{2\nu\omega}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\nu\omega}\right)^2}$$

Czynnik $\prod_\nu' e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\nu\omega}\right)^2}$ ma wartość skończoną, gdyż

$$\prod_\nu' e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\nu\omega}\right)^2} = e^{\frac{1}{8}\frac{u^2}{\omega^2}\sum_{-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\nu^2}} = e^{g\left(\frac{u}{2\omega}\right)^2}$$, a g jest skończone.

Stąd i drugi czynnik będzie skończony, można więc napisać:

$$(\sigma(u))_{v'=0} = e^{g\left(\frac{u}{2\omega}\right)^2} \text{ i } u\prod_{v}'\left(1-\frac{u}{2v\omega}\right)e^{\frac{u}{2v\omega}} = 2\omega\, e^{g\left(\frac{u}{2\omega}\right)^2} s\left(\frac{u}{2\omega}\right)$$

na mocy wzoru strony 31. $(\sigma(u))_{v'=0} = 2\omega\, e^{g\left(\frac{u}{2\omega}\right)^2} s\left(\frac{u}{2\omega}\right)$

Najpierw teraz wyznaczmy $\sigma(u)$ dla pewnego $v'(=)0$, potem przemnożywszy między sobą wszystkie te wyrażenia, nadając v' wszystkie wartości od $-\infty$ do $+\infty$ za wyjątkiem zera, otrzymamy ostateczny wyraz na $\sigma(u)$.

$$(\sigma(u))_{v'(=)0} = \prod_{w}'\left(1-\frac{u}{2v\omega+2v'\omega'}\right)e^{\frac{u}{2v\omega+2v'\omega'}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2v\omega+2v'\omega'}\right)^2} \quad (v'(=)0)$$

Drugi czynnik wyznaczy się osobno. Kreskę przy $\prod$ można odrzucić, gdyż $w(=)0$, dla wartości v' ~~nie = 0~~ nierównych 0.

$$\prod e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2v\omega+2v'\omega'}\right)^2} = e^{\frac{1}{2}\sum_{v'}\left(\frac{u}{2v\omega+2v\omega'}\right)^2} = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\omega}\right)^2\sum\left(\frac{1}{v+v'\frac{\omega'}{\omega}}\right)^2} = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\omega}\right)^2 s_2\left(\frac{v'\omega'}{\omega}\right)}$$

Dla wyrażenia czynnika pierwszego przez funkcye $s(x), s_1(x), s_2(x)\ldots$ potrzeba przekształcić formułę $\prod\left(1-\frac{u}{n+a}\right)e^{\frac{u}{n+a}}$

Z określenia funkcyi $s(x)$ wynika $s(u-a) = (u-a)\prod_{n}'\left(1-\frac{u-a}{n}\right)e^{\frac{u-a}{n}}$

Załóżmy $u=0$, a tymczasem pozostaje nieoznaczone

$$s(-a) = -a\prod_{n}'\left(1+\frac{a}{n}\right)e^{-\frac{a}{n}}$$

Dzieląc jedno przez drugie, otrzymujemy:

$$\frac{s(u-a)}{s(-a)} = \left(1-\frac{u}{a}\right)\prod_n{}'\left(1-\frac{u}{n+a}\right)e^{\frac{u}{n}}$$
$$= \left(1-\frac{u}{a}\right)\prod_n{}'\left(1-\frac{u}{n+a}\right)e^{\frac{u}{n+a} - u\left(\frac{1}{n+a}-\frac{1}{n}\right)}$$

Wieloczyn $\prod' e^{u\left(\frac{1}{-n-a}+\frac{1}{n}\right)}$ jest zbieżny. Istotnie z wyrażenia na $s_1(x)$, znajdziemy $s_1(-a) = -\frac{1}{a} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{-n-a}+\frac{1}{n}\right)$. Więc
$$\prod{}' e^{u\left(\frac{1}{-n-a}+\frac{1}{n}\right)} = e^{u\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{-n-a}+\frac{1}{n}\right)} = e^{\frac{u}{a}}e^{us_1(-a)}$$

Tu trzeba a założyć równem liczbie niecałkowitej, gdyż inaczej jeden z wyrazów stanie się nieskończonością i suma utraci znaczenie.

$$\frac{s(u-a)}{s(-a)} = e^{us_1(-a)}\left(1-\frac{u}{a}\right)\prod_n{}'\left(1-\frac{u}{n+a}\right)e^{\frac{u}{n+a}}\text{, albo}$$
$$\frac{s(u-a)}{s(-a)} = e^{us_1(-a)}\prod_n\left(1-\frac{u}{n+a}\right)e^{\frac{u}{n+a}}$$

Stąd, zważywszy parzystość $s(a)$ i nieparzystość $s_1(a)$, znajdziemy
$$\prod_n\left(1-\frac{u}{n+a}\right)e^{\frac{u}{n+a}} = e^{us_1(a)}\frac{s(a-u)}{s(a)}$$

Załóżmy $a=\frac{\nu'\omega'}{\omega}$, $u=\frac{u}{2\omega}$
$$\prod_\nu\left(1-\frac{u}{2\nu\omega+2\nu'\omega'}\right)e^{\frac{u}{2\nu\omega+2\nu'\omega'}} = \frac{s\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)}{s\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}\right)}e^{\frac{u}{2\omega}s_1\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}\right)}$$

Będzie więc dla pewnego $\nu'(=)0$
$$\left(\sigma(u)\right)_{\nu'(=)0} = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\omega}\right)^2 s_2\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}\right)}\frac{s\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)}{s\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}\right)}e^{\frac{u}{2\omega}s_1\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}\right)}$$

Tworząc z podobnych wszystkich wyrażeń wieloczyn i łącząc wyrazy mające ν' i $-\nu'$, otrzymamy

$$\prod_{\nu'=-\infty,\ \nu(=)0}^{\nu'=\infty}\{\sigma(u)\} = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\omega}\right)^2 \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' s_2\left(\frac{\nu\omega'}{\omega}\right)} \prod_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{s\left(\frac{\nu\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)}{s\left(\frac{\nu\omega'}{\omega}\right)}\cdot\frac{s\left(\frac{\nu\omega'}{\omega}+\frac{u}{2\omega}\right)}{s\left(\frac{\nu\omega'}{\omega}\right)}\right\}^{\times}, \text{ gdyż}$$

z powodu nieparzystości $s_1(x)$ jest $e^{\frac{u}{2\omega}s_1\left(\frac{\nu\omega'}{\omega}\right)+\frac{u}{2\omega}s_1\left(-\frac{\nu\omega'}{\omega}\right)} = e^0 = 1.$

Dla skrócenia oznaczmy $l = g + \sum_{n=1}^{\infty} s_2\left(\frac{n\omega'}{\omega}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} s_2\left(\frac{n\omega'}{\omega}\right)$

Korzystając z tożsamości $\sigma(u) = (\sigma(u))_{\nu'=0} \cdot \prod_{\nu'=-\infty} (\sigma(u))_{\nu'(=)0}$ otrzymamy wyrażenie na $\sigma(u)$, jakie następuje, tożsamościowe z poprzednim:

$$\sigma(u) = 2\omega e^{l\left(\frac{u}{2\omega}\right)^2} s\left(\frac{u}{2\omega}\right) \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{s\left(\frac{n\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)}{s\left(\frac{n\omega'}{\omega}\right)}\cdot\frac{s\left(\frac{n\omega'}{\omega}+\frac{u}{2\omega}\right)}{s\left(\frac{n\omega'}{\omega}\right)}\right\}$$

W rozumowaniu poprzedniem rozpatrywaliśmy funkcye $s(x)$, $s_1(x)$, $s_2(x)$ jako nieskończone wieloczyny i sumy, a nie korzystaliśmy z tego, że mogą się wyrażać te funkcye przez funkcye trygonometryczne.

Łatwo się przekonać, że $s(x)$ jest funkcyą okresową

$$s(x) = x\prod_{-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}.$$

Zbierzmy wszystkie wyrazy, w których n zmienia się od $-r$ do $+r$ i nazwijmy z nich wieloczyn przez $\pi(x, r)$

$$\pi(x,r) = (-1)^r\left(\frac{1}{r!}\right)^2 (x+r)(x+r-1)\ldots\ldots x(x-1)\ldots(x-r)$$

$$\pi(x+1,r) = (-1)^r\left(\frac{1}{r!}\right)^2 (x+r+1)(x+r)\ldots\ldots(x+1)x(x-1)\ldots\ldots(x-\overline{r-1})$$

Więc $\dfrac{\pi(x+1,r)}{\pi(x,r)} = \dfrac{x+r+1}{x-r}$

(× Połączenia nawiasem zamknięte nie mogą być rozłączone.

Przy wzrastającém nieograniczenie r dąży $\pi(x,r)$ do $s(x)$, więc

$$\frac{s(x+1)}{s(x)}=-1\,,\quad \frac{s(x+2)}{s(x)}=+1$$ t. j. $s(x)$ posiada okres 2, a

zmianą argumentu na 1, funkcya ta zmienia znak.

Zastąpmy we wzorze na $\sigma(u)$ u przez $u+2\omega$, będzie:

$$\sigma(u+2\omega)=-e^{\frac{l}{\omega}(u+\omega)}\sigma(u)\,,$$ albo:

$$\sigma(u+\omega)=-e^{\frac{l}{\omega}u}\sigma(u-\omega)$$

$\sigma(u)$, podobnie jak i $s(u)$ jest nieparzysta, więc:

$$\sigma(u+\omega)=e^{\frac{lu}{\omega}}\sigma(\omega-u)$$

Różniczkując względem u (logarytmowo):

$$\frac{\sigma'(u+\omega)}{\sigma(u+\omega)}=\frac{l}{\omega}-\frac{\sigma'(\omega-u)}{\sigma(\omega-u)}$$

Zakładając $u=0$, znachodzimy: $\dfrac{l}{2\omega}=\dfrac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}$.

Zaprowadźmy raz na zawsze znakowanie $\dfrac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}=\eta$. Wtedy:

$$(\alpha)\qquad \sigma(u+2\omega)=-e^{2\eta(u+\omega)}\sigma(u).$$

Ze wzoru na stronie 34 widzimy, że $\sigma(u)$ jest symetryczna względem ω i ω', więc oznaczywszy $\dfrac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')}=\eta'$ mieć będziemy:

$$(\beta)\qquad \sigma(u+2\omega')=-e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma(u)$$

Stałe $\omega, \omega', \eta, \eta'$ mają ze sobą pewien związek, którego znak-nie dla nas jest niezmiernie ważne.

Za pomocą wzorów (α) i (β) znachodzimy:

$$\sigma(u+2\omega+2\omega')=e^{2\eta(u+\omega+2\omega')+2\eta'(u+\omega')}\,\sigma(u)$$

$$\sigma(u+2\omega+2\omega')=e^{2\eta'(u+\omega'+2\omega)+2\eta(u+\omega)}\,\sigma(u)$$

Wykładniki u e powinne się różnić nie inaczej jak o pewną wielokrotną liczby $2\pi i$, więc

$$\eta\omega'-\eta'\omega=k\frac{\pi i}{2}$$

Dla wyznaczenia k radzimy sobie jak następuje. Wzór na $\sigma(u)$ (str. 47) różniczkujemy logarytmowo; funkcya s stanie się s_1.

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}=\frac{\eta u}{\omega}+\frac{1}{2\omega}s_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)+\frac{1}{2\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-s_1\left(\frac{n\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)+s_1\left(\frac{n\omega'}{\omega}+\frac{u}{2\omega}\right)\right\}$$

Mnożąc przez ω i zakładając $u=\omega'$, mamy:

$$\omega\eta'-\eta\omega'=\frac{1}{2}s_1\left(\frac{\omega'}{2\omega}\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-s_1\left(\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\right)+s_1\left(\frac{(2n+1)\omega'}{2\omega}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}s_1\left(\frac{\omega'}{2\omega}\right)-\frac{1}{2}s_1\left(\frac{\omega'}{2\omega}\right)+\frac{1}{2}s_1\left(\frac{3\omega'}{2\omega}\right)-\frac{1}{2}s_1\left(\frac{3\omega'}{2\omega}\right)+\frac{1}{2}s_1\left(\frac{5\omega'}{2\omega}\right)-\dots$$

Stąd $\omega\eta'-\eta\omega'=\lim\limits_{n=\infty}\frac{1}{2}s_1\left(\frac{(2n+1)\omega'}{2\omega}\right)=\frac{\pi}{2}\lim\cot g\frac{(2n+1)\omega'\pi}{2\omega}$

Lecz wiadomo, że $\cot g(\alpha+\beta i)=\mp i$ dla $\beta=\pm\infty$ i jakiegokolwiek α. $\frac{\omega'}{\omega}$ — urojone, $\frac{2n+1}{2}$ — dodatnie, znak β zależy od znaku urojonej spółrzędnej wielkości $\frac{\omega'}{\omega}$

$$\omega\eta' - \eta\omega' = \mp \frac{\pi i}{2} \quad \text{albo} \quad \eta\omega' - \omega\eta' = \pm \frac{\pi i}{2} \quad \text{t. j.} \quad \kappa = \pm 1.$$

Bierzemy tu + albo − stósownie do tego będzie li urojona spółrzędna wielkości $\frac{\omega'}{\omega}$ (albo rzeczywista $-\frac{\omega'}{\omega i}$) dodatnia, czy odjemna.

We wzorze na $\sigma(u)$ można funkcye s zastąpić przez wyrażenia trygonometryczne:

str. Hanna 54.

$$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi} e^{l\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \sin\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\left(\frac{n\omega'}{\omega} - \frac{u}{2\omega}\right)\pi\right) \sin\left(\left(\frac{n\omega'}{\omega} + \frac{u}{2\omega}\right)\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{n\omega'}{\omega}\pi\right)}$$

$$l = \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{n\omega'\pi}{2\omega}\right)} = \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{n\omega'\pi}{2\omega}\right)}$$

Za pomocą wzoru $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$ otrzymamy:

tutaj l jest równe $\frac{l}{\pi^2}$

$$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi} e^{l\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \sin\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right) \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)}{\sin^2\left(\frac{n\omega'\pi}{\omega}\right)}\right).$$

Dla $\omega' = \infty$

$\sin\left(\frac{n\omega'\pi}{\omega}\right)$ i $\sin\left(\frac{n\omega'\pi}{2\omega}\right)$ stają się ∞, gdyż wielkość $\frac{\omega'}{\omega}$ jest urojona; l staje się $\frac{1}{6}$, a $\prod$ jednością.

$$\left(\sigma(u)\right)_{\omega'=\infty} = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \sin\frac{u\pi}{2\omega}$$

Podobnież dla $\omega = \infty$. Funkcya $\sigma(u)$ staje się funkcyą trygonometryczną, skoro tylko jeden z okresów ~~przybiera~~ ma wartość nieskończoną. W wypadku kiedy obydwa okresy $=\infty$, będzie $\sigma(u) = u$.

We wzorach dla $\sigma(u)$ mogą ω i ω' być zastąpione przez inne wielkości.

$$\sigma(u) = u\prod{}'\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2}, \quad w = 2\nu\omega + 2\nu'\omega'$$

Zamiast ν i ν' wprowadźmy nowe ilości μ i μ', związane z poprzednimi przez równania $\nu = \alpha\mu + \beta\mu'$, $\nu' = \alpha'\mu + \beta'\mu'$, gdzie $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ liczby całkowite, czyniące zadość zrówn. $\alpha\beta' - \alpha'\beta = \pm 1$.

$$w = 2\mu(\alpha\omega + \alpha'\omega') + 2\mu'(\beta\omega + \beta'\omega') = 2\mu\varpi + 2\mu'\varpi'$$

Funkcya $\sigma(u)$ jednakowoż pod zmienionym kształtem zatrzyma swoją wartość

$$\varpi = \alpha\omega + \alpha'\omega'$$

$$\varpi' = \beta\omega + \beta'\omega'$$

Ponieważ wyznacznik $\alpha\beta' - \alpha'\beta = \pm 1$, to ω i ω' dadzą się całkowicie wyrazić przez ϖ i ϖ'. Wszystkie wzory zachowają się

$$\sigma(u+2\varpi) = -e^{2\bar{\eta}(u+\varpi)}\sigma(u), \text{ gdzie } \bar{\eta} = \frac{\sigma'(\varpi)}{\sigma(\varpi)}.$$

Zrównania powyższe istnieją dla każdej pary całkowitych liczb α i α' nie posiadających czynnika wspólnego, gdyż pod takim warunkiem można zawsze znaleść β i β', czyniące zadość zr. $\alpha\beta' - \alpha'\beta = \pm 1$.

Wzór poprzedni można podać pod kształtem:

$$e^{-\frac{\eta}{2\omega}(u+2\bar{\omega})^2}\sigma(u+2\bar{\omega}) = -e^{-\frac{\eta}{2\bar{\omega}}u^2}\sigma(u).$$

Dla skrócenia oznaczmy lewą stronę przez $\psi(u)$. Będzie:

$$\psi(u) = -\psi(u+2\bar{\omega}),\ \psi(u) = \psi(u+4\bar{\omega}), \dots \psi(u) = (-1)^r\psi(u+2r\bar{\omega});\ \text{zatem}$$

$$(-1)^r e^{-\frac{\bar{\eta}}{2\bar{\omega}}(u+2r\bar{\omega})^2}\sigma(u+2r\bar{\omega}) = e^{-\frac{\bar{\eta}}{2\bar{\omega}}u^2}\sigma(u),\ \text{albo:}$$

$$\sigma(u+2r\bar{\omega}) = (-1)^r e^{2r\bar{\eta}(u+r\bar{\omega})}\sigma(u).$$

Zamiast $r\bar{\omega}$ i $r\bar{\eta}$ napiszmy $\bar{\omega}$ i $\bar{\eta}$

$$\sigma(u+2\bar{\omega}) = (-1)^r e^{2\bar{\eta}(u+\bar{\omega})}\sigma(u);\quad \bar{\omega} = \mu\omega + \mu'\omega'$$

r jest najw. wsp. dzielnikiem liczb μ i μ'.

Na str. 31 była utworzona funkcja

$$\varphi(u) = \frac{\sigma^{\lambda_1}(u-a_1)\sigma^{\lambda_2}(u-a_2)\cdots\cdots\sigma^{\lambda_r}(u-a_r)}{\sigma^{\mu_1}(u-b_1)\sigma^{\mu_2}(u-b_2)\cdots\cdots\sigma^{\mu_s}(u-b_s)}e^{g(u)}$$

Mamy teraz do zbadania pod jakim warunkiem ta funkcja będzie typem funkcyi dwuokresowej.

Korzystając, że $\sigma^{\lambda_k}(u+2\omega-a_k)=(-1)^{\lambda_k}e^{2\lambda_k\eta(u-a_k+\omega)}\sigma^{\lambda_k}(u-a_k)$, znachodzimy: $\varphi(u+2\omega)=(-1)^{\lambda-\mu}e^{2\eta(u+\omega)(\lambda-\mu)-2\eta(\sum\lambda_k a_k-\sum\mu_i b_i)+g(u+2\omega)-g(u)}\varphi(u)$,

gdzie $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_r=\lambda$, $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_s=\mu$

Ażeby $\varphi(u)$ posiadała okres, ~~potrzeba żeby~~ musi być:

$$g(u+2\omega)-g(u)=2\eta(\Delta-(\lambda-\mu)(u+\omega))+\kappa\pi i$$

gdzie κ parzyste lub nieparzyste stosownie do parzystości lub nieparzystości liczby $\lambda-\mu$.

$$\Delta=\sum\lambda_k a_k-\sum\mu_i b_i$$

$2\omega'$ ma też służyć okresem funkcyi, więc:

$$g(u+2\omega')-g(u)=2\eta'(\Delta-(\lambda-\mu)(u+\omega'))+\kappa'\pi i$$

Tutaj κ i κ' są stałe; jeżeli wszystkie wyrazy zawierające u przenieść w lewą stronę, to utworzona w ten sposób jednowartościowa funkcya u zmienia się w sposób ciągły. Prawa zaś strona zrównania może zmieniać się tylko skokami, gdyż κ i κ' są liczby całkowite. Stądto κ i κ' są stałe względem u.

Różniczkując dwukrotnie zrównanie powyższe, mamy:

$$g''(u+2\omega)-g''(u)=0$$

$$g''(u+2\omega')-g''(u)=0$$

$g''(u)$ ~~musi~~ powinna być funkcyą dwuokresową, a dla tego we wnętrzu równoległoboku okresu powinna mieć coś. Tego zaś być tutaj niemoże, gdyż $g(u)$, więc i $g''(u)$ są to szeregi stale zbieżne, nie przybierające nigdy wartości nieskończonych, dopóki u pozostaje skończonem. Stąd wniosek, że $g''(u)$ musi być ilością stałą.

$$g(u)=\alpha u^2+2\beta u+\gamma\ ,\ \text{skąd}$$

$$g(u+2\omega)-g(u)=4\alpha\omega(u+\omega)+4\beta\omega$$

$$g(u+2\omega')-g(u)=4\alpha\omega'(u+\omega')+4\beta\omega'$$

Porównajmy te różnice z powyższymi. Równając współczynniki przy $u+\omega$ i $u+\omega'$, znajdziemy:

$$2\alpha\omega+(\lambda-\mu)\eta=0$$

$$2\alpha\omega'+(\lambda-\mu)\eta'=0$$

Stąd $(\lambda-\mu)(\eta\omega'-\eta'\omega)=0$. Widzieliśmy poprzednio, że drugi czynnik nie jest zerem, jest więc $\lambda=\mu$, κ – parzyste $i=2\kappa$, $\alpha=0$.

Musi więc ilość zer równać się ilości nieskończoności (nie kongruentnych między sobą), jeżeli ma być $\varphi(u)$ funkcyą dwuokresową.
Oprócz tego powinno być

$$g(u) = 2\beta u + \gamma$$

$$g(u+2\omega) = g(u) + 4\beta\omega$$

Z pomocą tych zaś znachodzimy:

$$4\beta\omega = 2\eta\Delta + 2\kappa\pi i \qquad \eta\Delta - 2\beta\omega = -\kappa\pi i$$

$$4\beta\omega' = 2\eta'\Delta + 2\kappa'\pi i \qquad \eta'\Delta - 2\beta\omega' = -\kappa'\pi i$$

Stąd na podstawie $\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{\pi i}{2}$, otrzymujemy:

$$\Delta = 2\kappa'\omega - 2\kappa\omega' = 2\bar{\omega}$$

$$2\beta = 2\kappa'\eta - 2\kappa\eta' = 2\bar{\eta}, \text{ więc}$$

$$g(u) = 2\bar{\eta}u + \gamma \quad ; \quad \sum \lambda_k a_k - \sum \mu_k b_k = 2\bar{\omega}$$

Każdy punkt a, b wewnątrz równoległoboku okresu może być zastąpiony przez punkt jakikolwiek z nim kongruentny. Przytem wszystkie wzory powyższe zachowują się, a punkt a i b można tak wybrać, żeby $\sum \lambda_k a_k - \sum \mu_i b_i = 0$.

W takim razie $\kappa = 0$, $\kappa' = 0$, $\bar{\eta} = 0$, $\bar{\omega} = 0$. Typ ogólny dwuokresowej funkcyi będzie zatem:

$$\varphi(u) = C\,\frac{\sigma^{\lambda_1}(u-a_1)\,\sigma^{\lambda_2}(u-a_2)\ldots\ldots\sigma^{\lambda_r}(u-a_r)}{\sigma^{\mu_1}(u-b_1)\,\sigma^{\mu_2}(u-b_2)\ldots\ldots\sigma^{\mu_s}(u-b_s)}, \text{ gdzie:}$$

$$\sum_{k=1}^{r}\lambda_k - \sum_{i=1}^{s}\mu_s = 0 \quad i \quad \sum_{k=1}^{r}\lambda_k a_k - \sum_{i=1}^{s}\mu_s b_s = 0.$$

Łatwo się przekonać że przy takich warunkach rzeczywiście $\varphi(u+2\omega) = \varphi(u)$; $\varphi(u+2\omega') = \varphi(u)$.

Jeżeli liczba niekongruentnych zer ~~jest~~ λ, to $\varphi(u)$ nazywa się dwuokresowa rzędu λ.

Nie masz ~~fun~~ wcale funkcyi dwuokresowych rzędu pierwszego, gdyż w razie przeciwnym musiało by być $a=b$, a

$$\varphi(u) = C\,\frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u-b)} = C.$$

Najprostsza więc funkcya dwuokresowa ma rząd 2.

Mamy dowieść teraz, że w przypadku ~~jednego miejsca~~, gdy jeden okres naprz. $\omega' = \infty$, otrzymuje się funkcya zwyczajną jednookresową, posiadającą twierdzenie dodawania.

Następnie dowiedziemy, że wszystkie funkcye dwuokresowe posiadają twierdzenie dodawania.

Kiedy ω' staje się $\infty^{i\alpha}$, mogą a i b pozostać bez zmiany; $\Sigma a = \Sigma b$, gdzie każde a i każde b powtarza się należytą ilość razy. Niech będzie u_0 taka wartość, dla której funkcya nie $= 0, \infty$.

$$\frac{\varphi(u)}{\varphi(u_0)} = \frac{\prod \sigma(u-a_\mu)\sigma(u_0-b_\mu)}{\prod \sigma(u_0-a_\mu)\sigma(u-b_\mu)}$$

Widzieliśmy (str. 50), że $\left(\sigma(u)\right)_{\omega'=\infty} = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \sin\frac{u\pi}{2\omega}$

$$\left(\frac{\varphi(u)}{\varphi(u_0)}\right)_{\omega'=\infty} = \frac{e^{\frac{\pi^2}{24\omega^2}\sum\left[(u-a_\mu)^2+(u_0-b_\mu)^2\right]}}{e^{\frac{\pi^2}{24\omega^2}\sum\left[(u_0-a_\mu)^2+(u-b_\mu)^2\right]}} \prod_\mu \frac{\sin\frac{(u-a_\mu)\pi}{2\omega}\sin\frac{(u_0-b_\mu)\pi}{2\omega}}{\sin\frac{(u_0-a_\mu)\pi}{2\omega}\sin\frac{(u-b_\mu)\pi}{2\omega}}$$

$$\sum\left\{(u-a_\mu)^2+(u_0-b_\mu)^2-(u_0-a_\mu)^2-(u_0-b_\mu)^2\right\} = 2\sum(u_0-u)(a_\mu-b_\mu)$$
$$= 2(u_0-u)\sum(a_\mu-b_\mu) = 0. \quad \text{Więc:}$$

A) $$\left(\frac{\varphi(u)}{\varphi(u_0)}\right)_{\omega'=\infty} = \prod_\mu \frac{\sin\frac{(u-a_\mu)\pi}{2\omega}\sin\frac{(u_0-b_\mu)\pi}{2\omega}}{\sin\frac{(u_0-a_\mu)\pi}{2\omega}\cdot\sin\frac{(u-b_\mu)\pi}{2\omega}}$$

Mamy uprzytomnić sobie, czy wszystkie funkcye okresowe, posiadające twierdzenie dodawania sprowadzają się do kształtu powyższego. Niech $x = e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$. Widzieliśmy, że takie funkcye okresowe są to funkcye wymierne wielkości x. Nazwijmy funkcyą taką przez $f(u)$

$$f(u) = x^k \frac{\pi(x-g_\lambda)}{\pi(x-h_\mu)}$$, gdzie $g_\lambda (=) 0$, $h_\mu (=) 0$. Inaczej.

$$f(u) = e^{k\frac{u\pi i}{\omega}} \frac{\prod_1^r (e^{\frac{u\pi i}{\omega}} - g_\lambda)}{\prod_1^s (e^{\frac{u\pi i}{\omega}} - h_\mu)}$$

Zaprowadźmy znakowanie

$$g_\lambda = e^{\frac{a_\lambda \pi i}{\omega}}, \quad h_\mu = e^{\frac{b_\mu \pi i}{\omega}}$$

Po nieznacznych przekształceniach otrzymujemy wzór ogólny funkcyi okresowej, posiadającej twierdzenie dodawania

$$(B) \qquad f(u) = Ce^{(2k+r-s)\frac{u\pi i}{2\omega}} \frac{\prod_\lambda \sin\frac{(u-a_\lambda)\pi}{2\omega}}{\prod_\mu \sin\frac{(u-b_\mu)\pi}{2\omega}}$$

Wzór A) daje się łatwo sprowadzić na wzór B) jak następuje. Równoległobok okresu dla $\omega' = \infty$ staje się pasem nieskończonym. Przytem niektóre a, b można przesunąć w ∞. Każdą z tych wartości można napisać:

$$a = 2\xi\omega + 2\xi'\omega', \text{ albo } \frac{a}{2\omega} = \xi + \xi'\frac{\omega'}{\omega}$$

Spółrzędna urojona $\frac{\omega'}{\omega}$ nie $= 0$, $\frac{a}{2\omega}$ może stać się nieskończonem tylko tem, że jej urojona spółrzędna stanie się $\infty \frac{\omega'}{\omega} i$

Jeśli $a = \alpha + \beta i$, to dla $\omega' = \infty$, powinno być $\beta = \infty$. We wzorze

A, mianowicie w $r-r'$ czynnikach tegoż zrobimy przekształcenie:
$$\frac{\sin\frac{(u-a_\mu)\pi}{2\omega}}{\sin\frac{(u_0-a_\mu)\pi}{2\omega}} = \frac{e^{\frac{(u-a_\mu)\pi i}{2\omega}} - e^{-\frac{(u-a_\mu)\pi i}{2\omega}}}{e^{\frac{(u_0-a_\mu)\pi i}{2\omega}} - e^{-\frac{(u_0-a_\mu)\pi i}{2\omega}}}$$

Kiedy a_μ stanie się nieskończonością w sposób opisany, wyrażenie powyższe staje się równem $e^{\pm\frac{u-u_0}{2\omega}\pi i}$, gdzie + będzie, jeżeli urojona spółcz. a_μ będzie >0, a − kiedy <0. Tegoż dokonamy na $r-r''$ czynnikach z b_μ.

Ostatecznie będzie:
$$\left(\frac{\varphi(u)}{\varphi(u_0)}\right)_{\omega'=\infty} = e^{\frac{(u-u_0)(m'-m'')\pi i}{2\omega}} \frac{\prod_1^{r'} \sin\frac{(u-a_\mu)\pi}{2\omega} \cdot \prod_1^{r''} \sin\frac{(u_0-b_\nu)\pi}{2\omega}}{\prod_1^{r'} \sin\frac{(u_0-a_\mu)\pi}{2\omega} \cdot \prod_1^{r''} \sin\frac{(u-b_\nu)\pi}{2\omega}}$$
gdzie $m' \equiv (r-r') \pmod 2$; $m'' \equiv (r-r'') \pmod 2$.

W kształcie (B) można określić stałą C dając u wartość u_0, dla której $f(u)$ nie jest ani 0, ani ∞.
$$\frac{f(u)}{f(u_0)} = e^{\frac{l(u-u_0)\pi i}{2\omega}} \frac{\prod_1^{\lambda} \sin\frac{(u-a_\lambda)\pi}{2\omega} \cdot \prod_1^{\mu} \sin\frac{(u_0-b_\mu)\pi}{2\omega}}{\prod_1^{\lambda} \sin\frac{(u_0-a_\lambda)\pi}{2\omega} \cdot \prod_1^{\mu} \sin\frac{(u-b_\mu)\pi}{2\omega}}$$

Wzór to tegoż kształtu co i poprzedni. Założywszy $\omega=\infty$, otrzymamy wymierną funkcyę u. Tak więc funkcye okresowe, posiadające twierdzenie dodawania i wymierne funkcye stanowią wypadek szczególny funkcyj dwuokresowych.

Najprostsze funkcye dwuokresowe posiadają dwa zera i dwie nieskończoności (naturalnie mówimy tu o niekongruentnych), są one zatem kształtu

$$\varphi(u) = C\frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)}{\sigma(u-b_1)\sigma(u-b_2)}, \text{ gdzie } a_1+a_2 = b_1+b_2$$

$\omega, \omega', a_1, a_2, b_1, b_2$ są to stałe, 5 z pomiędzy nich mają wartości niezależne. Punkta nieskończone można zsunąć w jeden punkt b, tak że będzie:

$$\varphi(u) = C\frac{\sigma(u-a).\sigma(u-2b+a)}{\sigma^2(u-b)}$$

Można założyć $b=0$

$$\varphi(u) = C\frac{\sigma(u-a)\sigma(u+a)}{\sigma^2(u)}$$

Dla $u=0$, $\sigma(u)$ staje się zerem rzędu pierwszego, więc się rozwija na szereg $\sigma(u) = u\mathfrak{P}(u)$

gdzie wyraz stały szeregu $\mathfrak{P}(u)$ nie jest zerem.; więc

$$\sigma^2(u) = u^2\mathfrak{P}_1(u)$$

Wtedy: $\sigma(u-a) = (u-a)\mathfrak{P}(u-a) = -a\mathfrak{P}(-a) + u\overline{\mathfrak{P}}(u)$, albo

$\sigma(u-a) = \sigma(-a) + u\overline{\mathfrak{P}}(u)$, a dla nieparzystości $\sigma(u)$

$$\sigma(u-a) = -\sigma(a) + u\overline{\mathfrak{P}}(u)$$

$$\sigma(u+a)=\sigma(a)+u\overline{P}(u)$$

Rozwijając $\varphi(u)$ na szereg, otrzymujemy

$$\varphi(u)=-C\frac{\sigma^2(a)}{u^2}+\cdots$$

Stałą C wybierzemy tak, żeby spółczynnik przy $u^{-\frac{1}{2}}$ równał się 1. Zamiast a napiszemy v

$$\varphi(u)=\frac{\sigma(v-u)\,\sigma(v+u)}{\sigma^2(u).\,\sigma^2(v)}=\frac{1}{u^2}+c_0+c_1u^2+\cdots$$

$\varphi(u)$ jest funkcya parzysta, dlatego też wyrazy o nieparzystych wykładnikach u nie mogą figurować w szeregu. Stałe tutaj zależą od trzech wielkości ω, ω' i v. Na tej funkcji zatrzymamy się nieco dłużej. Mieliśmy poprzednio

$$\sigma(u)=u\prod{}'\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2}$$

Stąd $$\frac{d\log\sigma(u)}{du}=\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}=\frac{1}{u}+\sum{}'\left(\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right)$$

$$-\frac{d^2\log\sigma(u)}{du^2}=u^{-2}+\sum{}'\left\{\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right\}$$

Tę funkcyę będziemy zawsze oznaczali przez $\wp$, więc

$$\wp(u)=-\frac{d^2\log\sigma(u)}{du^2}=\frac{1}{u^2}+\sum{}'\left\{\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right\}$$

Stąd: $-\wp'(u)=\dfrac{d^3\log\sigma(u)}{du^3}=\dfrac{2}{u^3}+\sum{}'\dfrac{2}{(u-w)^3}$ czyli: $-\wp'(u)=2\sum\dfrac{1}{(u-w)^3}$

Stąd zaś wynika

$$\wp'(u+2\omega) = \wp'(u)$$

$$\wp'(u+2\omega') = \wp'(u) \quad \text{, więc}$$

$$\wp(u+2\omega) = \wp(u) + C$$

~~℘~~ Załóżmy $u=-\omega$, do czego jesteśmy uprawnieni, bo $\wp$, jak widać z określenia ma znaczenie dla każdej wartości.

$$\wp(\omega) = \wp(-\omega) + C$$

Lecz $\wp(u)$ jest parzysta, $\wp(\omega)=\wp(-\omega)$, więc $C=0$ t.j

$$\wp(u+2\omega) = \wp(u)$$

$$\wp(u+2\omega') = \wp(u)$$

t.j $\wp$ jest funkcya dwuokresowa. Ona zależy li tylko od dwóch stałych ω i ω'.

O okresowości łatwo jest dowieść wprost z określenia funkcyi $\wp(u)$. Istotnie

$$\wp(u)-\wp(v) = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{v^2} + \sum{}' \left\{ \frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{(v-w)^2} \right\} \text{; } v \text{ nie jest okres.}$$

~~Zm~~ Zmieńmy w $\underline{w}$ ν na $\nu-1$, lub inaczej zwiększmy $\underline{u}$ i $\underline{v}$ na 2ω; strona prawa pozostanie bez zmiany jak to wynika ze zrównania

$$\wp(u)-\wp(v)=\sum\left(\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{(v-w)^2}\right),\text{ więc } \wp(u)-\wp(v)=\wp(u+2\omega)-\wp(v+2\omega)$$

albo $\wp(u+2\omega)-\wp(u)=\wp(v+2\omega)-\wp(v)$, a więc $\wp(u+2\omega)-\wp(u)=C$

Przyszliśmy znów do zrównania, z którego co tylko wywnioskowaliśmy dwuokresowość $\wp(u)$. Ta funkcya staje się nieskończoną (rzędu 2^{go}) tylko raz jeden w równoległoboku okresu mianowicie dla $u=0$, jak o tem wnosimy z określenia $\wp(u)$. Tożsamo da się powiedzieć i o funkcyi $\wp(u)-\wp(v)$; ta zresztą staje się nadto zerem dla $u=v$; jako dwuokresowa powinna ona stawać się zerem raz jeszcze dla $u=-v$ na podstawie zrównania $\sum\alpha_k a_s=\sum\mu_i b_i$ (str. 56.). Otóż tedy:

$$\wp(u)-\wp(v)=C\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)}$$

Rozwijając obie strony na szeregi, otrzymujemy $C=-\frac{1}{\sigma^2 v}$

więc $$\wp(u)-\wp(v)=\frac{\sigma(u-v)\,\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(v)}$$

Funkcya $\wp(u)-\wp(v)$ jest jednakowa z funkcyą $\varphi(u)$ (str. 60)

Wzór powyższy można napisać jeszcze tak

$$\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(v)}=\begin{vmatrix}1 & \wp(u)\\ 1 & \wp(v)\end{vmatrix}$$

Z wyznacznika widać, że funkcya ta staje się $\infty^{\text{ią}}$ tylko dla $\wp(u)=\infty$, a zerem dla $\wp(u)=\wp(v)$.

Wzór powyższy łatwo daje się uogólnić. Weźmy funkcyę

$$\varphi(u,v,w)=\frac{\sigma(u+v+w)\cdot\sigma(u-v)\sigma(u-w)\sigma(v-w)}{\sigma^3(u)\cdot\sigma^3(v)\cdot\sigma^3(w)}$$

Jestto funkcya znakozmienna symmetryczna ilości u, v, w. Nadto jest ona dwuokresowa, gdyż dla $u=0$ staje się $\infty^{\text{ią}}$ rzędu 3^{go}, a w punktach $u=v$, $u=w$, $u=-(v+w)$ staje się zerem; nadto suma tych wartości $=0$. Jestto więc funkcya dwuokresowa rzędu 3^{go}. Rozwijając ją na szereg dla małych wartości u, otrzymamy

$$\varphi(u,v,w)=u^{-3}\frac{\sigma(v+w)\sigma(v-w)}{\sigma^2(v)\sigma^2(w)}+\dots=u^{-3}(\wp(w)-\wp(v))+\dots$$

Rozpatrzmy teraz wyznacznik

$$-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & \wp(u) & \wp'(u)\\ 1 & \wp(v) & \wp'(v)\\ 1 & \wp(w) & \wp'(w)\end{vmatrix}$$

Naprzód jestto funkcya dwuokresowa zmiennej u, gdyż $\wp(u)$ i $\wp'(u)$ są tego rodzaju; dla $u=0$ staje się ona $\infty^{\text{ią}}$

~~rzech~~ trzykrotnie, jak $\wp'(u)$. Jestto więc funkcya dwuokresowa 3^{go} rzędu o jednym nieskończonym punkcie $u=0$. Wyznacznik staje się zerem, kiedy ma dwie linie jednakowe; będzie to miało miejsce dla $u=v$, $u=w$. Nadto będzie on zero i dla $u=-(v+w)$, gdyż jestto funkcya dwuokresowa (sic)
Wyznacznik nasz posiada też same zera i nieskończoności, co i $\varphi(u,v,w)$. W rozwinięciu na szereg zaczyna się on od tegoż samego, co i φ wyrazu. Napiszmy go tak:

$$-\frac{1}{2}u^{-3}\begin{vmatrix} u^3 & u^3\wp(u) & u^3\wp'(u) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \\ 1 & \wp(w) & \wp'(w) \end{vmatrix}.$$

W tym wyznaczniku wyraz niezależny od u otrzyma się z

$$u^3\wp'(u)\begin{vmatrix} 1 & \wp(v) \\ 1 & \wp(w) \end{vmatrix}$$

Rozwinięcie $\wp'(u)$ zaczyna się od wyrazu: $-2u^{-3}$, będzie wyraz szukany:

$$-2\begin{vmatrix} 1 & \wp(v) \\ 1 & \wp(w) \end{vmatrix}$$

Dla tego wyznacznik nasz zaczyna się od wyrazu

$$u^{-3}\begin{vmatrix} 1 & \wp(v) \\ 1 & \wp(w) \end{vmatrix} \quad \text{t.j.} \quad u^{-3}\big(\wp(w)-\wp(v)\big)$$

Stąd wnosimy o tożsamości pomiędzy σ a wyznacznikiem t.j

$$\frac{\sigma(u+v+w)\sigma(u-v)\sigma(u-w)\sigma(v-w)}{\sigma^3(u)\sigma^3(v)\sigma^3(w)} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & \wp(u) & \wp'(u) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \\ 1 & \wp(w) & \wp'(w) \end{vmatrix}$$

Zwróćmy się teraz do funkcji dwuokresowej $\wp'(u)$, posiadającej trzykrotną ∞ $u=0$. Niech będzie $2\bar{\omega}$ jakibądź z okresów funkcji $\wp(u)$.

$$\wp(u+2\bar{\omega}) = \wp(u) \quad , \text{ stąd}$$

$$\wp'(u+2\bar{\omega}) = \wp'(u)$$

$$\wp'(u+\bar{\omega}) = \wp'(u-\bar{\omega})$$

$\wp(u)$ jest parzysta, więc $\wp'(u)$ - nieparzysta.

$$\wp'(u+\bar{\omega}) = -\wp'(\bar{\omega}-u)$$

Zakładamy $u=0$

$$\wp'(\bar{\omega}) = -\wp'(\bar{\omega}) \quad \text{t.j} \quad \wp'(\bar{\omega}) = 0 \text{ albo } \infty.$$

Lecz $\wp'(u)$, jak to widać z rozwinięcia na szereg, staje się $\infty^{ią}$ tylko dla $u =$ okresowi t.j $u=2\omega$ lub $u=2\omega'$.

Więc $\quad \wp'(\omega)=0 \ , \ \wp'(\omega')=0.$

Jako dwuokresowa musi $\wp'(u)$ stawać się zerem i dla $u=-(\omega+\omega')$
Przeto będziemy mieli

$$\wp'(u) = C\,\frac{\sigma(u+\omega+\omega')\,\sigma(u-\omega)\,\sigma(u-\omega')}{\sigma^3(u)}$$

Rozwińmy pierwszą stronę na szereg i porównajmy spółczyn. pierwszego wyrazu z otrzymanym przy rozwinięciu $\wp'(u)$. Znajdziemy:

$$C = -\frac{2}{\sigma(\omega)\sigma(\omega')\sigma(\omega+\omega')}\ ,$$ Więc:

$$\wp'(u) = -\frac{2\sigma(u+\omega+\omega')\,\sigma(u-\omega)\,\sigma(u-\omega')}{\sigma^3(u)\,\sigma(\omega)\,\sigma(\omega')\,\sigma(\omega+\omega')}$$ Zmiana u na $-u$ daje:

$$-\wp'(u) = \frac{2\sigma(\omega+\omega'-u)\,\sigma(u+\omega)\,\sigma(u+\omega')}{\sigma^3(u)\,\sigma(\omega)\,\sigma(\omega')\,\sigma(\omega+\omega')}$$

Mnożąc, mamy:

$$[\wp'(u)]^2 = 4\,\frac{\sigma(\omega+\omega'+u)\,\sigma(\omega+\omega'-u)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(\omega+\omega')}\cdot\frac{\sigma(\omega+u)\sigma(\omega-u)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(\omega)}\cdot\frac{\sigma(\omega'+u)\,\sigma(\omega'-u)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(\omega')}$$

albo

$$[\wp'(u)]^2 = 4\big(\wp(u)-\wp(\omega+\omega')\big)\big(\wp(u)-\wp(\omega)\big)\big(\wp(u)-\wp(\omega')\big)$$

Wprowadzamy znakowanie $\wp(\omega)=e_1$, $\wp(\omega+\omega')=e_2$, $\wp(\omega')=e_3$

Wtedy $$\{\wp'(u)\}^2 = 4(\wp(u)-e_1)(\wp(u)-e_2)(\wp(u)-e_3)$$

Tak więc $\{\wp'(u)\}^2$ wyraża się wymiernie przez $\wp(u)$. Wykonując mnożenia, otrzymujemy:

$$\{\wp'(u)\}^2 = 4\wp^3(u) - g_1\wp^2(u) - g_2\wp(u) - g_3$$

Można dowieść, że g_1 b. i $e_1+e_2+e_3=0$.

$$\wp(u) = u^{-2} + \sum{}'\left(\frac{1}{(w-u)^2} - \frac{1}{w^2}\right)$$

Dla wartości u z modułem mniejszym w, mamy:

$$\frac{1}{(w-u)^2} = \frac{1}{w^2} + \frac{2u}{w^3} + \frac{3u^2}{w^4} + \cdots$$

$$\sum{}'\left(\frac{1}{(w-u)^2} - \frac{1}{w^2}\right) = \sum{}'\left(\frac{2u}{w^3} + \frac{3u^2}{w^4} + \cdots\right)$$

Można tu szeregować według u, albowiem $\sum' w^{-\lambda}$ dla $\lambda \geqq 3$ jest zbieżna bezwarunkowo (str 43, 44)

$$\sum{}'\left\{\frac{1}{(w-u)^2} - \frac{1}{w^2}\right\} = 2u\sum{}'\frac{1}{w^3} + 3u^2\sum{}'\frac{1}{w^4} + 4u^3\sum{}'\frac{1}{w^5} + \cdots$$

Spółczynniki potęg nieparzystych będą zera, ~~al~~ gdyż każdy element sumy ma swój odpowiedni z odwrotnym znakiem

Oznaczmy $\sum' w^{-2k}$ przez c_k. Będzie:

$$\wp(u) = u^{-2} + 3c_2u^2 + 5c_3u^4 + \cdots$$

$$\wp^2(u) = u^{-4} + 6c_2 + 10c_3u^2 + \cdots$$

$$\wp^3(u) = u^{-6} + 9c_2 u^{-2} + 15c_3 + \dots$$

$$\wp'(u) = -2u^{-3} + 6c_2 u + 20c_3 u^3 + \dots$$

$$\{\wp'(u)\}^2 = 4u^{-6} - 24c_2 u^{-2} - 80c_3 + \dots$$

Wnosząc te szeregi do równania $\{\wp'(u)\}^2 = 4\wp^3(u) - g_1\wp^2(u) - g_2\wp(u) - g_3$ i porównując spółczynniki, otrzymamy:

$$g_1 = 0\,,\quad g_2 = 60c_2 = 60\sum{}' w^{-4}\,;\quad g_3 = 140\sum{}' w^{-6}$$ Będzie więc:

$$(\wp'(u))^2 = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3.$$

Ilości g_2 i g_3 noszą ~~za~~ nazwę ~~za~~ niezmienników funkcyi $\wp(u)$. W ogóle zaś niezmienniki dwuokresowej funkcyi (ω, ω') są to wyrażenia pozostające bez zmiany jeśli się w nich zamieni okresy ω i ω' na ϖ i ϖ', określone ~~zro~~ przez równania $\varpi = \alpha\omega + \beta\omega'$, $\varpi' = \alpha'\omega + \beta'\omega$ pod warunkiem $\alpha\beta' - \alpha'\beta = \pm 1$. Widzieliśmy poprzednio że zamiana taka nie wpływa na $\sigma(u)$ toż więc winno mieć miejsce dla $\wp(u)$ i dla g_2, g_3.

Okresy można sprowadzić do kształtów normalnych. t.j takich żeby ω i $\frac{\omega'}{i}$ były ilości rzeczywiste dodatnie. Równoległobok okresu stanie się w tym przypadku prostokątem pierwszego kwadrantu. Dla rzeczywistych wartości u funkc. $\sigma(u)$, g_2, g_3 będą rzeczywiste; dla u czysto urojonego (rein) $\sigma(u)$ będzie czysto urojona. Że $\wp(\omega)=e_1$ — rzeczywiste, to ~~zresztą~~ rzecz zrozumiała; $\wp(u)$, jako funkcya parzysta zostanie rzeczywistą i po zmianie u na ui, $\wp(\omega')=e_3$ będzie z tej przyczyny także rzeczywiste, a więc i $p(\omega+\omega')=e_2$, gdyż $\sum_1^3 e_1=0$

Mamy teraz okazać, że $\wp(u)$ posiada twierdzenie dodawania. Weźmy wyznacznik

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & \wp(u) & \wp'(u)\\ 1 & \wp(v) & \wp'(v)\\ 1 & \wp(w) & \wp'(w)\end{vmatrix}=\{\wp(u)-\wp(v)\}\wp'(w)+\{\wp(v)-\wp(w)\}\wp'(u)$$
$$+\{\wp(w)-\wp(u)\}\wp'(v).$$

Podnieśmy to do kwadratu i zamieńmy $\{\wp'(w)\}^2$ na wartość jego $4\wp^3(w)-g_2\wp(w)-g_3$

$$\{\wp(u)-\wp(v)\}^2(4\wp^3(w)-g_2\wp(w)-g_3)-\{\Delta-\wp(v)\wp'(u)+\wp(u)\wp'(v)-(\wp'(v)-\wp'(u))\wp(w)\}^2=0.$$

Oznaczmy $\wp(w)$ przez s.

$$\{\wp(u)-\wp(v)\}^2(4s^3-g_2s-g_3)-(\Delta-\wp(v)\wp'(u)+\wp(u)\wp'(v)-(\wp'(v)-\wp'(u))s)^2=0.$$

$\Delta=0$ dla $w=u$, $w=v$, $w=-(u+w)$ t.j. wartości:

$s = \wp(u)\,,\quad s = \wp(v)\,,\quad s = \wp(-u-v) = \wp(u+v)$

są to pierwiastki równania 3^{go} ~~rzędu~~. stopnia.

$$\{\wp(u)-\wp(v)\}^2(4s^3-g_2s-g_3)-\{\wp(v)\wp'(u)-\wp(u)\wp'(v)+(\wp'(v)-\wp'(u))s\}^2$$
$$=4(\wp(u)-\wp(v))^2(s-\wp(u))(s-\wp(v))(s-\wp(u+v))$$

Porównując spółczynniki, znachodzimy:

$$\{\wp'(v)-\wp'(u)\}^2=4(\wp(u)-\wp(v))^2\{\wp(u)+\wp(v)+\wp(u+v)\} \text{ czyli}$$
$$\wp(u+v)=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)^2-\wp(u)-\wp(v)$$

Tak więc ~~dla~~ $\wp(u)$ posiada twierdzenie dodawania pod kształtem, że $\wp(u+v)$ wyraża się wymiernie przez $\wp(u), \wp(v), \wp'(u), \wp'(v)$.

Można nadać temu wzorowi kształt nieco odmienny, rugując $\{\wp'(u)\}^2$ i $(\wp'(v))^2$ z pomocą związku $\{\wp'(u)\}^2=4\wp^3(u)-g_2\wp(u)-g_3$

Będzie $$\wp(u+v)=\frac{\{\wp(u)+\wp(v)\}\{2\wp(u)\wp(v)-\frac{1}{2}g_2\}-\wp'(u)\wp'(v)-g_3}{2\{\wp(u)-\wp(v)\}^2}$$

Jest to kształt wtóry tw. dod.

Jeśli zaś v zastąpisz przez $-v$:

$$\wp(u-v)=\frac{\{\wp(u)+\wp(v)\}\{2\wp(u)\wp(v)-\frac{1}{2}g_2\}+\wp'(u)\wp'(v)-g_3}{2\{\wp(u)-\wp(v)\}^2}$$

Stąd

$$\wp(u+v)-\wp(u-v)=-\frac{\wp'(u)\wp'(v)}{\{\wp(u)-\wp(v)\}^2}=-\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log\{\wp(u)-\wp(v)\}$$

$$\wp(u+v)+\wp(u-v)=\frac{\{\wp(u)+\wp(v)\}\{2\wp(u)\wp(v)-\frac{1}{2}g_2\}-g_3}{\{\wp(u)-\wp(v)\}^2}=-\frac{\partial^2}{\partial u^2}\log\{\wp(u)-\wp(v)\}+2\wp(u)$$

$$2\wp''(u)=12\wp^2(u)-g_2$$

Taką drogą przekonujemy się o istnieniu funkcyj dwuokresowych takich, że $\varphi(u+v)$ wyraża się wymiernie przez $\varphi(u), \varphi(v), \varphi'(u), \varphi'(v)$. Takie to funkcye nazywają się <u>elliptyczne</u>

Dowiedziemy, że wszystkie dwuokresowe funkcye, noszące charakter funkcyj wymiernych dają się wyrazić wymiernie przez $\wp(u)$ i $\wp'(u)$, oraz że wszystkie one posiadają twierdzenie dodawania w tem znaczeniu, że $\varphi(u+v)$ wyraża się wymiernie przez $\varphi(u), \varphi(v), \varphi'(u), \varphi'(v)$. Inaczej dowiedziemy, <u>że wszystkie funkcye dwuokresowe są eliptyczne</u> (sic).

Przypuśćmy, żeśmy już dowiedli dla funkcyj dwuokresowych

$$\varphi(u)=R(\wp(u), \wp'(u))$$

Wtedy
$$\varphi(u+v)=R(\wp(u+v), \wp'(u+v))$$

Różniczkując ~~to ostatnie~~ równanie dla $\wp(u+v)$ otrzymujemy wyrażenie na $\wp'(u+v)$ wymiernie przez $\wp(u), \wp'(u), \wp(v), \wp'(v)$ t.j. będzie więc

$$(\alpha)\qquad \cancel{\varphi'(u+v)} = \varphi(u+v)=\bar{R}(\wp(u), \wp(v), \wp'(u), \wp'(v))$$

Stąd z pomocą zrównania dla $\{\wp'(u)\}^2$, otrzymamy:

$$\varphi'(u) = R_1(\wp(u), \wp'(u))$$

Jeżeli ze zrównań $\varphi(u) = R(\wp(u), \wp'(u))$ i $\varphi'(u) = R_1(\wp(u), \wp'(u))$ dadzą się $\wp(u)$ i $\wp'(u)$ wyrazić wymiernie przez $\varphi(u)$ i $\varphi'(u)$, to podstawiwszy te wyrażenia do (α), otrzymamy twierdzenie pożądane (1./ twierdzenia dodawania).

Tak więc dowód postawionego twierdzenia rozpada na dwie części

1) każda funkcya dwuokresowa $\varphi(u)$ wyraża się wymiernie przez $\wp(u)$, $\wp'(u)$.

2) funkcye $\wp(u)$, $\wp'(u)$ wyrażają się wymiernie przez $\varphi(u)$ i $\varphi'(u)$.

Rozpatrzmy wyznacznik:

$$\varphi(u, u_1, u_2, \dots u_n) = \begin{vmatrix} 1 & \wp(u) & \wp'(u) & \dots & \wp^{(n-1)}(u) \\ 1 & \wp(u_1) & \wp'(u_1) & \dots & \wp^{(n-1)}(u_1) \\ 1 & \wp(u_2) & \wp'(u_2) & \dots & \wp^{(n-1)}(u_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \wp(u_n) & \wp'(u_n) & \dots & \wp^{(n-1)}(u_n) \end{vmatrix}$$

Jest to funkcya dwuokresowa z okresami $2\omega, 2\omega'$, ponieważ $\wp(u), \wp'(u), \dots \wp^{(n-1)}(u)$ posiadają tę własność. Ona staje się $\infty^{ś}$ $(n+1)^{go}$ rzędu dla $u=0$, jak to widzimy ze równań:

$$\wp(u) = u^{-2} + u^2 \mathfrak{P}(u)$$

$$\wp^{(n-1)}(u) = (-1)^{n-1} n!\, u^{-(n+1)} + \mathfrak{P}(u)$$

Jest więc $\varphi(u, u_1, u_2, \dots u_n)$ funkcya dwuokresowa rzędu $n+1$. Ona staje się zerem dla $u=u_1, u=u_2, \dots u=u_n$, więc i dla $u=-(u_1+u_2+\dots+u_n)$

Stąd wnosimy, że φ można przedstawić jak następuje

$$\varphi(u, u_1, u_2, \dots u_n) = C_n \frac{\sigma(u+u_1+u_2+\dots+u_n)\,\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)\dots\sigma(u-u_n)}{\sigma^{n+1}(u)}$$

Dla oznaczenia stałej wystarcza porównanie spółczynników pierwszych wyrazów lewej i prawej strony, rozwiniętych na szereg

Mamy $(-1)^{n-1} n!\, \varphi(u_1, u_2, \dots u_n) = C_n (-1)^n \sigma(u_1)\,\sigma(u_2)\dots\sigma(u_n)\,\sigma(u_1+u_2+\dots+u_n)$

gdzie

$$\varphi(u_1, u_2, \dots u_n) = \begin{vmatrix} 1 & \wp(u_1) & \wp'(u_1) \dots & \wp^{(n-2)}(u_1) \\ 1 & \wp(u_2) & \wp'(u_2) \dots & \wp^{(n-2)}(u_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \wp(u_n) & \wp'(u_n) \dots & \wp^{(n-2)}(u_n) \end{vmatrix}$$

Stąd wynika

$$\varphi(u, u_1, u_2, \dots u_n) = -n!\, \frac{\sigma(u+u_1+\dots+u_n)\,\sigma(u-u_1)\dots\sigma(u-u_n)}{\sigma^{n+1}(u)\,\sigma(u_1)\,\sigma(u_2)\dots\sigma(u_n)\,\sigma(u_1+u_2+\dots+u_n)}\, \varphi(u_1, u_2, \dots u_n)$$

$\varphi(u_1, u_2, \dots u_n)$ jest tegoż wzrostu, co i $\varphi(u, u_1, u_2, \dots u_n)$, lecz zależy od mniejszej ilości argumentów. Z tej przyczyny można napisać:

$$\varphi(u_1, u_2, \dots u_n) = -(n-1)!\, \frac{\sigma(u_1+u_2+\dots+u_n)\,\sigma(u_1-u_2)\,\sigma(u_1-u_3)\dots\sigma(u_1-u_n)}{\sigma^{n}(u_1)\,\sigma(u_2)\,\sigma(u_3)\dots\sigma(u_n)\,\sigma(u_2+u_3+\dots+u_n)}\, \varphi(u_2, u_3, \dots u_n)$$

$$\varphi(u_2, u_3, \dots u_n) = -(n-2)!\, \frac{\sigma(u_2+u_3+\dots+u_n)\,\sigma(u_2-u_3)\,\sigma(u_2-u_4)\dots\sigma(u_2-u_n)}{\sigma^{n-1}(u_2)\,\sigma(u_3)\,\sigma(u_4)\dots\sigma(u_3+u_4+\dots+u_n)}$$

$$\varphi(u_{n-1}, u_n) = \begin{vmatrix} 1 & \wp(u_{n-1}) \\ 1 & \wp(u_n) \end{vmatrix} = + \frac{\sigma(u_{n-1}+u_n)\,\sigma(u_{n-1}-u_n)}{\sigma^2(u_{n-1})\,\sigma^2(u_n)}$$

Mnożąc te wszystkie wyrażenia między sobą, otrzymujemy:

$$\varphi(u, u_1, u_2, \dots u_n) = (-1)^{n-1}\, 2!\,3!\dots n!\, \frac{\sigma(u+u_1+u_2+\dots+u_n)\,\sigma(u-u_1)\dots\sigma(u-u_n)\,\sigma(u_1-u_2)\dots\sigma(u_{n-1}-u_n)}{\sigma^{n+1}(u)\,\sigma^{n+1}(u_1)\,\sigma^{n+1}(u_2)\dots\sigma^{n+1}(u_n)}$$

$$\frac{\sigma(u+u_1+\dots+u_n)\,\sigma(u-u_1)\dots\sigma(u-u_n)\,\sigma(u_1-u_2)\dots\sigma(u_{n-1}-u_n)}{\sigma^{n+1}(u)\,\sigma^{n+1}(u_1)\,\sigma^{n+1}(u_2)\dots\sigma^{n+1}(u_n)} =$$

$$(-1)^{n-1}\frac{1}{2!\,3!\dots n!} \begin{vmatrix} 1 & \wp(u) & \wp'(u) & \dots & \wp^{(n-1)}(u) \\ 1 & \wp(u_1) & \wp'(u_1) & \dots & \wp^{(n-1)}(u_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \wp(u_n) & \wp'(u_n) & \dots & \wp^{(n-1)}(u_n) \end{vmatrix}$$

Stąd łatwo się przekonać, że funkcya dwuokresowa ~~rzędu n+1~~ z nieskończonością $n+1^{\text{go}}$ rzędu w punkcie $u=0$, posiadająca zera w punktach $u_1, u_2, u_3, \dots, -(u_1+u_2+\dots+u_n)$ wyraża się wzajemne przez $\wp(u)$ i $\wp'(u)$. W rzeczy samej

$$\{\wp'(u)\}^2 = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3$$

$$\wp''(u) = 6\wp^2(u) - \tfrac{1}{2}g_2$$

$$\wp'''(u) = 12\wp(u)\wp'(u)$$

$$\wp^{(IV)}(u) = 120\wp^3(u) - 18g_2\wp(u) - 12g_3$$

wogóle:

$$\wp^{(2n)}(u) = G_n(\wp(u))$$

$$\wp^{(2n+1)}(u) = G_n'(\wp(u))\wp'(u)$$

$$\wp^{(2n+2)}(u) = G_n''(\wp(u))\wp'^2(u) + G_n'(\wp(u))\wp''(u) = G_{n+1}(\wp(u))$$

Wyznacznik jest funkcyą liniową wielkości $\wp(u), \wp'(u), \dots \wp^{(n-1)}(u)$, dlatego też nasza funkcya dwuokresowa przedstawi się pod kształtem $M + N\wp'(u)$, gdzie M i N są funkcyą całkowite $\wp(u)$.

Mamy udowodnić teraz, że każda inna funkcya dwuokresowa funkcya $\varphi(u)$ rzędu n, stającą się ∞ i zerem w jakichkolwiek punktach wewnątrz równoległo boku okres i to jakąkolwiek ilość razy w każdym takim punkcie, wyraża się także wyrażeniem przez $\wp(u)$, $\wp'(u)$.

$\varphi'(u)$ funkcya dwuokresowa, która staje się ∞'ą dla tych że punktów jak i $\varphi(u)$, ~~będąc~~ posiadająca dla tych punktów odnośnie rząd o 1 wyższy. Dla tego ma $\varphi'(u)$ także skończoną ilość zer. Niech $\varphi'(u)$ staje się zerem dla $u=u_1, u_2, \dots$ i niech nadto

$\varphi(u_1)=A_1$, $\varphi(u_2)=A_2, \dots$

Niech będzie jeszcze A różne od $A_1, A_2, \dots$; wtedy $\varphi(u)-A$ będzie funkcya dwuokresowa, która staje się ∞'ą dla tych że punktach, co i $\varphi(u)$, przytem tegoż samego rzędu. Pierwiastki czyli zera tej funkcyi są rzędu pierwszego, ponieważ $\varphi'(u)$ dla nich nie równa się zeru. Jeżeli B czyni zadość tym że warunkom, co A, to będzie:

$$\frac{\varphi(u)-A}{\varphi(u)-B}$$

funkcya dwuokresowa, posiadająca n zer: $a_1, a_2, \dots a_n$ i n nieskończoności: $b_1, b_2, \dots b_n$ wszystkie rzędu pierwszego. Chcąc nadać ~~dla~~ na ten ułamek wartość 1 dla $u=u_0$, musimy napisać

$$\frac{\varphi(u)-A}{\varphi(u)-B}\cdot\frac{\varphi(u_0)-B}{\varphi(u_0)-A}=\frac{\sigma(u-a_1)\cdots\sigma(u-a_n)\sigma(u_0-b_1)\cdots\sigma(u_0-b_n)}{\sigma(u-b_1)\cdots\sigma(u-b_n)\sigma(u_0-a_1)\cdots\sigma(u_0-a_n)}$$

Mieliśmy powyżej

$$\varphi(u; a_1, a_2, \dots a_n) = [a_1 a_2 \dots a_n] \frac{\sigma(u+a_1+a_2+\dots+a_n)\sigma(u-a_1)\dots\sigma(u-a_n)}{\sigma^{n+1}(u)}$$

Więc:
$$\frac{\varphi(u,a_1,\dots a_n)}{\varphi(u_0,a_1,\dots a_n)} = \frac{\sigma(u+a_1+\dots+a_n)}{\sigma(u_0+a_1+\dots+a_n)}\left(\frac{\sigma(u_0)}{\sigma(u)}\right)^{n+1}\frac{\sigma(u-a_1)\dots\sigma(u-a_n)}{\sigma(u_0-a_1)\dots\sigma(u_0-a_n)}$$

Także:

$$\frac{\varphi(u,b_1,b_2,\dots b_n)}{\varphi(u_0,b_1,\dots b_n)} = \frac{\sigma(u+b_1+\dots+b_n)}{\sigma(u_0+b_1+\dots+b_n)}\left(\frac{\sigma(u_0)}{\sigma(u)}\right)^{n+1}\frac{\sigma(u-b_1)\dots\sigma(u-b_n)}{\sigma(u_0-b_1)\dots\sigma(u_0-b_n)}$$

Zważywszy, że $a_1+a_2+\dots+a_n = b_1+b_2+\dots+b_n$, znachodzimy:

$$\frac{\varphi(u)-A}{\varphi(u)-B}\cdot\frac{\varphi(u_0)-B}{\varphi(u_0)-A} = \frac{\varphi(u,a_1,a_2,\dots a_n)}{\varphi(u,b_1,b_2,\dots b_n)}\cdot\frac{\varphi(u_0,b_1,\dots b_n)}{\varphi(u_0,a_1,\dots a_n)}$$

Widzieliśmy, że $\varphi(u,a_1,a_2,\dots a_n)$ wyraża się wymiernie przez $\wp(u)$, $\wp'(u)$, a więc

$$\varphi(u) = \frac{P+Q\wp'(u)}{P_1+Q_1\wp'(u)} = \frac{\{P+Q\wp'(u)\}\{P_1-Q_1\wp'(u)\}}{P_1^2-Q_1^2(\wp'(u))^2} = \frac{L+M\wp'(u)}{N},$$

gdzie L, M, N funkcye całkowite $\wp(u)$.

Zanim przejdziemy do części drugiej zastawionego twierdzenia, musimy się zastanowić nad niektóremi uwagami treści algiebrycznej.

Niech będą X, Y funkcye wymierne zmiennych ξ, η kształtu

1) $$X = \frac{g(\xi) + \eta h(\xi)}{f(\xi)}$$

2) $$Y = \frac{g_1(\xi) + \eta h_1(\xi)}{f_1(\xi)}$$, nadto

3) $$\eta^2 - R(\xi) = 0.$$

Z pomocą (3), mamy

4) $$(f.X - g)^2 - h^2 R = 0$$

5) $$(f_1.Y - g_1)^2 - h_1^2 R = 0$$

Rugujące ξ, otrzymujemy stąd.

6) $$F(X, Y) = 0.$$

Chodzi nam o zbadanie warunków wymiernego wyrażenia się ξ, η przez X, Y.

Z równania (4) można podać w kształcie:

$$f^2 X^2 - 2fgX + g^2 - h^2 R = 0.$$

Jeżeli spółczynniki (względem X) posiadają czynnik wspólny, możemy się go pozbyć (za pomocą dzielenia). Niech zostanie równanie rzędu n względem ξ. Każdej wartości X odpowiadać będzie

n wartości na ξ, a z mocy (1) jest

$$\eta = \frac{f.X - g}{h}$$

więc oraz i n wartości na η.

Ażeby pomiędzy wartościami na ξ nie było równych, musi być h różnym od 0. Zrównanie (4) względem X może się rozłożyć na dwa czynniki jeśli h nie $=0$, wtedy też tylko względem ξ będzie się ono składało z 2 czynników. W razie zaś $h (=) 0$, zrównanie (4) jest irreducyjne, nie może więc mieć równych pierwiastków. Na podstawie (1) η przybiera teraz n wartości odrębnych, każdej więc wartości X odpowiada n par różnych wartości ξ, η. Jeżeli $h=0$, to (4) sprowadza się do układu irreducyjnego $fX-g=0$, rzędu, powiedzmy, ~~a~~ ν względem ξ. Każdemu X odpowiada ν różnych wartości ξ, a na podstawie (3) 2ν wartości różnych η. Niech X odpowiadają pary:

$$\xi\,\eta\;,\;\xi_1\,\eta_1\,,\;\xi_2\,\eta_2\,,\;\ldots\ldots$$

Podstawiwszy te wartości do (2) znajdziemy w ogóle n wartości na Y: $Y_1, Y_2, \ldots$ Z pomiędzy tych mogą być niektóre równe między sobą. Jeśli dla każdego X otrzymuje się n różnych wartości Y, można udowodnić, że ξ i η wyrażają się wymiernie przez X i Y.

Istotnie, niech zrównanie (2) daje nam na Y wartość Y_1 odpowiadającą ξ_1, η_1. Wtedy $\xi=\xi_1$ czyni zadość tożsamościowo zrównaniom:

$$(f X-g)^2-h^2R=0$$

$$(f_1 Y-g_1)^2-h_1^2R=0$$

Te zrównania mają pierwiastek wspólny $\xi=\xi_1$. Inaczej zrównania

$$7)\quad X=\frac{g+h\eta}{f},\quad Y_1=\frac{g_1+h_1\eta}{f_1}$$

posiadają parę wspólną pierwiastków tylko jedną ξ_1, η_1. Każda inna para ξ_2, η_2 da na Y wartość Y_2 różną od Y_1. Są więc ~~zrównania (7)~~ wyrażenia (7) wymierne liniowe funkcye $\overset{a}{\xi}, \overset{a}{\eta}$. Stąd wynika, że ξ i η dadzą się wyrazić wymiernie przez X i Y_1. Jeżeli zaś każdej wartości X odpowiada n par ξ, η i n różnych wartości Y; to ξ i η wyrażają się równie wymiernie przez X i Y i oprócz tego między X i Y istnieje związek (6)

Znaleźliśmy uprzednio

1) $\varphi(u) = \dfrac{L + M\wp'(u)}{N}$, więc:

2) $\varphi'(u) = \dfrac{L_1 + M_1\wp'(u)}{N_1}$

Niech $\wp(u) = \xi$, $\wp'(u) = \eta$. Zrównania (1) i (2) wezmą kształt

3) $$\varphi(u) = \frac{L(\xi) + M(\xi).\eta}{N(\xi)}$$

4) $$\varphi'(u) = \frac{L_1(\xi) + M_1(\xi).\eta}{N_1(\xi)}$$

Między ξ i η jest:

5) $$\eta^2 - 4\xi^3 + g_2\xi + g_3 = 0$$

Ze zrównań (3), (4), (5) rugujemy ξ i η. Będzie

6) $$G(\varphi, \varphi') = 0.$$

Z pomocą tego zrównania, wszystkie wyższe pochodne φ wyrażają się wymiernie przez φ i φ'. Różniczkując otrzymujemy:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \varphi}\varphi' + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \varphi'}\varphi'' = 0\ , \text{albo}$$

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} = -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \varphi}\varphi' : \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \varphi'}$$

Z mianownika tego wyrażenia można usunąć φ'. Możemy przypuszczać, że równ. (b) jest irredukcyjne. W razie przeciwnym równanie to da się rozłożyć na kilka równań — każde irredukcyjne. Dla tego też $\mathcal{G}$ i $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \varphi'}$ nie mają wspólnego dzielnika, można więc takie funkcye P i Q, że

$$P\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \varphi'} - Q\mathcal{G} = 1$$

gdzie P i Q funkcye całkowite od φ', a spółczynniki funkcye wymierne od φ. Usuwając mianownik, otrzymujemy:

$$P_1\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \varphi'} - Q_1\mathcal{G} = R(\varphi)\ ,$$

gdzie P_1, Q_1 — funkcye całkowite od φ i φ', a R funkcya całkowita od φ. Lecz ponieważ $\mathcal{G} = 0$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \varphi'} = \frac{R(\varphi)}{P_1}\ .\ \text{Stąd}$$

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} = \frac{\mathcal{G}_2(\varphi,\varphi')}{R(\varphi)}$$

Wszystkie inne pochodne mają ten sam kształt, a w mia—

nowniku rozwiązuje się potęgą $R(\varphi)$. Przypuśćmy, że

$$\frac{d^n\varphi}{du^n} = \frac{G_n(\varphi, \varphi')}{R^{n-1}(\varphi)}$$

Stąd

$$\frac{d^{n+1}\varphi}{du^{n+1}} = \frac{\left(\frac{\partial G_n}{\partial\varphi}\cdot\varphi' + \frac{\partial G_n}{\partial\varphi'}\varphi''\right)R^{n-1}(\varphi) - (n-1)\,R^{n-2}(\varphi)G_n\cdot\varphi'}{R^{2n-2}}$$

$$= \frac{\varphi'\left(R\frac{\partial G_n}{\partial\varphi} - (n-1)G_n\right) + G_2\frac{\partial G_n}{\partial\varphi'}}{R^n(\varphi)} \quad \text{t. j.}$$

$$\frac{d^{n+1}\varphi}{du^{n+1}} = \frac{G_{n+1}(\varphi, \varphi')}{R^n(\varphi)}$$

Stąd metodą indukcyjną dowodzimy twierdzenia.

Dajmy u wartość określoną, $\varphi(u)$ otrzyma także wartość określoną. Tej wartości odpowiada 1 para $\xi\,\eta$.

Zrównanie $\wp(u)-\xi_1$ ma tylko jeden pierwiastek $u=u_1$, dla którego $\wp'(u_1)=\eta_1$. Istotnie $\wp(u)-\xi_1$ staje się ∞ dla $u=0$ rzędu 2. Stąd we wnętrzu równoległoboku okresu musi być dwa nie niekongruentnych zera. Jeżeli jedno z nich $u=u_1$, to drugie $u=-u_1$. Lecz $\wp(u)$ jest parzysta, a $\wp'(u)$ – nieparzysta. Dlatego też tylko jedna wartość może czynić zadość dwóm zrównaniom $\wp(u)=\xi_1$, $\wp'(u)=\eta_1$

Tak więc pewnemu $\varphi(u)$ odpowiadają pary:

$\xi_1 = \wp(u_1)$, $\eta_1 = \wp'(u_1)$; $\xi_2 = \wp(u_2)$, $\eta_2 = \wp'(u_2)$; ....

Wnosząc to do (4) mieć będziemy r wartości dla $\varphi'(u)$

$$\varphi'(u_1), \ \varphi'(u_2), \ldots\ldots \varphi'(u_r).$$

Okażmy, że wszystkie te wartości różne są, wtenczas gdy

$\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots\ldots \varphi(u_r)$ wszystkie są równe między sobą.

Dowiedźmy, że jeżeli jednocześnie zadość uczynimy równaniom

$$\varphi(u_1) = \varphi(u_2)$$
$$\varphi'(u_1) = \varphi'(u_2)$$

to u_1, u_2 powinny być kongruentne.

Ponieważ wszystkie pochodne rzędu wyższego są funkcyą wymierną od $\varphi(u), \varphi'(u)$, będą więc także równe t. j. $\varphi''(u_1) = \varphi''(u_2)$, $\varphi'''(u_1) = \varphi'''(u_2)$, ...

Przytem u_1, u_2 wybrane tak, że $R(\varphi)$ nie $= 0$. Stąd rozwinięcia

$$\varphi(u_1+v) = \varphi(u_1) + v\varphi'(u_1) + \frac{v^2}{2!}\varphi''(u_1) + \ldots$$

$$\varphi(u_2+v) = \varphi(u_2) + v\varphi'(u_2) + \frac{v^2}{2!}\varphi''(u_2) + \ldots$$

muszą być identyczne, więc $\varphi(u_1+v) = \varphi(u_2+v)$.

Dowiedliśmy tego dla wartości v, dla których szeregi zbiegają się. Lecz ponieważ $\varphi(u_1+v)$, $\varphi(u_2+v)$ są jednowartościowe funkcye analityczne, powinno to mieć miejsce dla każdej wartości v. Zamiast v weźmy $v-u_1$, wtedy będzie

$$\varphi(v) = \varphi(v+u_2-u_1)$$

dla każdego v. Jest więc u_2-u_1 okres, a u_1 i u_2 są kongruentne wartości.

Tak więc wszystkie:

$$\varphi'(u_1),\ \varphi'(u_2), \ldots\ \varphi'(u_r)$$

są różne, stąd $\theta(u)$ i $\theta'(u)$ wyrażają się wymiernie przez $\varphi(u)$, $\varphi'(u)$, ponieważ wszystkie warunki tego mają miejsce.

Przypominając rozumowanie strony 72giej przekonujemy się o sprawiedliwości wypowiedzianego twierdzenia.

Uwaga. Przedstawiając $\wp(u)$ za pomocą funkcyi σ, rozpatrywaliśmy wielkości $2\omega, 2\omega'$ — para okresowa — których stosunek $\frac{\omega'}{\omega}$ jest ilość (kompleksną) złożona. Nie przypuszczaliśmy przytem, że $2\omega, 2\omega'$ są okresy pierwotne t.j. takie, że wszystkie inne okresy są w kształcie $2\nu\omega + 2\nu'\omega'$, ~~gdz~~ gdzie ν i ν' są liczby całkowite. Niech będą $2\varpi, 2\varpi'$ dwa okresy jakiekolwiek, a $2\omega, 2\omega'$ — pierwotne. Musi być

$$\varpi = \alpha\omega + \beta\omega'$$

$$\varpi' = \alpha'\omega + \beta\omega'$$

gdzie $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ — liczby całkowite. Jeżeli $\alpha\beta' - \alpha'\beta = \pm 1$, to można ω i ω', a więc i każdą parę okresów wyrazić przez ϖ i ϖ'; wtedy będzie i para $2\varpi, 2\varpi'$ — pierwotna. Jeżeli zaś $\alpha\beta' - \beta\alpha' (=) \pm 1$, to 2ϖ i $2\varpi'$ nie będą pierwotnymi. W obydwóch wypadkach $\wp(u)$ przedstawia się w kształcie ilorazu funkcyj σ i wyraża się wymiernie przez $\wp(u)$ i $\wp'(u)$. Lecz $\wp(u)$ i $\wp'(u)$ wyrażają się wymiernie przez $\wp(u)$ i $\wp'(u)$ tylko wtedy, jeśli $2\varpi, 2\varpi'$ jest para pierwotna. Różnica $u_2 - u_1 = 2\nu\omega + 2\nu'\omega'$ tylko w przypadku, gdy $2\omega, 2\omega'$ — para pierwotna. Nie można twierdzić, że $u_2 - u_1$ wyraża się w ten sposób przez $2\bar{\omega}$ i $2\bar{\omega}'$. Z tego wynikać nie będzie, żeby między parami:

$$\xi = \wp(u|\bar{\omega}, \bar{\omega}')\ , \ \eta = \wp'(u|\bar{\omega}, \bar{\omega}')$$

były dwie równych, na czem to głównie polega dowód twierdzenia. Gdyby się zdarzyło, że funkcya dwuokresowa $\varphi(u)$ wyraża się wymiernie przez $\wp(u), \wp'(u)$, odwrotnie zaś $\wp(u)$ nie da się wyrazić wymiernie przez $\varphi(u)$, $\varphi'(u)$, to znaczyć będzie, że mamy do czynienia z niepierwotnymi okresami.