VII 14

1

Notatki do wykładów teoretycznych

a) optyka

b). elektryczność (elektr-magnet)

scheinung vollständig verschiedener Art als die hier behandelten, da es sich dabei gar nicht um einen Gleichgewichtszustand handelt, aber das Unabhängigkeitsgesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist sowohl für den Zerfall der verschiedenen Atome wie für den Aufenthaltsort idealer Gasmoleküle gültig, und daraus resultiert die Identität dieser Formeln. Während nun Kohlrausch, Schweidler, Rutherford und Geiger, Meyer usw. die Formel (2) bei der Strahlung fester radioaktiver Stoffe genau bestätigt fanden, glaubte Svedberg nachweisen zu können, daß das Schwankungsquadrat der von einer Poloniumlösung ausgehenden Strahlung doppelt so groß ist, und dies erklärte er dadurch, daß sich hierbei zweierlei, voneinander ganz unabhängige Schwankungen superponieren: die Schwankungen des Poloniumgehalts in der obersten Flüssigkeitsschicht und die Schwankungen der Zerfallsgeschwindigkeit des Poloniums. Doch muß ich mich der Ansicht Langevins anschließen, welcher mir gegenüber gesprächsweise die Unrichtigkeit der betreffenden Wahrscheinlichkeitsbetrachtung Svedbergs behauptete. Ich glaube, daß auch in diesem Falle das normale Schweidlersche Gesetz erhalten bleiben müsse; Konzentrationsschwankungen müßten sich aber zu erkennen geben, wenn man nicht den zeitlichen Verlauf, sondern die in gleichen Volumteilen enthaltenen Gesamtzahlen radioaktiver Atome bestimmen würde.

§ 13. In diesem Zusammenhang scheint sich eine auf den ersten Blick recht verlockende

$$\sqrt{1+\frac{e^2\nu N}{aKH\Theta}}$$

Würde es sich um einen Teil im Inneren eines Elektrolyten handeln, so wäre eine analoge Formel gültig, nur würde zum zweiten Glied des Nenners noch ein ziemlich schwierig zu berechnender Zahlenfaktor hinzutreten. Da der Faktor $\frac{e^2 N}{H\Theta}$ den Wert $5{,}5\cdot 10^{-6}$ hat, sieht man, daß schon bei sehr verdünnten Elektrolyten die elektrostatische Wirkung die osmotische weit übertrifft, und daß der elektrische Ladungsüberschuß mit [illegible] Ionenzahl ν zu einem Grenzwert von der Größenordnung $\sqrt{aK}\cdot 2\cdot 10^{-7}$ elektrostatischen Einheiten ansteigt, welcher im günstigsten Falle vielleicht an die Empfindlichkeitsgrenze des Elsterschen Einfadenelektrometers heranreichen dürfte.

Aber selbst wenn sich die Empfindlichkeit noch beliebig steigern ließe, glaube ich nicht, daß jene Ladungsschwankungen an direkt verbundenen elektrostatischen Meßinstrumenten nachzuweisen wären, da dann eben nur die ohnehin schon vorhandene rein mechanische Brownsche Molekularschwankung des Zeigers zum Vorschein käme.

Vielleicht ist es aber möglich, in indirekter Weise zum Ziele zu gelangen, indem man z. B. nach der Millikanschen Methode die Ladungen bestimmt, welche bei Zerstäubung einer leitenden Flüssigkeit oder eines metallischen Pulvers auf den einzelnen Tröpfchen entstehen. Nach obiger Formel würde man für Tröpfchen von einigen Mikron [illegible] positive oder negative Ladungen von mehreren Elementarquanten erhalten. Fraglich ist nur, ob es gelingt, Fehler infolge Reibungselektrizität oder kapillarelektrischer Wirkungen fernzuhalten. Abgesehen hiervon, scheint mir die Formel (11) auch überhaupt insofern interessant, indem sie zeigt, in wie hohem Grade die elektrischen Ladungen der Ionen auf die gleichmäßige Verteilung der letzteren hinwirken müssen, während die Dielektrizitätskonstante K einen entgegengesetzten Einfluß hat, und es scheinen sich da Anknüpfungspunkte an eine kinetische Theorie der elektrolytischen Dissoziation zu ergeben.

§ 14. An die Betrachtung der Inhomogenitäten der Dichte schließen sich naturgemäß analoge Überlegungen betreffs Regelmäßigkeit in der Orientierung, falls es sich um Moleküle von nicht kugelförmiger Gestalt handelt. Es scheinen hier Prof. Lehmanns flüssige Kristalle eine Anordnung in Schwärme annähernd paralleler Stäbchenmoleküle zu illustrieren, doch fehlen uns vorderhand noch leider die Grundlagen zu einer quantitativen Theorie solcher Erscheinungen, [illegible] selbst die Grundfrage ist

Hauptrolle spielt, nur handelt es sich da um eigentliche Moleküle und Atome, welche nicht mehr direkt erkennbar sind.

§ 16. Nun möchte ich noch kurz zwei Anwendungen des Schwankungsprinzips erwähnen, welche sich von den bisher besprochenen dadurch unterscheiden, daß sie Deformationen fester Körper betreffen. Sie sind bisher nicht experimentell untersucht worden, und ich möchte sie der Aufmerksamkeit der Fachgenossen anempfehlen. Es handelt sich erstens um das schon früher erwähnte Beispiel eines Spiegels von minimalen Abmessungen, der an einem Torsionsfaden hängt, zweitens um die Horizontalverschiebungen des unteren Endes eines vertikal hängenden, sehr dünnen Quarzfadens.

In beiden Fällen ist die bei Verschiebung aus der Gleichgewichtslage geleistete Arbeit eine quadratische Funktion, also gilt die Formel des § 8. Der mittlere Ablenkungswinkel des gespiegelten Strahles aus der Nullage wird somit betragen:

$$\sqrt{\overline{\varphi^2}}=2\sqrt{\frac{H\Theta}{N}\frac{2l}{Ta_4\pi}}, \qquad (12)$$

was zum Beispiel bei Anwendung eines Quarzfadens von 10^{-5} cm Dicke und 1 cm Länge ca. einen halben Grad ausmachen würde.

§ 17. Die strenge Berechnung des zweiten Falles ist etwas komplizierter, da der Quarzfaden hier als kontinuierlich deformierbarer Körper auftritt und außer der Schwerkraft auch die Biegungsarbeit in Betracht kommt. Man könnte die von ihm beschriebene Kurve durch eine Fouriersche Reihe beschreiben und den mittleren Quadratwert der Verschiebung nach Formel (4) durch Integration nach den Koeffizienten berechnen, aber die Größenordnung erhält man auch so richtig, wenn man den Faden als steifen Stab auffaßt und nur die Schwerkraft berücksichtigt. Es gibt dies für die mittlere, positive oder negative Horizontalverschiebung des Fadenendes aus der Nullage:

$$\sqrt{\overline{\delta^2}}=\sqrt{\frac{H\Theta}{N}\frac{2}{a^2\pi\varrho g}}, \qquad (13)$$

also für einen Quarzfaden von der vorher angenommenen Art = 0,006 mm.

Die Untersuchung dieser Mikrophänomene ist natürlich mit vielen Schwierigkeiten verbunden (radiometrische Erscheinungen, Lichtdruck, Erschütterungen), aber sie dürfte wohl ausführbar sein. Von Interesse wird dabei auch die Abhängigkeit jener Schwankungen vom Drucke des umgebenden Gases sein. Auf die Größe

1

Teorja Maxwella,

~~Elektrony~~

Optyka

Równanie wirowe pola mgn.

Teorya Maxwella

Empirycznie poznane prawa elektrostatyki, magnetyzmu, elektromagnetyzmu elektrodynamiki, indukcyi, które analiza matematyczna wyraziła w formy wyżej wyłożone ( ) ~~tworzą~~ określają różne dziedziny zjawisk elektro-magnetycznych, na pozór ~~całkiem~~ ~~od~~ całkiem odrębne, między któremi pierwotne prace teoretyczne nie zdołały wykryć wewnętrznego związku*). W. Weber pierwszy podjął usiłowania ku objęciu

*) Tak długo pojawiały się jeszcze wątpliwości czy elektr. „statyczna" jest istotnie to samo co elektr. „galwaniczna" t.zn. czy elektr. pochodząca z różnych źródeł [illegible] wywiera siły elektryczne.

dowodu

---

wszystkich tych dziedzin jednolitą teoryą czyli t.j. ku odkryciu prawa fundamentalnego, z którego by owe prawa wypłynęły jako specyalne przypadki. Wynikiem jego badań było prawo, według którego dwie cząstki elektr. ee' ~~[illegible]~~ znajdujące się chwilowo w odstępie r, (a poruszające się tak że odstęp ten się zmienia z prędkością $\frac{dr}{dt}$ i z przyspieszeniem $\frac{d^2r}{dt^2}$) odpychają się siłą $\frac{ee'}{r^2}\Big[1$

Jako specyalny przypadek tego prawa fundamentalnego (Weber'sches Grundgesetz) istotnie ~~otrzymujemy~~ wynika prawo Coulomba w razie spoczynku elektryczności ($\frac{dr}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = 0$), a ~~z pomocą~~ na podstawie prostych ~~to~~ założeń co do ruchu elektr. w przewodnikach i nieco skomplikowanych wywodów matemat. otrzymujemy z niego także prawo Ampera i prawo indukcyi.

[Zjawiska magnet. wymagają jeszcze przyjęcia hypotezy prądów elementarnych Am-

~~[illegible]~~ W ślad za temi fundamentalnemi poszukiwaniami ~~[illegible]~~ Gauss, Riemann, ~~[illegible]~~ Neumann, Clausius, Budde, Helmholtz w nieco odmienny sposób argumentując doszli inni badacze do odmiennych praw elementarnych

co wywołało długą ożywioną dyskusyę co do ~~teoretycznego~~ kwestyi które z tych praw zastępujących pierwszeństwo ~~tych praw~~ (z punktu widz. teoryi) i co 2

do ~~spadku~~ niestety ewentualnego ~~jak~~ ~~sprawdzenia~~ rozstrzygającego doświadczenia. ~~Otóż~~. Tymczasem Maxwell rozwinął w stylu 3

całkiem odmienną teoryę zjawisk elektromagn. wychodząc z całkiem odmiennego

aniżeli owi niemieccy badacze ~~stanowiska~~ punktu widzenia, mianowicie porzucając zupełnie

pojęcie actionis in distans którym tamci wciąż operowali i sprowadzając ~~wszystko~~ ~~działanie~~ siły elektrom.

na działanie ~~sił~~ naprężeń w eterze, działających z punktu na punkt stosownie mech. teorii przylegający

~~postępujących~~ a rozchodzących się na odległość jedynie za pośrednictwem (tego) ośrodka wszystko wypełniającego,

~~eteru~~ ~~podobnie jak siły~~ analogicznie do sił obserwowanych w hydrodynamice i w sprężystości

Czy tych badaniach ~~służyły~~ Maxwellowi pewne analogie mechaniczne ~~tego~~

jako środek heurystyczny czy jako rusztowanie pomocnicze do wybudowania teoryi

~~pewne k~~ zjawisk elektromagn. z zjawiskami hydromech. itp., z których w

dalszym ciągu wyłoniły się jego pomysły co do mechanicznej struktury eteru.

Od tych pojęć pomocniczych jednak po części Maxwell sam później oczyścił swoją

teoryę, po części uczynili to Heaviside i Hertz, upraszczając równocześnie jej wyrażenie matematyczne równania brzmienie.

W tej formie przyjęła się teorya Maxwella powszechnie jako systematyczna

teorya zjawisk elektromagn., gdy Hertzowi udało się sprawdzić ~~samemu~~ ~~stwierdzić~~ doświadczalnie ~~zdarzeń~~ ~~nad~~

istnienie ~~fal~~ elektrycznych ~~sprawdzić jego~~ które przepowiedział ~~pan~~ Maxwell jako

konsekwencyę swej teoryi, a niewytłomaczalne na podstawie teoryi Webera i innych

niemieckich fizyków. Ponieważ także dzisiejsza teorya elektronów oparta

jest na mało co zmienionych — równaniach Maxwella musimy się ~~przedewszystkiem~~

zająć ich wywodem. Maxwella równania dla ciał spoczywających są uchowane

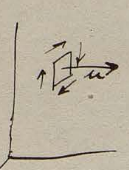
Jako zasadnicze rysy teorji Maxwella wnosić należy ~~opisu~~ pominąwszy wyżej wspomniane analogje mechanistyczne:

1). ~~ten że są to równania różniczkowe~~ pojęcie sił elektrycznych jako actiones in contiguum   2), hipotezę prądów przesunięcia.

Co do pierwszego punktu zauważmy że wszystkie wyżej wymienione prawa, a właściwie także prawo Webera ~~[illegible]~~ określają ~~wyznaczają~~ ~~chwilowy~~ (stan pola elektrycznego ~~[illegible]~~ w zależności od ~~stanów wielkości~~ (siłowe e, prądu i itd.) panujących w skończonej odległości r. równoczesnych stanów Np. z prawa Webera wnosi w każdej chwili widzimy w jakiej odległości znajduje się e', z jaką prędkością zmienia się ich wzajemny odstęp itd., aby wiedzieć z jaką siłą ma ową masę e ~~po~~ odpychać.

Taka forma równań zasadniczych ~~odpowiada~~ nadaje się zatem przedewszystkiem do określenia sił działających „in distans", podczas gdy do określenia sił ~~[illegible]~~ jako zależnych jedynie od (stanu pola elektrycznego w) ~~bezpośredniem~~ otoczeniu ~~nadaje się~~ odpowiada forma równań różniczkowych jako prawa zasadniczego. Nie jest to różnica istotna gdyż z punktu widzenia matematycznego ~~każde~~ równanie różniczkowe ~~[illegible]~~ równoważne jest z pewnemi równaniami całkowemi; ~~ale różnica ta w formalnem~~ jest to ~~tylko~~ rzeczy różnica formalna, ale przecież związana najdokładniej ściśle ~~[illegible]~~ z różnego odmiennych poglądów zasadniczych na fizyczną stronę rzeczy.

1). Aby równania .. zastąpić przez równania różniczkowe zastosujmy te równania do (~~elementów~~ nieskończenie małych) powierzchni. Wyobraźmy sobie że w przestrzeni panuje pewien rozkład prądu tak że składowe prądu w kierunkach XYZ ... uvw



wtedy przez element powierzchni $\Delta y \Delta z$ przepływa prąd $u \Delta y \Delta z$ który według ( ) równa się ~~[illegible]~~ $\frac{1}{4\pi}$ pracy przez (biegun magnetyczny jednostkowy) przy okrążeniu tego elementu wykonanej. (w kierunku według Ampère'a oznaczonym)

Oznaczając (składowe siły magnet. ~~przez~~ zaś kolejno LMN ~~[illegible]~~ wyróżnimi wielkości

$$Z(y)\,\Delta z + Y(z+\Delta z) - \ldots =$$

lub ściślej wyrażając się:

$$\int Z(y)\,dz + \int Y(z+\Delta z)\,dy - \int Z(y+\Delta y)\,dz - \int Y(z)\,dy = \int [Y(z+\Delta z) - Y(z)]\,dy - \int \ldots$$

$$= \Delta y \frac{\partial Y(z+\varepsilon\Delta z)}{\partial z}$$

przez zastos. Mittelwertsatz $= \Delta y \Delta z \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)$

$$4\pi u = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}$$

$$4\pi v = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$4\pi w = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}$$

Założenia Maxwella:

$$u = \lambda X + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}$$

$$= \lambda(X - X') + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}$$

~~Poynting~~
Rowland

~~Energia~~ $K\frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi\lambda(X - X') = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}$

$\vdots$

$$\left.\right\} \; K\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi\lambda(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}') = \operatorname{curl} \mathfrak{H}$$

$$\mathfrak{H} = + \operatorname{curl} \mathfrak{A}$$

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = + \operatorname{curl}^2 \mathfrak{A} = \cancel{-\nabla \operatorname{div} \mathfrak{A}} + \nabla^2 \mathfrak{A} = + 4\pi v = \uparrow$$

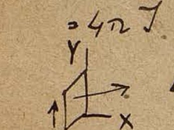
Oprócz tego: $W_e = \frac{1}{2}\Sigma V\varphi = \frac{1}{2}\Sigma K V^2$

$$\int V\varphi\, dv = \int K V \varphi\, dv = -\frac{K}{4\pi}\int V \nabla^2 V\, dv = -\frac{K}{4\pi}\iint V \frac{\partial V}{\partial n} df - \frac{K}{4\pi}\int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial V}{\partial y}\right] dv$$

$$W_e = \int \frac{K}{8\pi}(X^2 + Y^2 + Z^2)\, dv$$

$$W_m = \int \frac{\mu}{8\pi}(L^2 + M^2 + N^2)\, dv$$

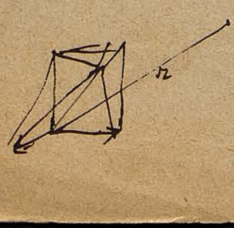
Do drugiego równania tak z pojęcia pracy : praca przy okrążeniu prądu I przez magnetyzm 1



$= 4\pi I$

$$4\pi u\, dy\, dz = \overset{N}{Z_0}\, dz + \overset{M}{Y_{\Delta z}}\, dz - Z_{\Delta y}\, dz - Y_0\, dy = \cancel{\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) dy\, dz}$$

$$= \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) dy\, dz$$



Równania indukcyi

$$\int S\,\mathfrak{E}\,ds = \iint df\, S\,N \operatorname{curl} \mathfrak{E}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\iint df\, S\,N\,\mathfrak{H}$$

$$i w = -\frac{dp}{dt} \qquad p = \iint \frac{\partial U}{\partial n}\, df$$

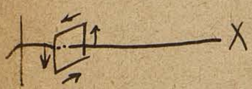
$$\uparrow$$

$$E$$

$$= \cancel{\int (F dx + G dy + H dz)}$$

$$\|$$

$$\int E\,ds = \iint (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \iint \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos nx \;\dots\right] df$$



$$\left.\begin{matrix} \uparrow M \\ \xrightarrow{L} \\ \swarrow N \end{matrix}\right\}\ \text{magn.} \qquad \left.\begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix}\right\}\ \text{elektr.}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \qquad \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \qquad \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$$

Jeśli $\mu > 1$ to powstaje się ilość linij siły w stosunku μ

$$\mu \frac{\partial L}{\partial t} =$$

$$\mu \frac{\partial M}{\partial t} =$$

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\operatorname{curl} \mathfrak{E}$$

Równania pola elektromagn.

$$L = -\frac{\partial W}{\partial x} \;\dots\; = \int \frac{i\,\Delta s}{r^2}\left[\cos rz \cos sy - \cos ry \cos sz\right] = \int i \left[\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial y} dz - \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial z} dy\right]$$

$$F = \int \frac{i\,dx}{r} \qquad G = \int \frac{i\,dy}{r} \qquad H = \int \frac{i\,dz}{r}$$

$$i\,dx = I\,ds \cos sx = u\,dv$$

$$L = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \quad \Big|\ \frac{\partial}{\partial y}$$

$$M = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \quad \Big|\ \frac{\partial}{\partial x}$$

$$N = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x \partial z} - \frac{\partial G}{\partial y \partial z} + \frac{\partial H}{\partial x^2} + \frac{\partial H}{\partial y^2}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right] + \nabla^2 H$$

$$= \nabla^2 H = -4\pi w$$

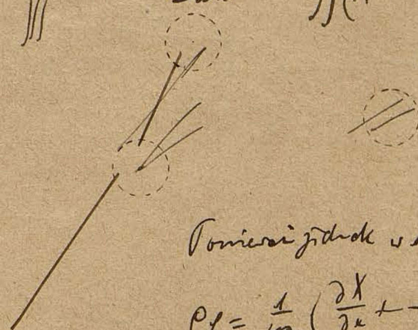
$\frac{\partial \Pi}{\partial s}$ $\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial(KX)}{\partial x}+\frac{\partial(KY)}{\partial y}+\frac{\partial(KZ)}{\partial z}\right] = -4\pi\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$

$$= -4\pi\lambda\left[\frac{\partial X}{\partial x} \sim \right]$$

$\frac{\partial}{\partial t}\iiint dv \left[\qquad \qquad \right] = 0$ jeśli otoczona przez eter $\lambda = 0$

więc $\iiint$ $= \text{const} = \iint (X\cos nx + — \,)$ $= 4\pi e$

więc $\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial(KX)}{\partial x} + — \right] = \rho_v$



$\frac{1}{4\pi}\iint (K_2X_2 + K_1X_1)\cos nx — \qquad = \sigma_v$

Ponieważ jednak w eterze $K=1$: $X = KX$ to także $4\pi e = \iiint \rho_f\, dv$

$\rho_f = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + — \quad\right)$

$\sigma_f =$

Dla magnetyzmu zawsze $\lambda = 0$

więc jeśli nie ma ρ_v to nigdy nie powstanie ; [illegible]

$\iint (KX\cos nx + — \quad)\, df$ · ilość linij polaryzacji

$\frac{de_v}{dt} = -\int (u\cos nx + — \quad)$. z tąd jakkolwiek by był prąd [illegible]

$\cancel{\mu\frac{dX}{dt} = \text{curl}\, Z}$ $\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} = -4\pi\frac{\lambda\rho}{K}$

$\rho = \rho_0 e^{-t}$

gęstość przestrzenna w ciałach jednorodnych musi stale zmniejszać się do zera

Zaważają tylko wielkości w otoczeniu punktu. $\frac{\partial}{\partial t} = f(x\,y\,z)$

Dla granicy ruchomy zetknięcie wszystkich przyjęcia ~~[illegible]~~

Położymy oś ~~XY~~ prostopadle

Jeżeli wszystko skończone tylko w warstwie

~~Gdyby $Y_2 - Y_1 = 0$ to~~ to $\cancel{\frac{\partial Z}{\partial x}}$ $\cancel{\frac{\partial X}{\partial z}}$ $\frac{\partial X}{\partial y}$ $\frac{\partial Y}{\partial x}$ ~~skończone~~

~~zatem $Z_2 = Z_1$~~ $\frac{dL}{dt}$ skończone $\cancel{\frac{\partial Y}{\partial z}}$, $\cancel{\frac{\partial Z}{\partial y}}$, $\frac{\partial M}{\partial z}$, $\frac{\partial N}{\partial y}$ ~~itd~~

$\cancel{X_2 = Y_1}$ $\quad Z_2 = Z_1 \quad M_2 = M_1$

$\cancel{Z_2 = Z_1}$ $\quad \cancel{Y_2 = Y_1} \quad N_2 = N_1$

Z prostopadłej

$$\int_1^2 \left(\mu \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) dz \qquad \frac{d}{dt}\int L\, dz = Y_2 - Y_1 - \frac{\partial}{\partial y}\int Z\, dz \underbrace{}_{\varphi_{12}} = 0$$

elektromot. siła

$$X_1 - X_2 = \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x} \qquad \mu_1 \frac{\partial N_1}{\partial t} = \frac{\partial X_1}{\partial y} - \frac{\partial Y_1}{\partial x}$$

$$Y_1 - Y_2 = \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial y} \qquad \mu_2 \frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{\partial X_2}{\partial y} - \frac{\partial Y_2}{\partial x}$$

$$\mu_1 \frac{\partial N_1}{\partial t} - \mu_2 \frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}(X_1 - X_2) - - = 0$$

$$\mu_1 \frac{\partial N_1}{\partial t} = \mu_2 \frac{\partial N_2}{\partial t}$$

$$K_2 \frac{\partial Z_2}{\partial t} + 4\pi\lambda_2 Z_2 = K_1 \frac{\partial Z_1}{\partial t} + 4\pi\lambda_1 Z_1 \qquad M_2 = M_1 \quad L_2 = L_1$$

$\int\int V \nabla \varphi$

$\mu \frac{\partial L}{\partial t} = \cancel{\frac{\partial Y}{\partial z}} - \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$ L | $K \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} - 4\pi\lambda X$ | X 7

$\mu \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}$ M | $K \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} - 4\pi\lambda Y$ | Y

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint W = \frac{1}{4\pi}\iiint \Big(\underbrace{L\frac{\partial Y}{\partial z} - M\frac{\partial X}{\partial z} + Y\frac{\partial L}{\partial z} - X\frac{\partial M}{\partial z} + \cdots}_{\frac{\partial}{\partial z}(LY-MX) + \frac{\partial}{\partial x}(MZ-NY) + \frac{\partial}{\partial y}(NX-LZ)} \Big) - 4\pi\lambda(X^2+Y^2+Z^2)\,dv$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iint\Big[(LY-MX)\cos nz + \cdots \Big]df - \cancel{\frac{1}{4\pi}}\iiint \lambda\,(X^2+Y^2+Z^2)\,dv$$

więc jeśli przestrzeń taka że na powierzchni $L \ldots = 0$

zamknięta się w ciepło Joulea.

to $\frac{\partial}{\partial t}W = \iiint \lambda(X^2+Y^2+Z^2)\,dv = \iiint \frac{1}{\lambda}(u^2+v^2+w^2)\,dv$

Ostatecznie zmiana zatem

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \iiint \frac{1}{\lambda}\ldots = \frac{1}{4\pi}\iint\Big[(MZ-NY)\cos nx + \cdots \Big]$$

$$= \iint \begin{vmatrix} \cos nx & \cos ny & \cos nz \\ X & Y & Z \\ L & M & N \end{vmatrix} = S\,n\,V\mathfrak{E}\mathfrak{H}$$

więc tak jakby gdyby prąd wielkości $V\mathfrak{E}\mathfrak{H}$ energii przepływał

Poynting

mi jest to jedynie jedyny wzór

$\operatorname{div} V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\operatorname{curl}\mathfrak{A} - \mathfrak{A}\operatorname{curl}\mathfrak{B}$

$K\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi\lambda\,\mathfrak{E} = \operatorname{curl}\mathfrak{H}$ $\frac{1}{4\pi}\iiint(\mathfrak{E}\operatorname{curl}\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\operatorname{curl}\mathfrak{E})\,dv = \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iiint(K\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}^2)\,dv +$

$\mu\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\operatorname{curl}\mathfrak{E}$

Podział: stany statyczne, stałe ~~dyn~~ (niezmienne), ~~zmienne~~ dynamiczne

~~Dla~~ = stałe nie tylko względem LMN ale wszystkich wielkości fizycznych zatem stałe W

więc $\frac{\partial W}{\partial t}=0$ więc $u\,v\,w=0$ więc w przewodnikach $\mathfrak{E}=0$

Zatem dwa niezależne systemy równań

$\operatorname{curl}\mathfrak{E}=0$ $\quad$ $\operatorname{curl}\mathfrak{H}=0$

Zatem $X=-\frac{\partial U}{\partial x}$ $\qquad \Delta^2 U = -4\pi\rho_f$ $\qquad$ | Dla próżni : $\Delta^2\psi=0$

$Y=$

$Z=$ $\qquad \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_2-\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_1=-4\pi\sigma_f$ $\qquad X_1=X_2$

bo $\frac{\partial U_1}{\partial t_1}=\frac{\partial U_2}{\partial t_2}$ stycznie

$\delta.\Delta^2 U = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_1-\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_2\right]=-4\pi\rho_f\cdot\delta$

$=-4\pi\sigma$ $\qquad \rho_f\,dv=e$ $\qquad \rho_f\,\delta=\frac{e}{df}=\sigma$

$$U=\int\frac{\rho_f}{r}\,dv$$

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{dU}{dx}\right)+\dots\dots = -4\pi\rho_w \quad = \operatorname{div}(K\nabla U)$$

$$K_1\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_1-K_2\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_2=-4\pi\sigma_w$$

El. statyka polega więc na curl=0 i sprowadza się tylko dla tego bo istnieją przewodniki

---

$$W^{\infty}=\frac{1}{8\pi}\int K X^2+\dots = -\frac{1}{8\pi}\int\left(KX\frac{\partial U}{\partial x}+\dots\right)dv$$

$$=-\frac{1}{8\pi}\iint^{\infty} K\left(X\,U\cos nx+\dots\right)+\frac{1}{8\pi}\iiint^{\infty} U\underbrace{\left(\frac{\partial KX}{\partial x}+\frac{\partial KY}{\partial y}+\dots\right)}_{4\pi\rho_w}dv$$

$\quad\; \overset{\shortparallel}{0}$ $\quad \int\sigma\frac{U}{r}\,df$

$$=\frac{1}{2}\iiint U\rho_w=\frac{1}{2}\iiint\frac{\rho_f\cdot\rho_w}{r}\,dv\,dv$$

E_1, E_2 w wielkiej odległości

$$W=\frac{1}{2}\left[\frac{E_1E_2}{r}+E_2E_1\right] \qquad -\frac{\partial W}{\partial r}=+\frac{E_1E_2}{r^2}$$

$$W=\frac{E_1E_2}{r}$$

Pojęcie linij siły wystarczy do

8

$$\mu \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$\mu \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}$$

$$\mu \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int \mu M \, dx}_{=0} = Z\Big|_1^2 - \frac{\partial}{\partial z} \underbrace{\int X \, dx}_{\varphi_{12}}$$

dla pewny równania muszę powtórzyć więc i wszystkie $\frac{\partial}{\partial \cdot}$ wyrażenia muszą zatem skończone

nie ma tam jednak pochodnej $\frac{\partial X}{\partial x}$ więc to mogą zatem ∞

$$Z_2 - Z_1 = \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial z} = 0$$ jeśli φ_{12} = const w całej powierzchni

$$Y_2 - Y_1 = \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial y}$$

$$\mu_1 \frac{\partial L_1}{\partial t} = \frac{\partial Y_1}{\partial z} - \frac{\partial Z_1}{\partial y}$$

$$\mu_2 \frac{\partial L_2}{\partial t} = \frac{\partial Y_2}{\partial z} - \frac{\partial Z_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu_1 L_1 - \mu_2 L_2) = 0$$

$Y_1 = Y_2$

$Z_1 = Z_2$

$M_1 = M_2$

$N_1 = N_2$

$L_1 = L_2$

$$N_2 = N_1$$

$$M_2 = M_1$$

$$K_1 \frac{\partial X_1}{\partial t} + 4\pi\lambda_1 X_1 = K_2 \frac{\partial X_2}{\partial t} + \dots$$

$$K \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi\lambda\mathfrak{E} = \operatorname{curl} \mathfrak{H}$$

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\operatorname{curl} \mathfrak{E}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \iiint (\mathfrak{E} \operatorname{curl} \mathfrak{H} - \mathfrak{H} \operatorname{curl} \mathfrak{E}) \, dv - 4\pi \iiint \mathfrak{E}^2 \, dv$$

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ L & M & N \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} L & M & N \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

$$X \frac{\partial N}{\partial y} - N \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial}{\cdot}$$

~~curl 𝔈 = 0~~

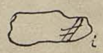
$4\pi\lambda\mathfrak{E} = \text{curl}\,\mathfrak{H}$ $\qquad$ $\mathfrak{H} = \nabla \cancel{\ } + \text{curl}\,\mathfrak{A}$

$= -\nabla^2 \mathfrak{A}$

$\mathfrak{H} = \text{curl} \int \frac{4\pi \cancel{\ }\, u}{r}$ $\qquad$ $\iint \frac{ds\, ds''}{r}$

$= 4\pi$

$\mathfrak{H} = \text{curl}\,\mathfrak{A}$ $\qquad$ $\mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$



$\int i\, dt\, \mathfrak{H}.\mathfrak{n} = \int$ $\qquad$ $\frac{\partial W}{\partial t} = \iiint \text{curl}\,\mathfrak{A} . \underbrace{\text{curl}\,\mathfrak{E}}_{\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}}\, dv$

$\iint ii' \frac{\cos \epsilon}{r}\, ds_1\, ds_2$

$\int \mathfrak{H}^2\, dv = \iiint (\text{curl}\,\mathfrak{A})^2\, dv$

~~Odpowiednio sposób~~

Otrzymujemy zatem ~~[illegible]~~ $4\pi u = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}$

i odpowiednio względem osi YZ: $4\pi v =$

$4\pi w =$

Który to system równań wektory symbolicznie przedstawić możemy

$$4\pi i = \mathrm{curl}\, \mathfrak{H}$$

Do tegosamego rezultatu można ~~być~~ dojść (w ogólnym przypadku jakiejbądź dając) zamieniając ~~[illegible]~~ pracę ( ) wektory

~~[illegible]~~ zasady Stokesa na $\int \mathfrak{H}\, ds = \iint \mathrm{curl}\, \mathfrak{H} . N\, df$

i uważając że całkowity prąd $I = \int i\, N\, df$

W zupełnie analogiczny sposób precyzujemy zasadę indukcji ( ) określającą siłę elektromot. wzbudzoną w przewodniku prostokątnym $\Delta y \Delta z$ Δy. ~~[illegible]~~ wskutek ~~[illegible]~~ ubytku ~~[illegible]~~ ilości linij siły magnet.

w kierunku strzałek wchodzących strumień w stosunku $\frac{d\varphi}{dt}$

~~się zmienia~~

Ponieważ ~~[illegible]~~ obecnie ~~[illegible]~~ chodzi jedynie o zmianę φ (z czasem zachodzącą) przy niezmiennym położeniu przewodnika,

napiszemy $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ zamiast $\frac{d\varphi}{dt}$ i uważymy że $\varphi = \mu L\, \Delta y \Delta z$ zatem $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \frac{\partial L}{\partial t} \Delta y \Delta z$

~~[illegible]~~ składowe siły elektromot. $\mathfrak{E}$ ~~[illegible]~~ wzdłuż XYZ otrzymujemy analogicznie jak poprzednio

$$\mu \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}$$

$\mu \qquad =$

$\qquad =$

co znów obejmiemy jednym wzorem

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\mathrm{curl}\, \mathfrak{E}$$

~~Równania~~ Równań wyga– na tejże stronie.

2). Jako zasadniczy jedną z założeń Maxwella wymieniliśmy powyżej hypotezę prądu 10

przesunięcia. ~~Hipoteza ta polegała tem że~~ ~~Rozważ~~ ~~wychodząc~~ Maxwell, (na podstawie hipotezy poglądów o niezależności elektr... ~~drogą której ... ni~~

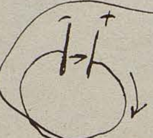
ważnej których mogą istnieć tylko prądy zamknięte) tak że $\operatorname{div} J = 0$

~~...~~, doszedł do przypuszczenia że nie tylko t.zw. prądy galwaniczne, przebiegające

w przewodnikach zamkniętym (według prawa Ohma, wytwarzają ~~...~~ w otoczeniu ~~się~~ pole magnetyczne

lecz/ że ~~...~~ podobnież ~~...~~ skutek musi występować w otoczeniu dielektrykum

gdy natężenie pola elektrycznego się zmienia czasowo.



$$i = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\frac{f}{4\pi}K\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{V_1 - V_2}{\delta}\right) = -\frac{fK}{4\pi c^2}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$$

Wyobraźmy sobie (rozbrojenie) (płaskiego) kondensatora (z zadania ( ) str. ~~rozbrojonego przez przewodnik~~

Prąd biegnący po przewodniku w kierunku strzałki będzie

wychodząc z założenia że prąd musi być zamknięty dielektrykum ~~...~~ kondensatora

Maxwell przyjmuje tedy także w ~~dielektrycznym izolatorze~~ oddzielającym okładki (w kierunku strzałki)

kondensatora istnienie prądu wielkości $\frac{K}{4\pi}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$ na cm² przekroju, który nazywa

prądem przesunięcia i który ~~by~~ taki sam skutki (może) ma wywierać jak prąd galwaniczny

tak że system powyższy tak by działał jak przewodnik zamknięty prądem i

[Interpretacja z punktu widzenia teorii elektronów – Rosetta

okrążony. Także w ~~...~~ przewodnikach Maxwell dopuszcza możliwość istnienia

takiego prądu przesunięcia, który by się superponował ponad prądy galwaniczne.

Wypadkowy zatem prąd i składa się według Maxwella z dwóch części:

prądu przesunięcia: ($i = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$ ~~i prąd~~ Ohma) + ~~...~~ $\lambda\mathcal{E}$ więc ogólnie mamy

zamiast równania ( ):

$$\frac{K}{c^2}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + 4\pi\lambda\mathcal{E} = \operatorname{curl} \mathcal{H}$$

ważność tylko dla ...
Zastrzeżenie dla dielektr. anizotrop. (kryształów)

~~Do~~ Zauważyć należy że tutaj stała dielektr. musi być wyrażona w jednostkach

elektronowych jeśli inne wielkości ~~tak...~~ niemi wyrażamy zatem $\frac{K}{c^2}$

To samo już w zadaniu o rozbrojeniu kondensatora!

~~2) Powody wstąpić~~ W ~~przypadkach~~ tych wszystkich ~~wyżej wymienionych~~

Siły magnet. tych prądów przesunięcia w przypadkach w praktyce urzeczywistnionych może być tylko ~~są~~ nadzwyczajnie małe [obliczyć w zadaniu pod założeniem

dlatego ~~to~~ nie dała się ta hypoteza Maxwella jeszcze stwierdzić za pomocą bezpośrednich doświadczeń [Próby Whiteheada] ale pośredni dowód jej słuszności jest dostarczone stwierdzeniem wniosków z niej wyprowadzonych co do istnienia fal elektr. por. §..

3). ~~Dopełnić~~ Oprócz równań ; wyrażające tych ~~związek~~ podwójny wzajemny wielkości ~~magnetycznych~~ elektrycznych i . Maxwell wprowadza ~~jeszcze~~ do swej teorji jeszcze równanie dla energji pola elektr.. ( ) ; ( ) ~~...~~ i one służą do obliczenia sił ponderomot. mechanicznych . ~~pod założeniem że praca podczas przes.~~ przy użyciu systemu elektronowego

~~.....~~ $T = \frac{k}{8\pi c^2}\iiint \qquad + \iint$

Według dotychczasowych rezultatów wiemy jego zgodność z doświadcz. w razie elektr. i magnet. indukcj., słuszność zastosow. jego do ~~elektrost.~~ pola pochodzącego wyłącznie od prądów elektr. zostanie później udowodn. st..

4). Dla ~~...~~ miejsc gdzie różnorodne ośrodki się stykają przyjąć należy ~~...~~ wzgląd na fizyczną uzasadnioną hypotezę ciągłości przejść z której wynikają warunki graniczne (; ~)

~~Dla łatwiejszego zrozumienia podaliśmy tutaj~~ wyżej podanego wywodu równań Maxw. nie należy oczywiście uważać za dowód, gdyż zawiera elementy założenia hypotetyczne; podaliśmy go tutaj dla łatwiejszego zrozumienia, zresztą trzeba słuszność przyznać Hertzowi, który powiada że ~~...~~ jedynym dowodem ~~...~~ ich słuszności jest zgodność ~~...~~ wyników z nich wyprowadzonych z prawami doświadczalnemi.

W myśl tej zasady przejdziemy obecnie do zbadania sformułowania i sprawdzenia wniosków z tych równań wynikających, co nam da sposobność do użycz...

II

Co do samych równań zauważymy przedewszystkiem) 2) zupełną ich symetryę w razie izolatorów ($\lambda=0$), pociągającą za sobą analogię zjawisk elektr. i magn., na którą zwłaszcza Heaviside kładzie nacisk. Różnica zasadnicza tych zjawisk okazuje się tylko w tem że istnieją przewodniki elektryczne a nie ma ~~przewodników~~ „przewodnictwa magnetycznego", ~~a w skutek tego~~ i w związku z tem istnieją prawdziwe ładunki elektr. ale nie prawdziwe ładunki magnetyczne.

1). ich kształt ~~odpowiadający~~ mający tę wspólną cechę z równ. hydrod., sprężystości, przewodn. ciepła itd.

~~a tylko~~ że ogólnie równaniom „pól fizycznych" że ~~wyrażają zależność~~ określają sposób jak ~~pewnej~~ wielkość (lewa strona $\frac{\partial}{\partial t}$) z czasem się zmienia w każdym punkcie zależnie od ~~w skutek pewnej~~ danego rozkładu miejscowego pewnych wielkości w otoczeniu tego punktu.

~~Z tego~~ Pojęcie „prawdziwego ładunku" wynika z zastosowania operacyi div do równania I, co daje według ~~pewnego prąd całkowity~~

div $C=0$ to znaczy że prąd całkowity jest zawsze rozłożony „solenoidalnie"

( ) czyli $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\,\mathrm{div}\,\mathfrak{D}}{\partial t} = + \mathrm{div}\, i$

a więc, ~~według znaczenia fizycznego~~ ponieważ div i znaczy nadmiar ~~wektora i wpływającego~~ prądu i wypływającego ponad ~~wchodzący~~ wpływający (str. ...), wyrażenie $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{-\mathrm{div}\,\mathfrak{D}}{4\pi}\right)$ oznacza ubytek elektryczności wpływającej podczas 1 sec, zatem $-\frac{\mathrm{div}\,\mathfrak{D}}{4\pi} = -\frac{K\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E}}{4\pi} = \rho_w$ rzeczywisty chwilowy nabój elektr. zawarty w jedności ~~elektr~~ objętości czyli gęstość jego ρ_w

Podstawiając prawo Ohma $i=\lambda\mathfrak{E}$ otrzymalibyśmy z ( ):

$$\frac{\partial \rho_w}{\partial t} = -4\pi\lambda\,\rho_w \quad \text{a przez całkowanie} \quad \rho_w = \rho_{w0}\, e^{-\frac{4\pi\lambda}{K} t}$$

czyli (wygasanie (zanikanie) wszystkich nabojów przestrzennych w razie spoczynku w skutek przewodnictwa naturalnego.

18
13

W rzeczywistości ~~występuje różnica warunków~~ mogą ~~się~~ (powstać) ~~także~~ ~~wytwarzają~~ naboje ~~przestrzenne~~ prawdopodobnie 1). w razie ~~warunków~~ ruchów systemu nie objętych temi równaniami 2). w razie ~~istnienia sił~~ zjawisk elektrochemicznych i termoelektr. i elektr. termicz. itp. które również wychodzą poza obręb tych równań.

Pojęcie naboju powierzchniowego wynika jako pojęcie graniczne przez całkowanie zsumowanie całego naboju przestrzennego w nieskończenie cienkiej warstwie granicznej utrzymując definicyę $\rho_e = \operatorname{div} \mathfrak{D} = \operatorname{div} K\mathfrak{E}$ także we warstwach przejściowych między dwoma środkami (patrz str.

$$\sigma_e = \frac{1}{dS}\int^{dS} \rho_e \, dv = \int \frac{\partial(\mathfrak{D}_n)}{\partial n} dn = (\mathfrak{D}_{1n} + \mathfrak{D}_{2n}) = K_1 \mathfrak{E}_{1n} + K_2 \mathfrak{E}_{2n}$$ co będzie różne od zero

W tym wywodzie już użyto implicite założenia (a zatem też siły itd.) że styczne składowe polaryzacyi dielektr. są ~~jednakowe~~ z obu stron powierzchni granicznej. Wynika to z zasady ciągłości przejść p... :

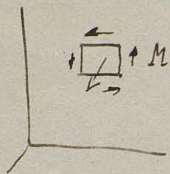
w razie jeśliby wektor $\mathfrak{D}$ doznawał nagłej zmiany ciągłości przy przejściu przez

~~Zauważmy~~ Zakładając że te równania także w warstwach przejściowych gdzie K i ... są zmienne ważne pozostają ~~oraz że żadna z ... ~~ ~~... ... ... $d\sigma$ i całkujemy składowe ... ~~ ~~$\mathfrak{E}$ ... $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$ ... jest nieskończenie~~ ~~zmienne~~ zastosujemy je do ~~tej~~ krawędzi powierzchni ~~...~~ w ~~kształcie~~ taśmy której ~~brzegi~~ są Dalej: Obliczamy wartość całki

~~...~~ $\int \mathfrak{E} \, ds$ dla drogi zamkniętej, złożonej z dwóch krzywych nieskończenie blisko siebie wzdłuż powierzchni granicznej przebiegających, co według Stokesa str.

$\int \mathfrak{E} \, ds = \iint \operatorname{curl} \mathfrak{E} \, d\sigma =$ Gdyby n.p. w pewnym kierunku styczne $\mathfrak{E}_{1t}$ $\mathfrak{E}_{2t}$ były różne, to ~~całka~~ praca ($\int \mathfrak{E} \, ds$ wykonana przy okrążeniu dla drogi skończonej ~~...~~), wzdłuż powierzchni w jednym ośrodku i z powrotem w nieskończenie małej odległości w drugim ośrodku, musiałaby być różna od zera, podczas gdy w rzeczywistości z twierdzenia Stokes. wynika że ta całka

$= \int \operatorname{curl} \mathfrak{E} \, d\sigma$ musi być $= 0$, gdyż cała powierzchnia taśmy ~~paska~~ w ten sposób utworzonej:



$$4\pi w \, dx\,dy = (M' - M)\,dy - (L' - L)\,dx$$

$$\left.\begin{cases} 4\pi w = \dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial y} \\ 4\pi u = \dfrac{\partial N}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial z} \\ 4\pi v = \end{cases}\right\} \quad 4\pi \mathfrak{i} = \overset{\text{rot}}{\cancel{\text{curl}}}\, \mathfrak{H}$$

Albo także $\qquad \mathfrak{H} = \text{rot}\, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{A} = \text{pot}\, c$

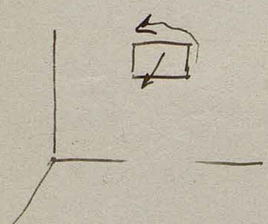
$$\text{rot}\, \mathfrak{H} = \text{rot}^2 \mathfrak{A} = \nabla\, \text{div} - \nabla^2 \mathfrak{A} = -\nabla^2 \mathfrak{A} = 4\pi \mathfrak{i}$$

[Można zawsze tak urządzić żeby $\text{div}\, \mathfrak{A} = 0$ bo można zawsze zmienić także $\mathfrak{A} = \int \frac{\Delta \mathfrak{U}}{2}$ którego curl $\mathfrak{A} = 0$]

$e = -\dfrac{dp}{dt} \qquad p =$ liczba linij

$= -\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int \mu H_n\, df$

dodatnie to które wpada na stronę północną widzianą obiegamy zgodnie z wskazówką zegara



$$(Y' - Y)\,dy - (X' - X)\,dx = -\mu \frac{\partial N}{\partial t}\,dx\,dy$$

$$\left.\begin{matrix} -\mu \dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} \\ \vdots \end{matrix}\right\} \quad \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\text{curl}\, \mathfrak{E}$$

jeżeli

$$\frac{4\pi J}{c} = \text{rot}\, \mathfrak{H}$$

Albo także: $\displaystyle\int \mathfrak{E}\, ds = -\frac{\partial}{\partial t}\int \cancel{\text{curl}} (\mathfrak{H} N)\, dS = \int (\text{curl}\, \mathfrak{E} \cdot N)\, dS$

$$\text{curl}\, \mathfrak{E} = -\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$$

$$J = \lambda (X' - X) + 4\pi K \frac{\partial Y}{\partial t}$$

$4\pi J = \operatorname{curl} \mathfrak{f}$

$\operatorname{div} J = 0$ $\qquad J = K \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi\lambda \mathfrak{E}$

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{div} K\mathfrak{E} &= \rho_w \cdot 4\pi \\ K \operatorname{div} \mathfrak{E} &= \rho_w \cdot 4\pi\end{aligned}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \cancel{K \operatorname{div}} (\operatorname{div} K \mathfrak{E}) = - 4\pi\lambda \operatorname{div} \mathfrak{E}$$

$$\frac{\partial \rho_w}{\partial t} = - \frac{4\pi\lambda}{K} \rho_w$$

$$4\pi \underline{\underline{\sigma_w}} = \lim \frac{1}{dS} \int^{dS} \rho_w \, dv = \frac{1}{dS} \int^{dS} \operatorname{div} K\mathfrak{E} \, dv = K_1 \mathfrak{E}_{1n} + K_2 \mathfrak{E}_{2n}$$

równania ważne także w razie zmiennych μ K λ zatem

styczne składowe ciągłe

normalne mogą być nieciągłe

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ L & M & N \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} L & M & N \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} Y & Z \\ M & N \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \begin{vmatrix} Z & X \\ N & L \end{vmatrix}$$

$$\cancel{Y \frac{\partial N}{\partial x}} \qquad X \frac{\partial N}{\partial y} + N \frac{\partial X}{\partial y}$$

$\int dS$ jest nieskończenie mała, a curl ζ według (II) wszędzie musi mieć skończoną wartość jeśli dla ζ i $\mathfrak{H}$ dopuszczamy tylko skończone wartości jako możliwe (fizycznej wielkości)

W taki sam sposób wynika z równania (I) ciągłość ~~stycz~~ składowych stycznych siły magnet. i indukcji.

~~Więc ...~~ Nie można jednak udowodnić ~~takim~~ sposobem żeby także odpowiednie składowe normalne ζ_n ($\mathfrak{D}_n$) $\mathfrak{H}_n$ ($\mathfrak{B}_n$) musiały być równe z obu stron — i w ogólności one nie będą jednakowe. ~~...~~

Obliczymy przedewszystkiem jeszcze czasową zmienność ~~zmianę~~ energii całkowitej $\iiint W dv$ zawartej w pewnym obrębie przestrzeni: Mamy z

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint W\, dv = \frac{1}{8\pi}\iiint \left[K\zeta\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mu\mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right] dv \quad \text{a według I II:}$$

$$= \iiint [\zeta \operatorname{curl} \mathfrak{H} - \mathfrak{H} \operatorname{curl} \zeta - \lambda \zeta^2]\, dv$$

Pierwsze dwa składniki całki ~~według wzoru~~ ( ) można połączyć zapomocą twierdzenia

$\mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{B} - \mathfrak{B} \operatorname{curl} \mathfrak{A} = \operatorname{div} [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$, które łatwo udowodnić przez rozwinięcie

~~spółczynników obu stron według składowych, Tak np. składowa~~

symbolów $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 \end{vmatrix}$ co z jednej i drugiej strony daje $= A_1\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial z}\right) + \ldots$

$- \mathfrak{A}_1\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \ldots$

Przy pomocy twierdzenia Gaussa — czy też posługując się za przeznaczeniem symbolu div str. ( ) otrzymujemy zatem

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\iiint \lambda \zeta^2\, dv - \iint [\mathfrak{H}\zeta]\, dS$$

~~Wyrażony składnik~~

*) źródłami energii są n. p. ogniwa galw. które jak wynika z tego rozpatrywania zatem wytwarzają

10

16

Energia zawarta w obrębie danym zmienia zmniejsza się zatem z dwóch powodów: część ~~zamienia się w energię~~ zużywa się wskutek przewodnictwa materyału d ~~[illegible]~~ jest to ta część która występuje jako ~~to~~ (ciepło Joulea dQ na cm³ objętości, ~~a oprócz tego wskutek~~ część energii zaś ~~zmienia~~ ubywa lub przybywa tak jak gdyby ~~istniał prąd energii w natężeniu~~ [ ] przez ~~[illegible]~~ powierzchnię obrębu przepływało

ilość [ ] energii przepływało przez każdy cm² powierzchni obrębu badanego.

Poynting na tej podstawie przyjął że energia w polu elektromagn. płynie ~~jak substancya płynna~~ w kierunku normalnym do kierunków ~~pól~~ siły elektrycznej i magnetycznej a natężenie prądu określone jest iloczynem HE sin(E, H). ~~[illegible]~~

~~W~~ ~~[illegible]~~ ~~albo lepiej drut otoczony [illegible]~~

W otoczeniu drutu (przez który przepływa prąd elektryczny ~~energia~~ linie siły [magnet. ~~[illegible]~~ ~~oddalonego od wszelkich innych [illegible]~~ Fig.

kołami współśrodkowemi normalnemi do osi drutu a ~~[illegible]~~ ~~siła elektr.~~

Abraham 363

~~jest mniej więcej prostopadła do powierzchni drutu~~ [~~[illegible]~~ wskutek jednostajnego [~~wskutek istnienia~~ ładunku na powierzchni drutu] w związku z istnieniem ~~spadu potencyału wzdłuż osi drutu~~

podczas gdy wewnątrz drutu siła elektr. jest równoległa do osi drutu.

Prąd energii (w otaczającym dielektrykum płynie ~~jest~~ zatem) wzdłuż drutu, nieco ku niemu zbieżnie, przekroczywszy powierzchnię drutu wpływa (normalnie do ~~[illegible]~~ wnętrza i tam

zamienia się w ciepło Joulea.

Trzeba zauważyć, że wniosek Poyntinga ~~nie~~ jest poniekąd hypotetyczny gdyż z równem prawem ~~można~~ do wyrażenia $\nabla \xi \zeta$ możnaby (dodać różne takie składniki ~~któreby [illegible]~~ któreby zniknęły przy całkowaniu ~~nie zmieniłyby wartości całki~~ ( ) dla powierzchni zamkniętej [por. Ampère, Abt. ...]

ale ~~jest to~~ między temi możliwemi ~~[illegible]~~ rozwiązaniami Poynting przyjął jest najprostsze ~~[illegible]~~ i nadające się ogólnie (w teoryi elektronów) ~~i promieniowania~~

11

a przy ~~do którego~~ obliczenia zmian energii danego obszaru – ~~przy czem~~ wynik zawsze ~~będzie~~ musi być ścisły. (do czego często okazuje się bardzo przydatne (w tych zał. i pos.))

17

Najpierwsze zjawisko otrzymamy w razie niezmiennego stanu pola elektr. jeżeli energ. W całej przestrzeni zawarta się nie zmienia. Robiąc założenie że mamy do czynienia tylko z stacyonarnem polem fizycznem t.zw. że J, E muszą być nierk. małe jak [illegible] w nierk. uwalniamy się od danych elektr. w ( ). Aby ~~Energja będzie zatem~~ pozostała ~~niezmienną~~ niezmienną, siła elektr. E musi ~~zatem~~ być zero we wszystkich przewodnikach, czyli nie mogą istnieć prądy galwaniczne. To znaczy jeżeli $\frac{dY}{\partial t} = \frac{dY}{dt} = 0$

dielektr....

~~[illegible]~~

II). Daje równanie $\mathrm{curl}\, E = 0$

z czego wynika według ( ) że E ~~jest siłą potencyalną~~ posiada potencyał skalarny : $E = -\nabla U$

czyli $U = \int \frac{\mathrm{div}\, E}{4\pi r} dv$ co w razie jeżeli przestrzeń ~~wypełniona jest~~ ~~całkiem~~ dielektrykiem o stałej K równa się $U = \int \frac{\rho\omega}{K r} dv$

zatem potencyał odpowiadający siłom Newtonowskim. Prawo Coulomba wynika tu zatem jako konsekwencya równania curl 0 ...

~~Oraz zastosowanie operacyi div~~

Rozróżniamy wtedy dwa przypadki:

I). Energja nie zostaje rozproszona ~~w~~ wskutek wytworzenia ciepła Joule'a – co wymaga aby we wszystkich przewodnikach siła elektr. była zero. Wynika zatem tak samo dla wnętrza przewodników jak i izolatorów nie posiadających ładunków przestrzennych $\nabla^2 U = 0$

4). ~~zasadnicze~~ równanie Laplace'a ~~potencyału elektrostatycznego~~ którego w połączeniu z pojęciem gęstości σ i z warunkami granicznemi ( ) określa rozkład elektr. i potencyału w ten sam sposób jak to w § – przedstawiono. Siły mechaniczne ~~doznawane~~ przez ciała ~~[illegible]~~ w polu elektrost. się znajdujące wynikają z zasady energii podobnie jak w § ....

(także wynik z pojęcia E –)

Zupełnie analogicznie curl $\mathfrak{H}=0$ teorya magnetyzmu (tylko że nie ma magnetycznych przewodników) dla siły elektr.) 12

18

II). W razie trwałych prądów elektr. (pozostaje wszędzie równanie $\nabla^2 U=0$ tylko warunki graniczne się zmieniają § gdyż powierzchnia konduktora nie musi być pow. ekwipotencyalną.

Siły magnetyczne są określone równaniem $\text{curl}\,\mathfrak{H} = 4\pi \mathfrak{J}$

które przy zastosowaniu operacyi curl daje wektory:

$$\text{curl}^2 \mathfrak{H} = \nabla \,\text{div}\, \mathfrak{H} - \nabla^2 \mathfrak{H} = 4\pi \,\text{curl}\, \mathfrak{J}$$

Ponieważ według Maxwella nie ma wszechstronnego magnetyzmu t. zn. $\text{div}\, \mathfrak{B}=0$, więc także (w obrębie ciał o stałem μ) $\text{div}\,\mathfrak{H}=0$ i powyższe równanie rozpada się zatem na trzy składowe $\nabla^2 L = 4\pi \left(\dfrac{\partial J_2}{\partial y} - \dfrac{\partial J_3}{\partial z}\right)$ i t. d.

a przez całkowanie na zasadzie teoryi potencyału otrzymuje się

$$L = \int \frac{\nabla^2 L}{4\pi r}\, dv = \frac{\partial}{\partial y}\int \frac{J_2}{r}\, dv - \frac{\partial}{\partial z}\int \frac{J_3}{r}$$

wraz z odpowiedniemi równaniami o M i N, które znów wszystkie połączyć można w jeden symbol: $\mathfrak{H} = -\text{curl}\, \mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\mathfrak{J}}{r}\, dv \quad \text{(potencyał wektorowy)}$$

elementu nachylenia α $\delta\mathfrak{J}$

W razie prądów przepływających przez druty o przekroju q, ~~w którym stałe~~ otrzymuje się składowe wielkości $J_1 dv = J \cos\alpha \; q\, ds = i \cos\alpha \, ds = i\, dx$ i t. d. i odnajduje się tym sposobem wzory wyprowadzone w §

z których znów odwrotną drogą jak tam można dojść do prawa Biot Savarta dla elementów przewodnika liniowego ( ) ‖ także bezpośrednio?

Siły mechaniczne wywierane przez jedne prądy na drugie wynikają z zasady energii

Zastrzeżenia co do ferromagnetyzmu

Rozważmy tylko energię magnetyczną

$$W_m = \int \mathfrak{H}^2 dv = -\int \mathfrak{H}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}\, dv$$

co analogicznie jak w   na mocy prawa div $\nabla \mathfrak{A}\mathfrak{H} = \mathfrak{A}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{H} + \mathfrak{H}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}$

i prawa Gaussa przekształcamy w

$$W_m = -\int \nabla \mathfrak{A}\mathfrak{H}\, dS + \int \mathfrak{A}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{H}\, dv$$

Pierwsza całka znika jeśli powierzchnię S oddalimy do nieskończoności, t.j. jeśli obejmiemy energię całej przestrzeni, a druga wskutek zasadniczego równania I przechodzi w

$$W_m = \int \mathfrak{A}\, J\, dv = \int \frac{J_1 J_2}{r}\, dv_1\, dv_2$$

co w razie drutów prądów liniowych wskutek $J_1 J_2\, dv_1\, dv_2 = i_1 i_2\, ds_1\, ds_2 \cos\varepsilon$

~~[illegible]~~ się zamienia na $M i_1 i_2$

części odnoszące się do własnych przewodów przy pomocy podobnej argumentacji jak w § wyrażają się na $L_1 \frac{i_1^2}{2}$ $L_2 \frac{i_2^2}{2}$ tak że odnajdujemy znów odpowiedni wzór ( )

~~III). Przy tej uwagę godzi że obecnie nie ma miejsca dla trwałego magnetyzmu, gdyż u Maxwella nie ma magnetyzmu zasadniczego, więc pole powstaje jedynie wskutek działania prądów elektr.~~

III). Przejdźmy do stanów pola zmiennych czyli „quasi stationäre Zustände" t.j. takich pól zmiennych że czynnik $K \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$ można zupełnie pominąć wobec innych wielkości w równaniu I.

Siły ~~elektryczne~~ magnetyczne stąd w każdej chwili będą rozłożone według tych samych zasad co w przypadku II, ale co do sił elektr. występują zmiany gdyż mamy

curl $\mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$

więc siła $\mathfrak{E}$ ~~nie jest już~~ oprócz części skalarno potencyalnej posiada też część wektorowo potencyalną.

~~Tedy~~ Wprowadzając $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} = \mu$ curl $\mathfrak{A}$

otrzymujemy zatem ogólnie $\mathfrak{E} = \nabla U + \mu \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$

Obliczając ~~[illegible]~~ całkowitą siłę elektromot. indukowaną w przewodzie zamkniętym:

$$\int \mathfrak{E}\, ds = \int \text{curl}\, \mathfrak{E}\, dS = -\int \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\, dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathfrak{B}\, dS$$

dochodzimy do ogólnej zasady indukcyi według której wielkość owej siły równa się ubytkowi ilości linij siły $\int \mathfrak{B}\, dS$

[Tymczasem udowodniliśmy ją wprawdzie tylko dla ~~indukcyi pochodzącej od zmiany pola~~ przewodników nieruchomych, gdyż tylko do tych się stosują równania Maxw. w formie]

Przechodzimy do przypadku ~~zmian~~ w stanie pola tak szybkich że czynnik $K\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$ wchodzi w rachubę – i to są właśnie dziedziny zjawisk ~~[illegible]~~ w których się okazuje wyższość teoryi Maxwella ~~[illegible]~~ ponad teoryą Webera i.t.p. Zajmujemy się najpierw specyalnym przypadkiem że substancya znajdująca się w polu jest izolatorem, więc:

$$K\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \text{curl}\, \mathfrak{H}$$

$$\mu\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\text{curl}\, \mathfrak{E}$$

Różniczkując pierwsze równanie względem czasu, a ~~traktując operację symbolu curl do drugiego~~ podstawiając ~~drugie~~ $\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$ z drugiego równania otrzymujemy [lub w spółrzędnych prostokątnych:

$K \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = \mathrm{curl}\, \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\, \mathrm{curl}\, \mathrm{curl}\, \mathfrak{E}$ czyli ~~sprowadzony na~~ wyrażając dwukrotny według reguły ( ) i warunek $\mathrm{div}\, \mathfrak{E} = 0$ (...)

$= -\frac{1}{\mu}(\nabla \mathrm{div} - \nabla^2 \mathfrak{E})$

a co na początku wzór składowych itp.

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu K} \nabla^2 \mathfrak{E} = v^2 \nabla^2 \mathfrak{E}$$

lub rozpisując składowe (oznaczając dla krótkości $\frac{1}{\mu K} = v^2$):

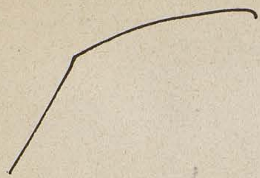
$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} =$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} =$$

Zupełnie identyczną formę równania otrzymuje się dla $\mathfrak{H}$ za pomocą ~~[illegible]~~ różniczkowania II względem t, a podstawienia I (lub wprost z powodu symetrii)

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \mathfrak{H}$$



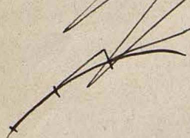
~~$v = \frac{dr}{dt}$~~

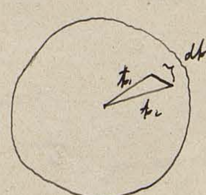
Vector krzywej stycznej:

$$t = \frac{dv}{ds} \qquad (\text{Tensor } t = 1$$

$$\frac{d^2v}{ds^2} = \frac{dt}{ds}$$ ↘ położony w płaszczyźnie ściśle stycznej $\perp$ do s

~~$\frac{ds}{dt} = R$~~





$$\text{Tensor } dt = d\varphi$$

$$\text{Tensor}\left(\frac{dt}{ds}\right) = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R}$$

$$\frac{d^2v}{ds^2} = \frac{1}{R} \cdot UR =$$

$$\mathfrak{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds} = v \cdot t$$

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot t + \cancel{v\frac{d^2v}{ds^2}}\; v \underbrace{\frac{dt}{dt}}_{= \frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}} = \frac{v^2}{R} \cdot U(R)$$

Zależności od czasu $\frac{d}{dt}$

od miejsca w przestrzeni $\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$

Pochodnych wektory wektorów nie możemy tworzyć bo nie określiliśmy wcale znaczenia ilorazu, ale także nie potrzeba tego w praktyce, bo powyższa operacja to zastępuje.

Co otrzymujemy zastosując to do funkcji skalarnej n.p. $U(xyz)$

$$\nabla U = i\frac{\partial U}{\partial x} + j\frac{\partial U}{\partial y} + k\frac{\partial U}{\partial z} = -(iX + jY + kZ) = -P$$

[w ogóle otrzymujemy wektor ~~...~~ w kierunku największej zmienności, oznaczający tę zmienność.

Jakie znaczenie?

$$dr = i\,dx + j\,dy + k\,dz$$

$$S.dr.\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU$$

Więc jeśli sobie wykreślam kierunki ~~gdzie~~ dla tak że $dU = 0$ to ~~...~~ widzimy że ∇U prostopadłe do nich. Więc kierunek zmiany największej.

Jeśli $U =$ ~~potencjał~~ praca (energia potencjalna) to $\nabla U =$ Siła $=$

Do wektorów tylko

$S\nabla\mathfrak{a} = \mathrm{div}\,\mathfrak{a}$ $\qquad V\nabla\mathfrak{a} = \mathrm{curl}\,\mathfrak{a}$

N.p. ~~div v~~

$$\mathfrak{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k \qquad \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} = f_{\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}}(xyz)$$

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$$

hydrodynamiczne uzmysłowienie obfitości źródła

$$\text{N.p. } \mathrm{div}\,v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$V\nabla\mathfrak{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

mechaniczne uzmysłowienie:

$$v = v_0 + V\omega r$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \begin{vmatrix}\omega_2 & \omega_3 \\ r_2 & r_3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\omega_3 & \omega_1 \\ r_3 & r_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\omega_1 & \omega_2 \\ r_1 & r_2\end{vmatrix} \end{vmatrix} = \ldots 2\omega$$

tak samo w cieczach jeśli cząstkę sobie wyobrażamy zestaloną prędkość wirowa

$$V\nabla v = 0$$

~~div r~~ $\operatorname{div} r = 3$ $\operatorname{div}\operatorname{curl} = 0$

Dwa razy

$\cancel{\operatorname{curl}\nabla\mathfrak{A}}$ $\operatorname{curl}\nabla U = 0$

$$\operatorname{div}\nabla U = \nabla^2 U = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdots U$$

$$\operatorname{div}\operatorname{curl}\mathfrak{A} = 0$$

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathfrak{A} = i\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\right\} + \cdots$$

$$= i\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2}\right)\right] + \cdots$$

$$= \nabla\operatorname{div}\mathfrak{A} - \nabla^2\mathfrak{A}$$

Całki: $\;\mathcal{I}_1^2 =$

dl $\quad \cancel{\int} \int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{S}\,\mathfrak{A}\,dl =$ całka liniowa

Jeśli wartość niezależna od kształtu drogi to całka okrężna $= 0$

$$V = -U$$

$$\mathcal{I}_1^2 = V_2 - V_1 = U_1 - U_2$$

$$d\mathfrak{A} = i\,dA_1 + j\,dA_2 + k\,dA_3 \qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + d\mathfrak{A}$$

$$\begin{array}{ccc} i & j & k \\ \operatorname{curl}_1 & \operatorname{curl}_2 & \operatorname{curl}_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{array}$$

dla r w miejsce nabla

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{2}\left[\nabla\mathfrak{S}\,\mathfrak{A}\,r + V(\operatorname{curl}\mathfrak{A}\cdot r)\right]$$

$$i\left\{\frac{\partial}{\partial x}(A_1 r_1 + A_2 r_2 + A_3 r_3) + \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} & \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \\ r_2 & r_3 \end{array}\right] - \frac{\partial}{\partial z}\right.$$

$$= i\left[A_1 + r_1\frac{\partial A_1}{\partial x} + r_2\frac{\partial A_2}{\partial x} + r_3\frac{\partial A_3}{\partial x} + r_3\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + r_2\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\right.$$

$$= i\left[\overset{A_{01}+}{A_1} + r_1\frac{\partial A_1}{\partial x} + r_2\frac{\partial A_1}{\partial y} + r_3\frac{\partial A_1}{\partial z}\right] = i\left[A_{01} + A_1 + dA_1\right] = 2iA_1$$

Całka liniowa 

$$I_{\circlearrowleft} = \frac{1}{2}\oint \underbrace{S[\mathfrak{A}_0 + \nabla \mathfrak{A} r}_{=0} + V \,\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}.r]\, dr$$

$$= \frac{1}{2}\int S\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}\, V r\, dr$$

Średnia wartość $\mathrm{curl}\,\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ $\quad = S\mathfrak{B}\ \frac{1}{2}\int V r\, dr = df\, S\,\mathfrak{B} N$

Takoż samo ogólnie $\quad I = \cancel{\int S\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}.\, N}\ \underbrace{\int S N\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}.\, df}_{\text{całka powierzchniowa}}$

$$\oint \mathfrak{A}\, dr$$

Nad powierzchnią zamkniętą $=0$

Twierdzenie Stokesa

Pisząc za pomocą składowych:

$$\oint a_1\, dx + a_2\, dy + a_3\, dz = \int \left[\cos nx.\left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right) + \cdots\right] df$$

Przestrzeń rozdzielamy w elementy

i otrzymujemy: $\int S N \mathfrak{A}.\, df = \Sigma\, S N \mathfrak{A}\, df = \int \mathrm{div}\, \mathfrak{A}.\, dv$

Jeśli wszędzie więc $\mathrm{div}\, \mathfrak{A} = 0$ to $\int S N \mathfrak{A}.\, df = 0$ nad powierzchnią zamkniętą

N.p. jeśli $\mathfrak{A} = \mathrm{curl}\, \mathfrak{B}$ $\quad \int S N\, \mathrm{curl}\, \mathfrak{B}.\, df = 0$

Rozkład potencyalny
Jeśli $\int \mathfrak{A} ds = U_1 - U_2$ niezależny od drogi; skończony wartości } U funkcya jednowartościowa nic osobliwego
$\mathfrak{A} = \nabla U$ $\int \mathfrak{A} ds = dU$ ~~$\int \nabla U\, ds$~~
$$\iint S\,\mathfrak{A}\,n.\,df = \iiint dv\,\mathrm{div}\,\mathfrak{A} = \iiint dv.\,\nabla^2 U$$
przedstawione przez linie $\mathfrak{A}$ nie ma linii zamkniętych, [Oprócz specyalny przypadek gdzie $\mathfrak{A}$ staje się 0]
$\mathrm{div}\,\mathfrak{A} = \nabla^2 U$

~~$U = \int \frac{\nabla^2 U}{4\pi r}\,dv$~~

$d\mathfrak{A} = \frac{\mathrm{div}\,\mathfrak{A}}{4\pi r^3}\,dv.\,r$ | $dV = \int_0^\infty dv$
$\mathfrak{A} = \int \frac{\mathrm{div}\,\mathfrak{A}.\,dv}{4\pi r^3}\,r$

Czy można odwrotnie wypowiedzieć coś co do funkcyi U?

Rozwiązanie jednoznaczne możliwe jeśli dane wszędzie $\mathrm{div}\,\mathfrak{A} = \nabla^2 U$
i jeśli dane wartości U albo ∇U na powierzchni

Bo wiemy że $\nabla^2 B = 0$
$B = 0$ na powierzchni } więc $B = 0$ wszędzie

Cz...? ~~Znaczy możemy ograniczyć takie..~~
~~gdzie~~ ~~$\iiint \nabla^2 U\, dv$~~
Bo linie $\mathfrak{A}$ albo przechodzące albo kończące się
niemożliwe z powodu pow. niemożliwe z powodu $\nabla^2 U$

~~Jeśli więc stawiamy:~~
~~$U = \int \frac{\nabla^2 U}{4\pi r}\,dv + A$~~

Może jednak istnieć funkcya A taka że $\nabla^2 A = 0$
A przepisane wartości na powierzchni
~~że można zawsze znaleźć~~
że zawsze istnieje taka funkcya A wypowiada twierdzenie Dirichleta dla dowolnych

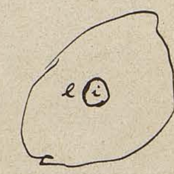
---

W ogólnym wypadku ~~stawiamy~~ gdzie $\nabla^2 U = f(xyz)$
$\mathfrak{A}$ przepisane wartości
stawiamy $U = \int \frac{f(xyz)}{4\pi r}\,dv + A$ gdzie A = funkcya rodzaju przedtem omawianego

Ta funkcya będzie zadość czynić równaniu $\nabla^2 U = f(xyz)$

Bo: $\nabla^2 A = 0$ $\qquad -\frac{\nabla^2 U}{4\pi} = \rho$

$$\nabla^2 \int \frac{f(xyz)}{4\pi r} dv \qquad \nabla^2 \int \frac{\rho\, dv}{r} = \operatorname{div} \nabla \int \frac{\rho\, dv}{r}$$



$$= \nabla^2 \int_i \frac{\rho\, dv}{r} + \nabla^2 \underbrace{\int_e \frac{\rho\, dv}{r}}_{=0} \quad \text{bo } \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

$$\| $$

$$= \operatorname{div} \underbrace{\nabla \int \frac{\rho\, dv}{r}}_{\text{można wyrachować} \; = \int \frac{\rho\, dv}{R}} = -\frac{1}{dv} \frac{\int \rho\, dv}{R^2} 4\pi R^2 = -4\pi\rho$$

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{R}{R^2}$$

bo na nieskończ. mało elementy: $\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{1}{dv} \int \mathfrak{A} n\, df$

więc $\nabla^2 \int \frac{f(xyz)}{4\pi r} dv = -4\pi\rho = +\nabla^2 U = f(xyz)$

Oprócz tego jeśli przyjmujemy twierdzenie Dirichleta musi się dać obrać A w ten sposób że takie warunki powierzchniowe spełnione. Więc będzie to rozwiązanie.

Gdyby istniało także jeszcze drugie U' to musi ono być takie $\nabla^2 U' = f(xyz)$

zatem $\nabla^2 (U - U') = 0$

i $\nabla (U - U') = 0$ na powierzchni

zatem $U - U' = 0 \qquad U = U'$

Rozkład wirowy

~~$\int \mathfrak{A}\, ds$ zależna od kształtu drogi; $\int\limits_{\circlearrowleft} = \iint df \cdot S \cdot N\, \mathrm{curl}\, \mathfrak{A}$~~

~~ograniczając się teraz do elementów nieskończ. małych: $\int\limits_{\circlearrowleft} S\,\mathfrak{A}\, ds = df \cdot \mathrm{curl}\, \mathfrak{A}$.~~

~~prostopadłych do kierunku curla~~

~~Twierdzę że wtedy $\cancel{\mathfrak{A} = \mathrm{curl}\, \mathfrak{L}} + \nabla \mathfrak{A}$~~

~~i że $\mathfrak{A}$ można wyznaczyć jeśli dana wartość $\mathrm{curl}\, \mathfrak{A}$ a oprócz tego~~

~~mianowicie: $\cancel{\mathfrak{A} = \mathrm{curl} \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathrm{curl}\, \mathfrak{A}}{r} dv +}$~~

Jeśli $\mathfrak{A} = \mathrm{curl}\, \mathfrak{L}$ =

$$\int S\, \mathfrak{A}\, ds = \iint df \cdot S \cdot N\, \mathrm{curl}\, \mathfrak{A} = \iint df\, S \cdot N\, \mathrm{curl}^2 \mathfrak{L}$$

Twierdzę że $\mathfrak{A}$ całkiem oznaczone jeśli dane wszędzie $\mathrm{curl}\, \mathfrak{A}$ i wartości $\mathfrak{A}$ na powierzchni:

Mianowicie że: $\mathfrak{A} = \mathrm{curl} \int \frac{\mathrm{curl}\, \mathfrak{A}}{4\pi r} dv + \nabla A$

~~jeśli się operuje curl:~~
~~Istotnie to się rozkłada w 3 składowe~~

~~$\mathrm{curl}\, \mathfrak{A} = \mathrm{curl}^2 \int \ldots = \nabla \mathrm{div} \int - \nabla^2 \int$~~

wyrażenia tego rodzaju $\mathfrak{G} = \int \frac{\mathrm{curl}\, \mathfrak{A}}{r} dv$ nazywamy potencjałem wektorowym

Twierdzimy że $\mathrm{div}\, \mathfrak{G} = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right)}{r} dv + \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}}{r} dv + \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}}{r} dv$$

Rozkład wirowy v $\quad$ linii zamkniętej $\int$ zależne od dyr. $\quad \oint = \iint$ curl v

Jak możemy utworzyć coś podobnego?

Jeżeli mamy funkcję skalarową U

to tylko jedna operacja możliwa ∇U, tak otrzymujemy jednak rozkład potencjalny

więc będzie trzeba wyjść z funkcji wektorowej. div nie, bo = skalarne

więc chyba curl

~~v = curl $\mathfrak{L}$~~

$v = \text{curl}\, \mathfrak{A}$

Jeżeli v dane, to $\mathfrak{A}$ naturalnie jeszcze będzie w pewnej stopnie dowolne, bo stała całkowania

można dodać $\mathfrak{A}_0$ gdzie $\text{curl}\, \mathfrak{A}_0 = 0$ $\quad$ n. p. $\mathfrak{A}_0 = \nabla$ potencyał

więc też div $\mathfrak{A}$ dowolne wartości

najprościejsze rozwiązanie jeżeli ~~takie~~ div $\mathfrak{A} = 0$

przez te warunki (i wartości na powierzchni) $\mathfrak{A}$ będzie oznaczone bo gdyby było inne rozwiązanie, to

$v = \text{curl}\, \mathfrak{L} \qquad \text{div}\, \mathfrak{L} = 0$

to $\quad 0 = \text{curl}\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{L}) \qquad \text{div}\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{L}) = 0 \qquad (\mathfrak{A} - \mathfrak{L})$ na powierzchni $= 0$

$\mathfrak{A}$ nazywamy potencyałem wektorowym

$\text{div}\, v = 0$

$\underbrace{\text{curl}\, v}_{w} = \text{curl}^2 \mathfrak{A} = \nabla \text{div}\, \mathfrak{A} - \nabla^2 \mathfrak{A} = -\nabla^2 \mathfrak{A}$

$$\left.\begin{aligned} -w_1 &= \nabla^2 A_1 & A_1 &= \int \frac{w_1}{4\pi r}\, dv \\ -w_2 &= \nabla^2 A_2 & A_2 &= \int \frac{w_2}{\cdot} \\ -w_3 &= \nabla^2 A_3 & A_3 &= \int \cdots \end{aligned}\right\} \qquad \mathfrak{A} = \int \frac{w}{4\pi r}\, dv = \int \frac{\text{curl}\, v}{4\pi r}\, dv$$

W szczególnym przypadku jeżeli tylko jedna linia wirowa $\quad dv = i\, ds$

$\mathfrak{A} = \int \cdots$

$\oint \frac{ds}{r}$ ...

Ogólnie można rozłożyć

$\mathfrak{A} = X + Y$

$= \nabla U + \mathrm{curl}\, \mathfrak{W}$

$\mathrm{div}\, Z = \nabla^2 U \qquad \mathrm{curl}\, Z = \mathrm{curl}^2\, \mathfrak{W}$

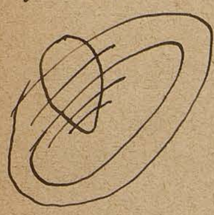
etc. $\mathfrak{A} = \underbrace{\nabla \int \frac{\mathrm{div}\,\mathfrak{A}}{4\pi r}\, dv}_{} + \mathrm{curl} \int \frac{\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}}{4\pi r}\, dv$

w tem już objęta funkcja A : $\nabla^2 A = 0$ etc.

Jeżeli całkowanie nad całą przestrzeń nieskończ., a $\mathfrak{A}$ nie sięga do nieskończ. wtedy $A = 0$

bo linie albo początki i końce albo zamknięte

Jeżeli jednak ~~pr~~ kawał przestrzeni gdzie nie ma ani końców ani $\odot$



to albo $A \qquad \nabla^2 A = 0$

albo $\nabla^2 U$

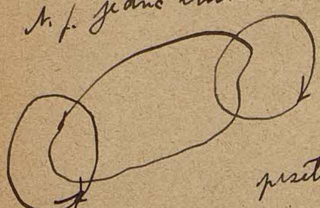
albo $\mathrm{curl}\, f$.

więc tam można $\mathfrak{A}$ wyrazić z A jako $\mathfrak{A} = \nabla A$ mimo że w ośrodku poza tym wszystek wirów

---

W ogóle: w miejscach gdzie nie ma curlu, także pole wirowe można wyrazić za pomocą potencjału

n. p. jedna linia wirowa



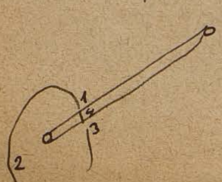
Wartość każdej z tych całek $\oint v\, ds = \iint \mathrm{curl}\, v .\, n .\, df$

$=$ tożsama $=$ ~~...~~ i

$=$

przestrzenny tensor system źródeł i upustów

powierzchniowy (Doppelschicht)



to całka ${}_2\!\int_1^3 + \int_3^1 = 0$ więc jeśli ϱ gęstość, h = grubość

$\varrho h = {}_2\!\int_1^3 = i$

można rozłożyć jedno przez drugie $\mathfrak{A} = \nabla W$

Wspólne co do teorji Maxwella:

Cohn Phys. ~~Zeitsch~~ 4 p. 619 (1903)

Lorentz Encyclop. d. 〃

$r^2 = (y-\eta)^2 + (x-\xi)^2 + \ldots$ 27

$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = 4\pi J$ $\quad$ $\mathfrak{H} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}$

$\mathfrak{A} = \int \frac{J}{r} d\sigma$

$F = \int i \frac{dx}{r} \qquad G = \qquad H =$

$L = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} = \int i \left(\frac{\eta - y}{r^3} dz - \frac{\zeta - z}{r^3} dy \right) = \int \frac{i\, ds}{r^2} (\cos ry \cos sz - \cos rz \cos sy)$

$M =$

$N =$

$\mathfrak{H} = \sum \frac{i}{r^2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\xi - x}{r} & \ldots & \ldots \\ dx & & \end{vmatrix} = \sum \frac{i}{r^3} V\, \mathfrak{r}\, d\sigma$

$d\mathfrak{H} = \frac{i}{r^2} V R\, d\sigma = \frac{i}{r^3} V \mathfrak{r}\, d\sigma$

Aby tylko rozłożyć pewne siły i które przechodzą...

$S \mathfrak{r} \mathfrak{H} = i \int S \frac{\mathfrak{r}}{r^3} V \mathfrak{r}\, d\sigma = i \int \frac{S\, d\sigma\, V \mathfrak{r} \mathfrak{r}}{r^3} = i \int d\omega = i \Delta\omega$

$= 3 \mathrm{Vol} = 3 d\omega\, r^2 \cdot \frac{r}{3}$

$\mathfrak{H} = \nabla i \omega$

Reakcya na prąd

$\mathfrak{f} = -\sum \frac{m\, i}{r^2} V R\, d\sigma = - i V \cdot \sum \frac{m R}{r^2} \cdot d\sigma = - i V \mathfrak{H}\, d\sigma$ $\quad$ Pierwszy ... reguła

Energia masy magnetycznej a prądu: $m\, i\, \omega = m\, i \int \frac{dF \cos n r}{r^2} = m\, i \int \frac{dF\, S n R}{r^2}$

$\sum m\, i\, \omega = i \int S \mathfrak{H} N\, dF = \cancel{\int \operatorname{curl} \mathfrak{H}\, d\sigma}$

jedno-podwójne od prądów: $= i \int S\, N \operatorname{curl} \mathfrak{A} \cdot dF = i \int S \mathfrak{A}\, d\sigma$

$= i_1 i_2 \iint \frac{S\, d\sigma_1\, d\sigma_2}{r}$

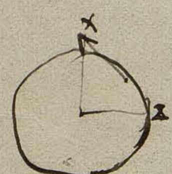
$$G = i\int \frac{d\eta}{r}\,d\omega = i \int \frac{d\eta}{\cancel{\sqrt{\ldots}}} = \log\left(\eta + \sqrt{r^2+\eta^2}\right)\Big|_0^\infty$$

$$= \log r$$

$$2\pi r .\ \varphi = 4\pi i^2 \pi J$$

$$\varphi = \frac{2\pi r}{\ldots} J$$

$$G = \pi r^2 J = \pi i \left(x^2+y^2\right)$$



$$L = -2\pi i z$$

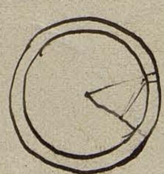
$$M = 2\pi i x$$

$$\sqrt{L^2+M^2} = 2\pi i r$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -2\pi i \qquad \frac{\partial M}{\partial x} = 2\pi i$$

zatím nemůže býti

$$L = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad M = \frac{\partial U}{\partial z}$$



$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{r\,d\varphi\,dr\,.\,\log\left(r^2+a^2+2ar\cos\varphi\right)}{\sqrt{z^2+a^2+2ar\cos\varphi}}$$

$$\int a \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} - \frac{z(\sin\alpha - \sin\beta)}{\lambda}\right)\cos\alpha \, dz$$

$$= \frac{a\cos\alpha}{\frac{2\pi}{\lambda}(\sin\alpha - \sin\beta)}\left[\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} - \frac{b(\sin\alpha - \sin\beta)}{\lambda}\right) - \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

$$= -\frac{a\cos\alpha}{\frac{2\pi}{\lambda}(\sin\alpha - \sin\beta)} \; 2\sin\left[\underbrace{2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right) - \frac{b(\sin\alpha - \sin\beta)}{\lambda}\pi}\right]\sin\frac{b(\sin\alpha - \sin\beta)}{\lambda}\pi$$

$\alpha = 0$:

$$= -\frac{a\lambda}{\pi\sin\beta}\sin\varphi \, \sin\left(\frac{b\sin\beta\pi}{\lambda}\right)$$

$$\sin\varphi + \sin(\varphi - \gamma) + \dots + \sin(\varphi - m\gamma) = A\sin(\varphi + \varepsilon) \qquad A^2 = 4\frac{\sin^2\frac{m\gamma}{2}}{\sin^2\frac{\gamma}{2}}$$

$$J = ab\left(\frac{\sin\frac{b\sin\beta\pi}{\lambda}}{\frac{b\pi\sin\beta}{\lambda}}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{mc\sin\beta\pi}{\lambda}}{\sin\frac{c\sin\beta\pi}{\lambda}}\right)^2$$

$$\frac{\sin mx}{x} \qquad \lim_{x=0} \; m$$

$$\frac{m\cos mx}{x} - \frac{\sin mx}{x^2} = 0$$

$$\tan mx = mx$$

$$mx = \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}} = -\frac{2}{3\pi}$$

$$1+x+x^2 \dots = \frac{1}{1-x}$$

$$x = re^{i\varphi}$$

$$= \frac{1-r\cos\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}$$

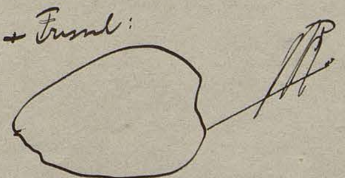
$$\text{Re}\quad 1+r\cos\varphi+r^2\cos 2\varphi \dots = R\,\frac{1}{1-r\cos\varphi - ri\sin\varphi} \qquad \frac{1-r\cos\varphi+ir\sin\varphi}{(1-r\cos\varphi)^2+r^2\sin^2\varphi}$$

$$\text{Im}\quad r\sin\varphi+\dots = I$$

$$= \frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}$$

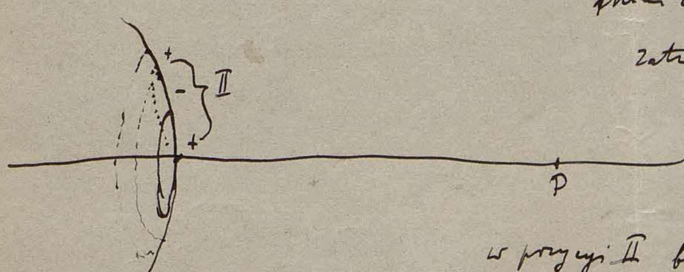
$$\sin\varphi + r\sin(\varphi+\varepsilon) + \dots = \frac{\sin\varphi\,(1-r\cos\varepsilon)+r\cos\varphi\sin\varepsilon}{1-2r\cos\varepsilon+r^2} = \frac{\sin\varphi + r\sin(\varepsilon-\varphi)}{1-2r\cos\varepsilon+r^2}$$

Huyghens + Fresnel:



$$f(t) = \int f\left(t-\frac{r}{c}\right)\cdot\frac{f_1(n,r)}{r}\,dS$$

w rzeczywistości $$4\pi f(t) = \int\left\{\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{f(t-\frac{r}{c})}{r}\right]\cos nr - \frac{1}{r}\,\frac{\partial f(t-\frac{r}{c})}{\partial n}\right\}dS$$



Ekran o wielkości otworu ściąło I strefę

zatem 4 krotna jasność w P

Jako punkt taki powyżej lub poniżej [illegible]

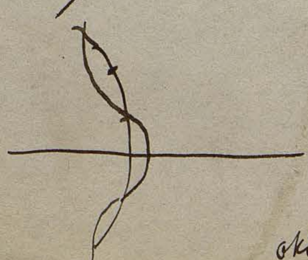
zamiast tego możemy przesuwać ekran

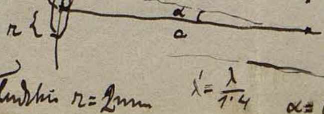
w pozycji II będzie się pewnie zmniejszać wszystko —

wtedy minimum —

wtedy obraz interferencyjny

i F.



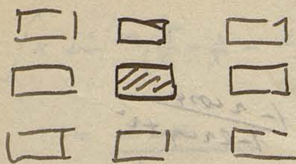


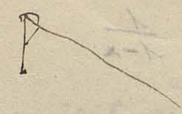
~~$\frac{\lambda}{2} : R = r : a$~~ $\alpha = \frac{\lambda/2}{r}$

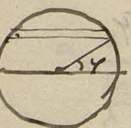
dokładniej $\alpha = 0{\cdot}61\,\frac{\lambda}{r}$ Teleskop!

Oko ludzkie $r = 2$mm $\lambda' = \frac{\lambda}{1{\cdot}4}$ $\alpha = 0{\cdot}42'$

A







$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} a\,d\varphi \cos\varphi \cdot 2a\cos\varphi \,\sin\left(2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{x}{\lambda}\right) - 2\pi\frac{a\sin\varphi\cdot\sin\beta}{\lambda}\right)$$

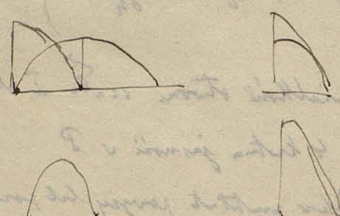
$$4a^2\,d\varphi\,\sin\alpha.$$

$$\cos^2 x\,\sin\sin x\,dx$$

$$I = \left[\int \cos^2 x\,\sin\sin x\,dx\right]^2 + \left[\int \cos^2 x\,\cos\sin x\,dx\right]^2$$

$\sin x = z$
$\cos x\,dx = dz$

$$\left[\int_{-1}^{+1} \frac{\sin^{\alpha} z\,dz}{\sqrt{1-z^2}}\right]^2 + \left[\int \frac{\cos^{\alpha} z\,dz}{\sqrt{1-z^2}}\right]^2$$



Interf. [illegible] ⊥ pol.

$\xi = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad = a \sin \varphi$

$\eta = b \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} t \dots + \delta\right) = b \sin(\vartheta + \delta) = b \sin\vartheta \cos\delta + b \cos\vartheta \sin\delta$

$\xi + i\eta = \rho e^{i\varphi} = a\left[\sin\vartheta + i \sin(\vartheta+\delta)\right]$

$= \frac{a}{2}\left[e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta} + i\left[e^{i(\vartheta+\delta)} - e^{-i(\vartheta+\delta)}\right]\right]$

$\xi - i\eta =$

$\xi^2 + \eta^2 = \rho^2 = a^2\left[\sin^2\vartheta - \sin^2(\vartheta+\delta)\right]$

$\sin^2\vartheta - (\sin^2\vartheta \cos^2\delta + \cos^2\vartheta \sin^2\delta + 2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\delta\cos\delta$

$\sin\vartheta \sin\delta$

$\sin^2\delta$ [illegible]

$\xi = (a + i\alpha) \sin\vartheta = a \sin\vartheta + i\alpha \sin\vartheta \quad = a \sin\vartheta + \alpha \cos\vartheta$

$= A \sin(\vartheta + \varepsilon)$

$\xi^2 + \eta^2 =$

$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$

$a = A \cos\varepsilon \qquad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\alpha}{a} \qquad A = \sqrt{\dots}$

$\alpha = A \sin\varepsilon$

$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{-\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{+} = \frac{\dots\cos\alpha - i \dots \sqrt{\sin^2\alpha - n^2}}{+}$

$\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = \frac{\sin 2\beta - \sin 2\alpha}{+} = \frac{i \sin 2\alpha \sqrt{\sin^2\alpha - n^2} - n^2 \sin 2\alpha \cos\alpha}{+}$

31

$$\frac{r^2(\alpha\beta)}{r(\alpha\beta)} = \frac{\overbrace{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + n^2}^{1+n^2-2\sin^2\alpha} - 2i\cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha - n^2}}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - n^2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{-\sin^2\alpha(\sin^2\alpha - n^2) + n^4 \sin^2\alpha\cos^2\alpha - 2i\, n^2\sin^2\alpha\cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha - n^2}}{-\sin^2\alpha(\sin^2\alpha - n^2) - n^4(\sin^2\alpha\cos^2\alpha)}$$

$$a^2 + \alpha^2 = \frac{\overbrace{\cancel{\quad} + \cancel{\quad}^4(\sin^2\alpha - n^2)(1-\sin^2\alpha)}^{(1+n^2)^2 - 4(1+n^2)\sin^2\alpha + 4\sin^4\alpha}}{1-n^2}$$

$$= (1+n^2)^2 - \cancel{4}\sin^2\alpha - \cancel{4}n^2\sin^2\alpha + \cancel{4\sin^4\alpha} + 4\sin^2\alpha - 4n^2 - \cancel{4\sin^4\alpha} + 4n^2\sin^2\alpha$$

$$= \frac{1 - 2n^2 + n^4}{(1-n^2)^2} = 1$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\operatorname{tg}\varepsilon_1 - \operatorname{tg}\varepsilon_2}{1 + \operatorname{tg}\varepsilon_1 \operatorname{tg}\varepsilon_2} = \frac{\frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{b}}{1 + \frac{\alpha\beta}{ab}} = \frac{\alpha b - \beta a}{\alpha\beta + ab}$$

$$\cos\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{a^2}}} = a$$

$$\sin\varepsilon_1 = \frac{\frac{\alpha}{a}}{\sqrt{\quad}} = \alpha$$

$$\cancel{\operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1-\cos\varepsilon}{1+\cos\varepsilon} =}$$

$$\cancel{= \frac{1 - ab + \sqrt{(1-a^2)(1+\beta^2)}}{1 + ab - \sqrt{\quad}}} =$$

$$\cos\varepsilon = ab + \alpha\beta$$ vznik rozdílu fáze

$$= \frac{\sin^2\alpha(1+n^2) - 2\sin^4\alpha - n^2}{\sin^2\alpha(1+n^2) - n^2}$$

místo ○ ~~[illegible]~~ složení [illegible]

[illegible] o rozdílu fáze $= \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\eta}{b} - \frac{1}{a}\xi\cos\delta = \cos\vartheta\cos\delta$$

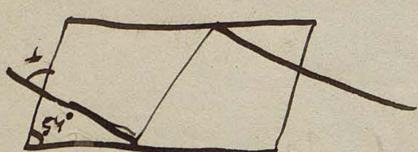
$$\frac{\xi}{a}\sin\delta = \sin\vartheta\sin\delta$$

$$\frac{\eta^2}{b^2} - \frac{2\eta\xi\cos\delta}{ab} + \frac{\xi^2}{a^2} = \sin^2\delta$$

koło jeśli $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ $a = b$

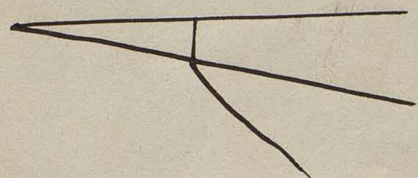
Δ dla szkła $n = 1{\cdot}51$

$= \frac{\pi}{4}$ przy $\alpha = 48^\circ 37$ lub $54^\circ 37'$

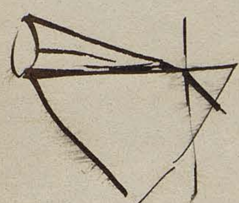


Jeśli dwa parallelep. wtedy otrzymiemy znów $\parallel$ ale w kierunku $\perp$ do pierwotnego itd.

II Abbe porównującego w świetle ... -

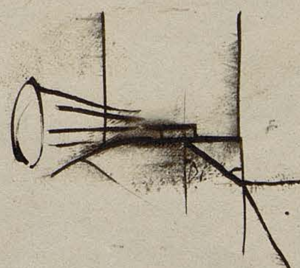


III ~~Abbe~~ wpadania ślizgowego



$\sin\beta_1 = \frac{1}{n}$

IV Pulfrich



$\sin\alpha_2 = n_0\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}$

$\left(\frac{1}{n}\right)^2 = 1 - \frac{\sin^2\alpha_2}{n_0}$

$n = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{\sin\alpha}{n_0}}} = \sqrt{\frac{n_0}{n_0 - \ldots}}$

Wollaston dla ciał podw. załam.

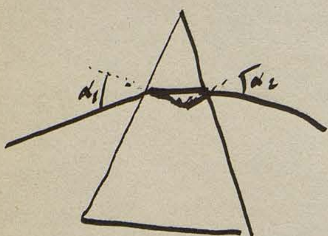
kryształów

Szkło $n = 1.51$

$a^2 = 1$	α = tot. ref. -	2'	4'	8'	15'	30'
$a^2 =$	1	0.74	0.64	0.53	0.43	0.25

Oznaczanie wsp. spółczyn. n.

Dwojakie metody pryzm. (odchylenia) i interfer.



$$D = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2$$

$$\beta_1 + \beta_2 = \gamma$$

$$D = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma$$

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} = n$$

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = n$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha_2 &= n \sin(\gamma - \beta_1) \\ \sin\beta_1 &= \frac{\sin\alpha_1}{n} \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{dD}{d\alpha_1} = 0 : \qquad 1 + \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = 0$$

$$\begin{aligned} \cos\alpha_2 \, d\alpha_2 &= -n \cos(\gamma - \beta_1)\, d\beta_1 \\ n \cos\beta_1 \, d\beta_1 &= \cos\alpha_1 \, d\alpha_1 \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} &\cos\beta_1 \\ &\cos(\gamma - \beta_1) \end{aligned} \right.$$

$$\cos\alpha_2 \cos\beta_1 \, d\alpha_2 = -\cos\alpha_1 \cos(\gamma - \beta_1)\, d\alpha_1$$

$$\cos\alpha_2 \cos\beta_1 = \cos\alpha_1 \underbrace{\cos(\gamma - \beta_1)}_{\cos\beta_2}$$

$$\sin\alpha_2 \sin\beta_1 = \sin\alpha_1 \sin\beta_2$$

$$\cos(\alpha_2 - \beta_1) = \cos(\alpha_1 - \beta_2)$$

$$\alpha_2 - \beta_1 = \alpha_1 - \beta_2$$

$$\cancel{\alpha_2 - \alpha_1 = \beta_1 - \beta_2}$$

będzie spełnione dla symetrycz...

$$D = 2\alpha - \gamma \qquad \beta = \frac{\gamma}{2} \qquad \sin\alpha = n \sin\frac{\gamma}{2}$$

I ~~Abbe~~

$$n = \frac{\sin\frac{D+\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$X_x = 2T\left[\frac{\partial\xi}{\partial x} + L\,\vartheta\right] \qquad X_y = T\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$$

$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 2T\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + L\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + T\left[\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial z}\right]$$

$$L = \frac{\mu}{\lambda - 2\mu}$$

$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = T\,\Delta^2\xi + T(L+1)\frac{\partial\vartheta}{\partial x} \qquad \rho\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} = T(L+2)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}$$

$$\rho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \qquad \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = T\,\Delta^2\varphi$$

$$\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} =$$

$$X_x + Y_y + Z_z = 2T(3L+1)\vartheta$$

$$3p \qquad \vartheta = \frac{3p}{2T(3L+1)}$$

$$\xi = a\cos\mu\,\sin\left(t - \frac{x\cos\alpha}{a}\right)$$

$$\eta =$$

$$\zeta =$$

$$\Delta^2\xi = -\frac{\cos^2\alpha}{a^2}(2\pi)^2\,\xi \qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -(2\pi)^2\xi \quad \Big|\ \vartheta = -a\cos\varepsilon\cos\ldots$$

$\cos\mu\,.\,\rho a^2 = T\cos\mu + T(L+1)\cos\varepsilon\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\mu$
$\cos\nu\,.\,\rho a^2 = T\cos\nu + T(L+1)\cos\varepsilon\cos\beta$	$\cos\beta$	$\cos\nu$
$\cos\lambda\,.\,\rho a^2 = T\cos\lambda + T(L+1)\cos\varepsilon\cos\gamma$	$\cos\gamma$	$\cos\lambda$

$$\cos\varepsilon\,(\rho a^2) = \left[T + T(L+1)\right]_{\varepsilon=1} = T(L+2) \qquad \cancel{\rho a^2 = T + T(L+1)\cos^2\varepsilon}$$

$$a = \sqrt{\frac{T(L+2)}{\rho}} \quad \text{albo } T\,\xi\cos\varepsilon = 0$$

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

$$\cos\mu\,.\,\cancel{T(L+2)} = \cancel{T\cos\mu} + \cancel{T(L+1)}\cos\varepsilon\cos\alpha \text{ itd.} \qquad \cos\varepsilon = 1 \qquad \varepsilon =$$

podl. $a = \sqrt{\frac{1-\mu}{1-2\mu} \cdot \frac{E}{(1+\mu)\rho}}$

příčn $a = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)\rho}}$

$T = \frac{E}{2(1+\mu)}$

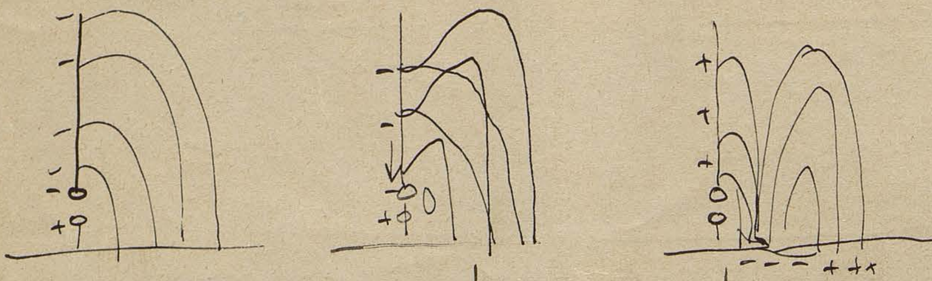
$$D_n = E_n \frac{2 \sin\beta \cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad D_p = E_p \frac{2 \sin\beta \cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$$

$$V: \quad K_1 \left[E_p + R_p \right] \cos\alpha = K_2 D_p \cos\beta \qquad \frac{K_1}{K_2} = \cancel{} \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2$$

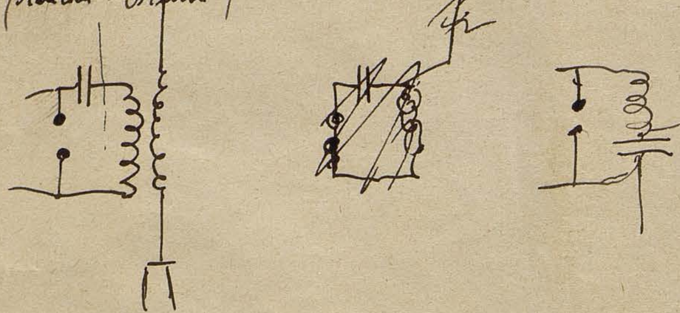
$$\| \; R_p = 0 \qquad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \qquad \operatorname{tg}\alpha = n$$

kąt polaryzacji zupełnej (Brewster)

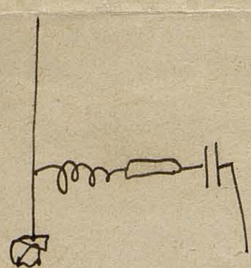
Antenne

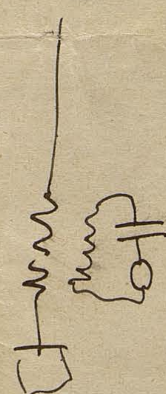


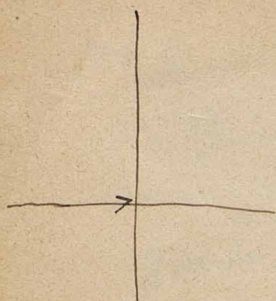
Marconi-Antenne



$L = 0{\cdot}15\sqrt{D}$







~~$X = a \sin\alpha\left(t + \frac{y}{v}\right)$~~ ~~$X_w = a' \sin\alpha\left(t - \frac{y}{v}\right)$~~

~~$X_1 = a_1 \sin\alpha\left(t + \frac{y}{v_2}\right) \cdot e^{-\gamma y}$~~

$Y = a \sin\alpha\left(t - \frac{x}{v}\right)$ $\qquad Y_w = a' \sin\alpha\left(t + \frac{x}{v} + \delta\right)$

~~$Y_1 = a_1 \sin\alpha\left(t - \frac{x}{v_2}\right) \cdot e^{-\gamma x}$~~ $\quad Y_1 = 0$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = -\frac{a\alpha}{\mu v}\cos \ldots$$

$N = -\frac{a}{\mu v}\sin\alpha\left(t - \frac{x}{v}\right)$ $\qquad N_w = +\frac{a'}{\mu v}\sin\alpha\left(t + \frac{x}{v}\right)$

~~$\frac{\partial N_1}{\partial t} = \frac{a_1\alpha}{v_2}\cos\alpha\left(t - \frac{x}{v_2}\right) e^{-\gamma x} - a_1\gamma \sin \ldots e^{-\gamma x}$~~ $\quad N_2 = 0$

~~$N_1 = -\frac{a_1}{\mu v_2}\sin\alpha\left(t - \frac{x}{v_2}\right) e^{-\gamma x} \pm a_1\gamma \cos\alpha\left(t - \frac{x}{v_2}\right) e^{-\gamma x}$~~

$\underbrace{a\left[\sin\alpha\left(t - \frac{x}{v}\right) - \sin\alpha\left(t + \frac{x}{v}\right)\right]}$

$= -2\cos\alpha t \sin\frac{x}{v}$

węzeł przy ścianie

$a\left[\sin\alpha\left(t - \frac{x}{v}\right) + \sin\alpha\left(t + \frac{x}{v}\right)\right]$

$= 2\sin\alpha t \cos\frac{x}{v}$

$a + a' = 0$

$-a + a' = 0$

krata (siatka z drutów $\parallel Y$) odbija zupełnie

$\parallel Z$ przepuszcza zupełnie

$a\cos\alpha\left(t - \frac{x}{v}\right) + a'\cos\left(\alpha t + \frac{x}{v} + \delta\right) = 0$ $\qquad$ ~~$a\cos\alpha t$~~

$a\cos\frac{x}{v} \pm a'\cos\left(\frac{x}{v} + \delta\right) \Big|_{x=0}$

$a\sin\frac{x}{v} = a'\sin\left(\frac{x}{v} + \delta\right)$

~~$\mathrm{tg}\frac{x}{v} = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{v} + \delta\right)$~~ $\quad \delta =$

$a\cos\alpha t + a'\cos(\alpha t + \delta) = 0$

$a \pm a'\cos\delta$

$0 = a'\sin\alpha\delta$ $\qquad \delta = \pi$

$T = \frac{K}{8\pi}(X^2 + Y^2 \ldots)$ $\qquad V = \frac{\mu}{8\pi}(L^2 + M^2 + N^2)$

$X = \frac{dF}{dt} \ \ldots$ $\qquad \mu L = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}$

$\iint dt\, d\tau (\delta T - \delta V) = 0 =$

$\iiiint dt\, dx\,dy\,dz \left[K\left(\cancel{P} X \frac{d\,\delta F}{dt} + \ldots \right) - L\left(\frac{d\,\delta H}{\partial y} - \ \right) - M \ldots \right] = 0$

$= \iiiint \ldots \quad \delta F \left[K \frac{\partial X}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial y}\right] + \ldots \qquad = 0$

$v_i = a_i\, l_1' + b_i\, l_2'$

$T = \frac{A}{2} l_1'^2 + \frac{B}{2} l_2'^2 + C\, l_1' l_2'$

$L_1 = \frac{d}{dt}(A\, l_1' + C\, l_2') + W_1$

$L_2 =$

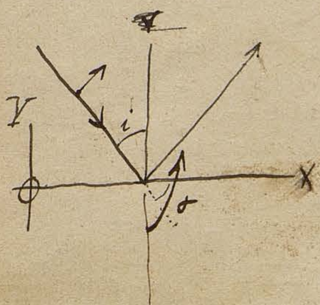
$K = -\frac{\partial T}{\partial k}$

37

	n_0	$\sqrt{K}$
[illegible]	1·000294	1·000295
H_2	138	132
CO_2	449	473
CO	346	345
NO	503	497

	n_0	$\sqrt{K}$
C_6H_6	1·482	1·49
H_2O	1·33	9·0
Alk.	1·34	5·7

$\alpha = \frac{2\pi}{T}$



$Y = b \sin \alpha \left(t - \frac{x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma}{v}\right)$

$Y = b \sin \alpha \left(t \pm \frac{x \sin i + y \cos i}{v}\right)$ $\qquad b = A \sin i$

$X = a \sin \alpha (\cdot -- \quad)$ $\qquad a = A \cos i$

$Z = c \sin \alpha (\quad -- \quad)$

$X = E_p \cos i \sin \alpha \left(t - \frac{x \sin i - y \cos i}{v}\right)$

$Y = E_p \sin i \sin \alpha (\quad)$

$Z = E_n \sin \alpha (\quad -- \quad)$

$L = -E_n \frac{\cos i}{\mu v} \sin \alpha (A - - \quad)$

$M = -E_n \frac{\sin i}{\mu v} \sim$

$N = \frac{E_p}{\mu v} \sim$

$\mu \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = -E_n \frac{\alpha \cos i}{v} \cos \cdots$

$\mu \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial z} = -E_n \alpha \frac{\sin i}{v} \cos \cdots$

$\mu \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = E_p \frac{\alpha}{v} \cos \cdots$

$X_r = R_p \cos\alpha \sin \alpha \left(t - \frac{x \sin\alpha + y \cos\alpha}{v_1}\right)$

$Y_r =$

$Z_r =$

$X_d = D_p \cos\beta \sin \alpha \left(t - \frac{x \sin\alpha - y \cos\alpha}{v_2}\right)$

$X_1 = X + X_r = X_2 = X_d$

$[k_1 Y_1 = k_1(Y + Y_r) = k_2 Y_d]$

$k_1 Z_1 = k_1[Z + Z_r) = k_2[Z + Z_d]$

y=0

$\frac{x \sin\alpha}{v_1} = +x\frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{x\sin\beta}{v_2}$

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}$

$\sin i = \sin\alpha$ $\qquad \alpha = \pi - i$

$\cos i = -\cos\alpha$

X: $(E_p + R_p)\cos\alpha = D_p\cos\beta$

$\cancel{k_1(E_p + R_p)\sin\alpha = k_2 D_p \sin\beta}$

L: $(E_n - R_n)\frac{\cos\alpha}{v_1} = \frac{D_n\cos\beta}{v_2}$

Z: $k_1(E_n + R_n) = k_2 D_n$

N: $(E_p + R_p)\frac{1}{v_1} = \frac{D_p}{v_2}$

$\cancel{k_1(E_n + R_n)\cos\alpha = k_2 D_p \cos\beta}$

$(E_n - R_n)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = D_n\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$

$(E_p + R_p)\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{D_p}{\sin\beta}$

$(E_n + R_n)\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = (E_n - R_n)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$E_n(\cos\beta\sin\alpha - \sin\beta\cos\alpha) = -R_n(\cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha)$

$E_n \sin(\beta - \alpha) = R_n \sin(\beta + \alpha)$

$R_n = \cancel{E_n \operatorname{tg}(\beta - \alpha)} \quad E_n\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}$

$(E_p + R_p)\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = (E_p - R_p)\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$

$E_p(\sin\beta\cos\beta - \sin\alpha\cos\alpha) = -R_p(\sin\beta\cos\beta + \sin\alpha\cos\alpha)$ $\quad\|\quad$ $R_p = E_p\frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}$

$R_p = E_p \frac{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta}{\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta} = E_p\frac{2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$

$\cancel{\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}} = \cancel{(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)}$

$= \sin\alpha\cos\alpha \ldots \sin\beta$

$X = E_p^{\cos i} \cos \alpha \left(t - \frac{x \sin i + y \cos i}{v}\right)$ | $L =$

$Y = E_p \sin i \cos \alpha (\quad \sim \quad t)$ | $M =$

$Z = E_n \quad \cos\alpha (\quad)$ | $N =$

$X_r = R_p$ $\qquad$ $X_d = D_p \ldots$

$\vdots$

$y = 0 :$ $\cancel{X + R_p = X}$

$X + X_r = X_d$ $\qquad$ L

$Y + Y_r = Y_d$

$$\frac{\sin i}{v_1} = \frac{\sin \alpha}{v_p} = \frac{\sin \beta}{v_2}$$

$$\cos \varphi = -\cos \varphi'$$
$$\varphi = \pi - i$$

$(E_p - R_p) \cos i = D_p \cos \beta$

$E_n + R_n \qquad = D_n$

$(E_n - R_n) \sqrt{K_1} \cos i = D_n \sqrt{K_2} \cos \beta$

$(E_p + R_p) \sqrt{K_1} \qquad = D_p \sqrt{K_2}$

$$2 E_n = D_n \left(1 + \frac{\sqrt{K_2}}{\sqrt{K_1}} \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)$$

$$E_n \left(\frac{\sqrt{K_1} \cos\alpha}{\sqrt{K_2} \cos\beta} - 1\right) = R_n ($$

$- \ldots$

$$R_n = - E_n \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \Bigg| \quad R_p = E_p \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$$

$$D_n = E_n \frac{2 \sin\beta \cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad D_p = E_p \frac{2 \sin\beta \cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$$

$$\sin\alpha + m\sin(\alpha-\varepsilon) + m^2\sin(\alpha+2\varepsilon) \cdots = A\sin(\alpha-\mu)$$

$$1 + m\cos\varepsilon + m^2\cos 2\varepsilon + \cdots = A\cos\mu \quad \Big|\ \sin\varepsilon$$

$$m\sin\varepsilon + m^2\sin 2\varepsilon + \cdots = A\sin\mu \quad \Big|\ \cos\varepsilon$$

$$A\sin \cdots = A\sin(\mu+\varepsilon) = \frac{A}{m}\sin\mu \quad \Big|\ \cos\mu \quad \Big|\ \sin\mu$$

$$A\cos(\mu+\varepsilon) = \frac{A\cos\mu}{m} - \frac{1}{m} \quad \Big|\ \sin\mu \quad \Big|\ \cos\mu$$

$$\cancel{\frac{1}{m} = A\left[\frac{\cos\mu}{m} - \cos(\mu+\varepsilon)\right]}$$

$$A\Big[\underbrace{\sin(\mu+\varepsilon)\cos\mu - \cos(\mu+\varepsilon)\sin\mu}_{A\sin\varepsilon}\Big] = -\frac{\sin\mu}{m}$$

$$A\cos\varepsilon = \frac{A}{m} - \frac{\cos\mu}{m}$$

$$(Y'-Y)\Delta y + (X-X')\Delta x = -\Delta x \Delta y \frac{\partial N}{\partial t}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$\int(\mathfrak{E}\, ds) = \iint \cancel{\text{curl}}\, df\, (\mathfrak{N}\, \text{curl}\, \mathfrak{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\iint df(\mathfrak{N}\mathfrak{H})$$

$$\cancel{\mathfrak{X}} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial M}{\partial x} = - \qquad \nabla A = -4\pi u$$

$$\text{curl} \int \frac{u}{r}\, dv = i$$

$$\text{curl}\, A\mathfrak{B} = A\, \text{curl}\, \mathfrak{B} + [\nabla A . \mathfrak{B}]$$

Zanim rozwiniemy system. teoryę Maxw. : ~~teorya~~ krótki zarys teoryi rachunku wekt.

Tylko zasadnicze pojęcia

Skalarne (Bezwzględne) } Wielkości — Masa, Energia, ciepło, temperat., potencyał,

Kierunkowe — prędkość, przysp., siła mech., elektr., magn.

~~3 Składowe~~ ~~Wielkość~~ Liczba ; Kierunek

Więc jeśli jednostkę owego wektora oznaczymy przez $\mathfrak{a}$, to należy a tyle jednostek

wziąć aby $T\ddot{O}\ddot{U}\mathfrak{A}$ (Tensor / Versor) to nietylko długości przestrzenne, ale także inne kierunkowe

$\mathfrak{A} = \mathfrak{a}\, A = A\, \mathfrak{a}$ Czy ~~A~~ rozmiary się włoży w $\mathfrak{a}$ czy w A to jest

$\mathfrak{a}\, a =$ rzecz dowolna. || Równania między wektorami $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ odpowiadają zat. 3 równania skalarne, albo: -

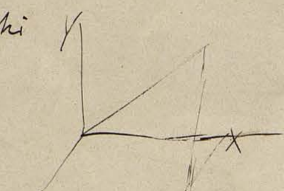
---

Jeśli dodajemy wielkości skalarne, to nie ma wątpliwości co do znaczenia sumy.

" " " wektorowe, to określimy jako sumę : wypadkową

znak — z odwrotnym ~~znakiem~~ kierunkiem

3 Kierunki



$\mathfrak{A} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

Do tego samego prowadzi uogólnienie wielkości urojonych: $z = x + iy$ na

trzy rozmiary

Czy ~~się~~ pozostają ważne prawa dodawania? Oczywiście

$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}$ $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$

~~commut.~~ (zamiany przemienność) asocyac. łączność

Naturalnie także rozkładając na składowe

$\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = (a_1+b_1)\, i + (a_2+b_2)\, j + (a_3+b_3)\, k$

Iloczyny a b

Iloczyny skalarny: $S\mathfrak{a}\mathfrak{b} = a\, b \cos(ab)$

w szczególnym wypadku jeśli $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ mają ten sam kierunek:

$S\mathfrak{a}\mathfrak{b} = ab \quad = \cancel{Sa_i b_i = ab}$

$Sii = 1 = Skk = Sjj$ (w kwaternionach $= -1$)

$Sik = Sij = Skj = 0$

Nic dziwnego, że tutaj iloczyn może być równy 0, mimo że żaden z czynników nie jest 0 bo właśnie rozumiemy co innego pod iloczynem.

~~Iloczyny wektorowe~~ $\cancel{V\mathfrak{a}\mathfrak{b} = a\, b \sin(ab)}$.

$S\mathfrak{a}\mathfrak{b} = S(a_1 i + \dots a_3 k)(b_1 i + \dots b_3 k)$

$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = | ab \cos(ab)$

$= ab[\cos ax \cos bx + \cos ay \cos by + \cos az \cos bz] = \uparrow$

$S\mathfrak{a}\mathfrak{b} = S\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ według definicji (komutat.

$S\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = S\mathfrak{a}\mathfrak{b} + S\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ bo

$= a\, S\mathfrak{r}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = ab\cos ab + ac\cos ac$

distryb. rozdzielność

W zwykłej arytmetyce [illegible]:
$a(bc) = (ab)c$ [illegible] tutaj nie tylko [illegible]

N. p. siła $\mathfrak{f}$ prędkość $\mathfrak{v}$

$S\,\mathfrak{f}\mathfrak{v}$ = praca pro sek.

Iloczyn. wektorowy ~~[illegible]~~ pole równoległoś.

$V\,\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \overbrace{a\,b\sin ab}^{\text{pole równoległoś.}}\,.\,\mathfrak{d}$

$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{d}\ \dots\ XYZ$

$V\,\mathfrak{B}\mathfrak{A} = ab\sin ab\,.\,\mathfrak{d}'$

$\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{d}'\ \dots\ XYZ$

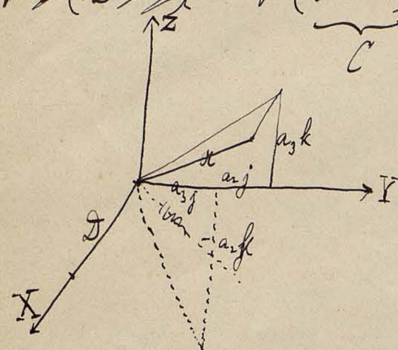
$\mathfrak{d}' = -\mathfrak{d}$

$V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = -V\mathfrak{B}\mathfrak{A}$

~~$V\mathfrak{A}(\mathfrak{B}+\mathfrak{D})$~~

$V\underbrace{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}_{C}\mathfrak{D} = V\mathfrak{A}\mathfrak{D} + V\mathfrak{B}\mathfrak{D}$

$= \cancel{dV\mathfrak{A}\mathfrak{d}}\ d\,V\mathfrak{A}\mathfrak{d}$



$V\mathfrak{A}\mathfrak{d} = d(a_3 j - a_2 k)$

$V\mathfrak{B}\mathfrak{d} = d(b_3 j - b_2 k)$

$VC\mathfrak{d} = d(c_3 j - c_2 k)$

$V(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathfrak{d} = d\left[(a_3+b_3)j - (a_2+b_2)k\right]$

więc dystryb. prawo także ważne:

$Vij = k$	$Vji = -k$	$Vii = 0$
$Vjk = i$	$Vkj = -i$	$Vjj = 0$
$Vki = j$	$Vik = -j$	$Vkk = 0$

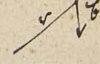
$V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = V(a_1 i + a_2 j + a_3 k)(b_1 i + b_2 j + b_3 k) =$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Przykład:

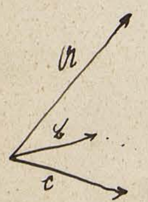
Ciało stałe obracające się koło osi i z prędkością obrotową u

Prędkość jakiegoś bądź punktu $v = v_0 + V u r$

Moment siły  $V r F$

Biot Savart $V \mathfrak{H} . T$

$S\, a V b c$



$=$ objętość równoległościanu

wyrachowawszy: $S(A_1 i + A_2 j + A_3 k) \left| \begin{matrix} i & j & k \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right|$

$$= \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = S b V c a = S c V a b$$

$$= - S a V c b = \dots$$

Zasada prac przygotowanych

$\sum S P\, d\mathfrak{w} = 0$ $\qquad$ ~~$d\sigma = d\sigma_0 + V$.~~

$d\mathfrak{w} = d\mathfrak{w}_0 + V d\sigma . r$

$S\, d\mathfrak{w}_0 \sum P + \underbrace{\sum S P\, V d\sigma\, r}_{} = 0$

$= \sum S d\sigma\, V r P$

$= S d\sigma \sum V r P$

niezależnie od $d\mathfrak{w}_0$ i $d\sigma$ zatem $\sum P = 0 \qquad \sum V r P = 0$

~~O innych operacyach, łożyskach etc. nie będziemy mówili~~

$\frac{d}{dt} \qquad a' = i \dot{A}_1 + j \dot{A}_2 + k \dot{A}_3$

$$\frac{d}{dt} S a b = \frac{S(a + da)(b + db) - S a b}{dt} = S a \frac{db}{dt} + S \frac{da}{dt} b \quad \text{etc}$$

$$\varphi = \iint \frac{I\cos\theta}{r}\,dS^{+\,Th.10} = \overset{\text{Green}}{=} \iiint \cancel{\frac{\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)}{r}}\,dv + \iiint A\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} + \dots$$

$$= \iint \frac{A\cos nx + B\cos ny + C\cos nz}{r}\,dS = \iiint \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\dots$$

$$\iiint \nabla^2 S \cdot H\,dv = \iint H\frac{\partial S}{\partial n}\,dS - \iint \frac{\partial H}{\partial n}\,\frac{\partial S}{\partial n} - \dots$$

moment magnesu elementarnego ~~[illegible]~~ $ml = I\,dv$

można zatem sobie wyobrazić że powstaje ta różnica Z, J wskutek „polaryzacji magnetycznej” tzn. wskutek namagnesowania

W rzeczywistości dla ciał ferromagnetycznych μ zmienne, więc $\frac{\partial(\mu f)}{\partial t} = -\operatorname{curl} \mathfrak{E}$

ale oprócz tego Hysteresis

(podobnie jak dielektr. Nachwirkung opóźnienie dielektryczne)

$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$

~~Bo~~ $\mathfrak{H} = \nabla U$ zatem także $\mathfrak{B} = \nabla V$ w każdej części gdzie μ stałe

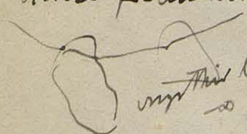
~~jakiejś gęstości~~

ponieważ nie ma rzeczywistego magnetyzmu więc $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$

tj. $\nabla^2 V = \nabla^2 U = 0$

także powierzchownie: $\mu \frac{\partial U}{\partial n} + \mu' \frac{\partial U'}{\partial n'} = 0$

| także bezpośrednio z ogólnego warunku dlatego $\mu \frac{\partial U}{\partial t} = \mu' \frac{\partial U'}{\partial t}$



wszystkie linie indukcji $-\infty$ $+\infty$

$$\left.\begin{aligned} \mu \frac{\partial U}{\partial n} &= \mu' \frac{\partial U'}{\partial n} \\ \frac{\partial U}{\partial s} &= \frac{\partial U'}{\partial s'} \end{aligned}\right\}$$ załamanie linij sił

$$(1+4\pi\kappa) \frac{\partial U}{\partial n} = (1+4\pi\kappa') \frac{\partial U'}{\partial n}$$

$$\mathfrak{B} = (1+4\pi\kappa) H = H + 4\pi J$$

$$J = \kappa H$$

Czy także dla J potencjał?

$$V = U + \varphi$$

$$4\pi J = -\nabla\varphi = -\nabla(V-U)$$

$\operatorname{div} J = \nabla^2 V - \nabla^2 U = 0$ nie ma gęstości

ale powierzchownie: $\varphi = \int \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n}\right)}{4\pi r} dS = \int \frac{\kappa \frac{\partial U}{\partial n} + \kappa' \frac{\partial U'}{\partial n'}}{r} dS = \int \frac{J_n - J'_n}{r} dS$

$$= \int \frac{\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U'}{\partial n'}}{r} dS = \int \cancel{\frac{\sigma}{r}} dS$$

$$J = \int \frac{\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U'}{\partial n'}\right)}{r} dS = \int \frac{\sigma_t}{r} dS$$

$$\int \frac{\partial(\mu f)}{\partial t}\, dS = -\int \operatorname{curl} \mathfrak{E}\, dS$$

dla systemu nieruchomego

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu \int \left[L \cos nx + M \cos ny + \ldots \right] = -\int \underbrace{\left(\frac{\partial \ldots}{\partial} \ldots \right) \ldots}$$

$$= \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

$$= \int S\, \mathfrak{E}\, ds$$

ilość linij indukcyi
$\parallel$

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\mu\, \Omega) = + w\, i$$

$f = \operatorname{curl} \mathfrak{A}$ } bez względu na μ

więc jeśli  to f niezależne od jakości substancyi

zatem i Ω

zatem prąd i wywołany przez indukcyę taki sam, wprost proporcyonalny do μ

Dlatego też wszędzie żelazne jądro gdzie chodzi o powiększenie indukcyi np

aparaty indukcyjne (regulator: wsuwanie żelaza)

transformatory, dynamo

Zobaczymy później że to samo ważne przybliżenie jeśli zmiana strumienia linij sił

następuje wskutek ruchu.

Więc dla przewodników zamkniętych to samo jak wtedy, tego dowodzimy

~~Jeden przypadek gdzie jest tego gdzie tam wcale nie wszędzie ...: wtrącenie kondensatora~~

Prądy niezamknięte

$$-K\frac{dX}{dt} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \quad \Big| \frac{\partial}{\partial t} \qquad \mu\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$-K\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} \qquad\qquad = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \quad \Big| \frac{\partial}{\partial z}$$

$$-K\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \qquad\qquad = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \quad \Big| \frac{\partial}{\partial y}$$

$$-K\mu\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{\partial^2 Z}{\partial x\, \partial z} + \frac{\partial^2 Y}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}}_{=0} - \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

A linie sił f oblicza się tak jak dla prądów stałych $\operatorname{curl} f = 4\pi J$ i z tego prawo Biot Savart'a, pomijając $K\frac{\partial X}{\partial t}$ (quasi stationäre Zustände) ponieważ K w systemie elektromagnetycznym nadzwyczaj mała $= \left(\frac{1}{3.10^{10}}\right)^2$

$$K\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{curl}\mathfrak{H} \quad \Big| \quad \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\mu\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\operatorname{curl}\mathfrak{E} \quad \Big| \quad \cdot\operatorname{curl}$$

$$\mu K\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = -\operatorname{curl}^2\mathfrak{E} = \nabla^2\mathfrak{E}$$

Toksamo : $\mu K\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \nabla^2\mathfrak{H}$

Te same równania co z dyfuzji ciepła spezyalnych

~~$X = f(x - at, y - at, z - at)$~~

~~$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \frac{\partial X}{\partial t} = -a\frac{\partial f}{\partial x} \ldots$~~

N. p. ~~$\nabla X Y Z =$~~ $X, Y, Z = f(x)$

~~$\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} = 0$ etc.~~

$a = \frac{1}{\sqrt{K\mu}}$

~~$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$~~ $\frac{\partial^2}{}$

~~$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \ldots$~~

płaszczyzna fali YZ tzn. $Y = Z = 0$ ~~$M = 0$~~ $L = 0$ M, N fc. (y, z)

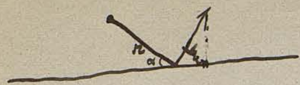
$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = a^2\nabla^2 X$ ~~dla z innych równań także $\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0$~~

~~$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial y} = 0$~~

~~$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$~~

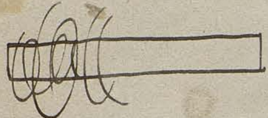
~~$\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}$~~

~~$\left.\begin{matrix} X \\ L \end{matrix}\right\} = f(x \pm at) \quad \varphi(x \pm at)$~~



$\frac{2i}{r} \underbrace{\sin\alpha \, dx}_{r\,d\varphi}$

Jahs fundament. sekr. $\circlearrowleft = 4\pi i$

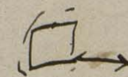


Induktion.

$K \frac{\partial X}{\partial t} + \lambda (X - X') = \underbrace{\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}}$

$- \, . \, . \, .$

f



$\eta \, M_{\frac{\eta}{2}} + \xi \, N_{\frac{\xi}{2}} \sim$

lub

lub $\int F d\alpha \sim = \int \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \sim \; ds$

$L = \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}$

$M =$

$N =$

$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial^2 G}{\partial}$

$M(0, \theta\eta) - M(\xi, \theta'\eta)$

$= \xi \frac{\partial M}{\partial \xi} + \sim + \underbrace{(\theta - \theta')}_{\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\eta} \eta \frac{\partial M}{\partial \eta}$

$\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} = \beta$

$c \left(1 + 2 \frac{K-1}{K+2} \right) \cos\theta = c \, \frac{3K+1}{K+2} \cos\theta$

$2\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \pi a^2 \cdot c \, \frac{3K+1}{K+2}$

$\pi a^2 c \, .$

$\alpha + \alpha + \alpha \cdots \equiv m\alpha$

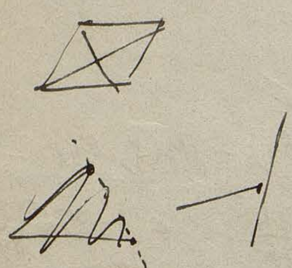
$\alpha \equiv U\alpha \,.\, T\alpha$

$\begin{cases} \alpha \equiv b & U\alpha = Ub \\ & T\alpha = Tb \end{cases}$

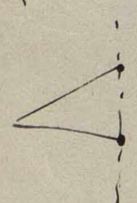
m = Operatore punto

$-(-\alpha) = \alpha$

$\alpha + (-b) = \alpha - b$ Defin. Sottr.



$\rho \equiv \alpha + x\, b$



$\rho \equiv \alpha + x(\alpha - b) \equiv \alpha(1+x) - bx$

jisolo un esset

miagione punktm 2 syllang

Complessione vettori

$c = x\alpha + y\,b$

$\rho \equiv x\alpha + \frac{x^2}{2} b$ Parab.

$\rho \equiv x\,\alpha + \sqrt{1-x^2}\,.\,b$ Ellipse

$\rho \equiv \varphi(x)\,\alpha + \psi(x)\,.\,b$ Kurve

$\rho \equiv \varphi(x)\,\alpha + \psi(x)\,b + \chi(x)\,c$ Kurve punktmassa

~~Velocità~~ $\lim \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial K X}{\partial x} + \cdots\right) = -4\pi\lambda \frac{\partial X}{\partial x} + \cdots - \cancel{A} = 0 \quad \text{[illegible]}\ \lambda = 0$$

[illegible] [illegible] [illegible]

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho w = \cancel{\alpha} \int (X \cos nx + \cdots)\, ds$$

$$x(a + b\sin\varphi + c\cos\varphi) = v$$

$$v = \cancel{x}\, x_1 + y\, z + \cancel{c}\, cy$$

$$= x_1(a + b)\cancel{\quad} + z(\alpha a + \beta b) + cy$$

$$= x(a + b\sin\varphi + c\cos\varphi)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + \alpha z &= x \\ x_1 + \beta z &= x\sin\varphi \end{aligned}\right\}\begin{matrix}\beta \\ \alpha\end{matrix} \qquad x_1(\beta - \alpha) = x(\beta - \alpha\sin\varphi)$$

$$\cancel{(x_1 + \beta z)^2 + y^2 = x^2 = (x_1 + \alpha z)^2}$$

$$y = x\cos\varphi \qquad y = \frac{x_1(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha\sin\varphi}\cos\varphi$$

$$v = \frac{x_1(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha\sin\varphi}(a + b\sin\varphi + c\cos\varphi)$$

$a = b + c$ $\quad 2 \circ 7$

$b - c$ $\quad 3\, b\, 2c$ itd. wyznaczenie

$v = x a + y b = \}$ płaszczyzna przez ...

$v = c + x a + y b \}$ płaszczyzna ...

Płaszczyzna przez końce $a\, b\, c$:

$$v = a + x(b-a) + y(c-a) = a(1-x-y) + bx + cy$$

$v = a\varphi(x) + b\psi(x)$ krzywa

$+ c y$ powierzchnia walcowata (ogólna)

Porówn. Elipsa

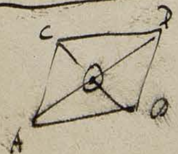
$v = a \overbrace{\sinh x}^{u} + b \overbrace{\cosh y}^{v}$ $\qquad \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Hiperbola $\}$ $u^2 - v^2 = 1$

$v = A(i \cos x + j \sin x) + kx$ prawa

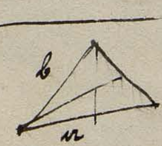
$- kx$ lewa śruba



$OA - OB = OC - OD$

$\underbrace{OA + OD}_{0} = \underbrace{OB + OC}_{0}$

$OA = -OD \qquad OB = -OC$



1). $v = x\left[a + \frac{1}{2}(b-a)\right] = x\,\frac{a+b}{2}$

2). $v = b + y\left(\frac{a}{2} - b\right) = y\,\frac{a}{2} + (1-y)\,b$

3). $v = a + z\left(\frac{b}{2} - a\right) = (1-z)\,a + \frac{b}{2}\,z$

1, 2) $\left.\begin{array}{l} x = y \\ \frac{x}{2} = 1 - y \end{array}\right\} x = \frac{2}{3} = y$

Rechts Links System

$\downarrow$ $\downarrow$

$\mu \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$ ..

$a = i a_1 + ..$

$b =$

$a + b = i (a_1 + b_1) + ..$

$a_{11} x_1^2 + \dots$

Ellipsa, środek

$z = F(x y)$

$dz_1 = \frac{\partial F}{\partial x} dx$

$dz_2 = \frac{\partial F}{\partial y} dy$

styczna płas. do pow.

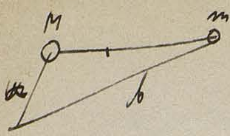
styczna

$(T\ V\ ab)^2 = (ab \sin ab)^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + ..$

$\sin^2 ab = (\cos ay \cos bz - \cos az \cos by)^2 + ..$

$= a_0^2 b_0^2 (1 - \cos^2 ab) = a_0^2 b_0^2 - (Sab)^2$

$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad)^2$



Środek masy $r = \dfrac{Ma + mb}{M+m}$

podobnie dla wielu

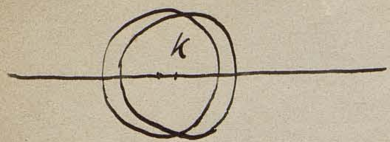
$$r = \frac{\Sigma m r}{\Sigma m}$$

$r = a + x b + y c$ płaszczyzna

$r = \cancel{a + \Sigma x b}$

$r = \varphi(x,y)\, a + \psi(x,y)\, b + \chi(x,y)\, c$ powierzchnia

Hipoteza



$$U_e = cx + \alpha \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} = cx + \frac{\alpha x}{r^3} = c\left(r + \frac{\alpha}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$U_i = \beta x = \beta r \cos\theta$$

$$\left.\frac{\partial U_e}{\partial \theta}\right|^{r=a} = -c\left(a + \frac{\alpha}{a^2}\right)\sin\theta \qquad \left.\frac{\partial U_i}{\partial \theta}\right|^{r=a} = -\beta a \sin\theta \quad \Bigg\} \quad c\left(a + \frac{\alpha}{a^2}\right) = \beta a$$

$$\left.\frac{\partial U_e}{\partial r}\right|^{r=a} = c\left(1 - \frac{2\alpha}{a^3}\right)\cos\theta \qquad \left.\frac{\partial U_i}{\partial r}\right|^{r=a} = \beta \cos\theta \quad \Bigg\} \quad K\beta = c\left(1 - \frac{2\alpha}{a^3}\right)$$

$$\left(a + \frac{\alpha}{a^2}\right) K = a\left(1 - \frac{2\alpha}{a^3}\right)$$

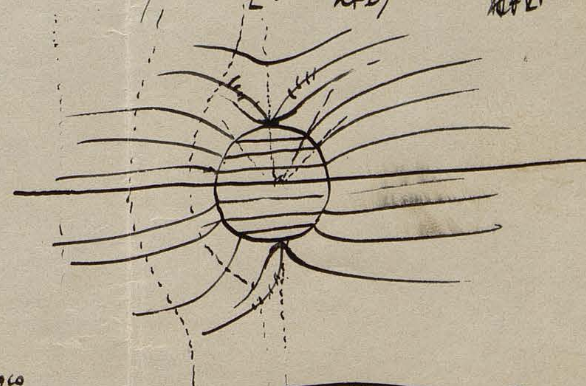
$$a(K-1) = -\frac{\alpha}{a^2}(K+2)$$

$$\alpha = -a^3 \frac{K-1}{K+2}$$

$$\beta = c\left[1 - \frac{K-1}{K+2}\right] = \frac{3}{K+2}$$

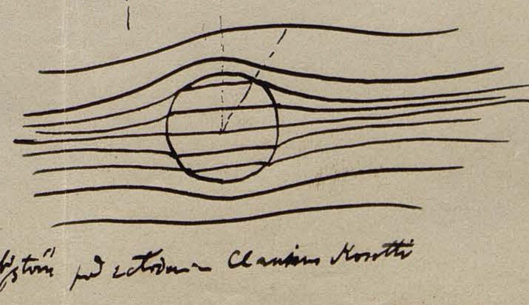
$$\beta = \frac{3}{K+2}$$

$$\begin{cases} U_e = cx\left[1 - \frac{a^3}{r^3}\frac{K-1}{K+2}\right] \\ U_i = \frac{3}{K+2}x \end{cases}$$



$K > 1$

$K < 1$



Jeżeli $K = \infty$: tak samo jak przewodzący

$$U_e = cx\left[1 - \frac{a'^3}{r^3}\right]$$

więc jeżeli $a^3 \frac{K-1}{K+2} = n a'^3$

$$n\frac{a'^3}{a^3} = \frac{K-1}{K+2}$$ = stosunek objętości pod założeniem Clausius Mossotti

N. p. Kula

K_2 $\frac{e}{K_1 a^2}$

$$K_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} = K_2 \frac{\partial u_2}{\partial r}$$

$$K_1 \frac{\frac{e}{K_1}}{a^2} = K_2 \frac{\partial u_2}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial r} = \frac{e}{K_2 a^2}$$

$$\int^a 4\pi a^2 da \left[K_1 \frac{e^2}{a^4 K_1^2} + \int K_2 \frac{e^2}{K_2^2 a^4} \dots = \cancel{4\pi e} \, da\right.$$

$$\cancel{4\pi} e^2 \int \frac{dr}{K_1 a^2} + \quad = \cancel{4\pi} e^2 \left[\frac{1}{K_1}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right) + \frac{1}{K_2} \cdot \frac{1}{r_1}\right]$$

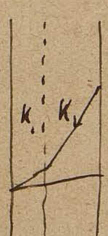
$$dW = P$$

$$\frac{e_1}{r_1} \cdot 4\pi r_1^2 \, \frac{e}{r^2} r_1^2 \left(\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2}\right) \qquad \frac{4\pi r_0^2}{4\pi r_0}$$

Kondensator

Jeśli się go naładuje a potem włoży do K to siła K razy mniejsza

Jeśli się go naładuje gdy jest w K to K razy tyle elektr. [illegible]



$$\underbrace{K_1 X_1}_{4\pi\sigma_1} = \underbrace{K_2 X_2}_{4\pi\sigma_2} \quad \text{niezmienne}$$

$$W = x K_1 X_1^2 + (a-x) K_2 X_2^2$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = K_1 X_1^2 - K_2 X_2^2$$

$$= \sigma_1^2 \left[\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2}\right]$$

Magnetyzm $\qquad \rho_w = 0 \qquad \sigma_w = 0$

$\qquad\qquad\qquad \rho_f \qquad\qquad \sigma_f$

Wszystko byłoby = 0 gdyby nie elektryczne siły w innych częściach przestrzeni

W rzeczywistości jest to inaczej, tutaj luka w teoryi: remanencya, hysteresis

Teorya Maxwella zna tylko ciała w rodzaju miękkiego żelaza

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mu (L^2 + \dots)$$

$\cancel{L=I}$ $\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + \underbrace{4\pi\, \mathfrak{I}}$ $= (1+4\pi\kappa)\, \mathfrak{L}$ 50

$\mathfrak{I} = \kappa\, \mathfrak{L}$

$\Delta^2 U = 0$

$L = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad M = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad N = -\frac{\partial V}{\partial z}$

$\mu \frac{\partial U}{\partial n} = \mu' \frac{\partial U'}{\partial n}$

$\cancel{\mu(X \cos nx + Y \cos ny + Z \cos nz) = \mu'(X' \cos nx + \ldots)}$

$V = U + \varphi$

$\overset{\mu}{(1+4\pi\kappa)} \frac{\partial U}{\partial n} = (1+4\pi\kappa') \frac{\partial U'}{\partial n'}$

$\varphi = V - U$

$\mathfrak{B} = -\nabla V \quad (H = -\nabla U) \quad \mathfrak{I} = -\nabla \varphi$

$-4\pi \sigma_f = \frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U'}{\partial n'}$

$\varphi = \int \frac{\sigma_f}{r}\, dS$

$= + \int \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial U'}{\partial n} \right) dS$

$\cancel{= \frac{\partial U}{\partial n}\left[\ldots \frac{\mu}{\mu'}\right]}$

$\cancel{\sigma_f = \frac{\partial U}{\partial n}\left(\frac{\kappa - \kappa'}{\mu'}\right)}$

$= \frac{\kappa L_n - \kappa' L_n}{\mu} = \frac{\mathfrak{I} - \mathfrak{I}'}{\mu} \cancel{\cos\theta}$

$\varphi = \int \frac{\mathfrak{I} \cos\theta}{r}\, dS$

$= \int \left(\frac{A \cos nx}{r} + \frac{B \cos ny}{r} + \frac{C \cos nz}{r} \right) dS$

$= \cancel{\ldots}\; 4\pi \left(\kappa \frac{\partial U}{\partial n} - \kappa' \frac{\partial U'}{\partial n'} \right)$

$\sigma_f = \cancel{4\pi} (\mathfrak{I}_n - \mathfrak{I}'_n)$

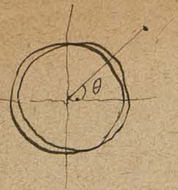
$= \iiint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{B}{r} + \ldots \right] dv =$

$= \mathfrak{I} \cos\theta$

$= \iiint A \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} + \ldots \quad + \iiint \frac{1}{r} \underbrace{\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \ldots \right)}_{=0}$

$\cancel{\varphi = m \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\, ds}$

$= \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}$



$V_i = A x \quad \| \quad \mathcal{L} = a$

$\frac{\partial V_{in}}{\partial n} = A \cos\theta = \frac{\partial V_{en}}{\partial n} \quad | \quad L = \frac{A}{\mu}$ $\qquad J = \frac{\kappa A}{\mu}$

$\sigma_f = \frac{\kappa A}{\mu} \cos\theta$

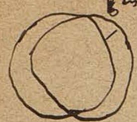
$U_e = \frac{\kappa A}{\mu} \frac{\cos\theta}{r^2} \frac{4\pi a^3}{3} + B \frac{\cos\theta}{r}$

$A \cos\theta = -\kappa A \cos\theta \cdot \frac{8\pi}{3} - B \frac{\cos\theta}{a^2}$

$A = \frac{B}{a^2\left(1 + \frac{8\pi\kappa}{3}\right)}$

$V_i = \frac{B x}{a^2\left(1 + \frac{4\pi\kappa}{3}\right)}$ $\qquad U_i = \frac{1}{\mu}$ $\qquad \varphi =$

$V_e = \frac{\kappa B x}{\left(1 + \frac{4\pi\mu}{3}\right)} \cdot \frac{4\pi a}{3 r^3} + \frac{B x}{r \mu}$



$J\cos\varphi$

$$\frac{4\pi}{3} a^3 J \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{4\pi a^3}{3} J \frac{\cos\varphi}{r^2} = \varphi_e$$

$$\frac{4\pi}{3} J x = \frac{4\pi}{3} J r \cos\varphi = \varphi_i$$

$$U_i = Ax \qquad U_e = ? = V_e = \frac{4\pi a^3}{3} J \frac{\cos\varphi}{r^2} + Ax$$

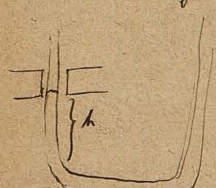
$$\frac{\partial V_i}{\partial r} = A\cos\varphi + \frac{4\pi}{3} J\cos\varphi \qquad \Big\| \ \frac{\partial V_e}{\partial r} = \frac{\partial U_e}{\partial r} = \frac{8\pi}{3} J\cos\varphi + A\cos\varphi$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{3} J\cos\varphi$$

$J =$

Siły ponderomotor. z energii

$$-\varrho h s\, dh + \frac{K}{2} R^2 \varrho\, dh = 0$$



$$s h = \frac{K}{2} R^2$$

$$X = -\frac{\partial (W - W_0)}{\partial x} = \frac{1}{2}\int \partial\ [illegible] + \cdots \quad - L^2 \quad = \frac{K}{2}\int \frac{\partial R^2}{\partial x}\, dv$$

$$X = \int \frac{i}{r^3}\left[dy\,(\zeta - z) - dz\,(\eta - y)\right]$$

$$\mathfrak{F} = \int i\, V\, ds\, \frac{\mathfrak{r}}{r^3}$$

$$\mathfrak{f} = \operatorname{curl} \mathfrak{A} = i \operatorname{curl} \int \frac{d\mathfrak{s}}{r} = \nabla U$$

$$S\, \mathfrak{v}\, \mathfrak{f} =$$

$$U = i\omega = \int i \,\cancel{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}}\, S\, n \nabla\left(\tfrac{1}{r}\right) df$$

$$= i \int S\, \mathfrak{Z}\, ds$$

$$\cancel{\mathfrak{Z} = \operatorname{curl} \int \frac{\nabla \frac{1}{r}}{r}}$$

$$i\left(n_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + n_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + n_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z}\right)$$

$$+ j\left(n_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + n_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \ldots\right)$$

$$\nabla U = i \nabla \omega = i \int \nabla S\, n \nabla\left(\tfrac{1}{r}\right) df$$

$$= n_1 \frac{\partial}{\partial x} \nabla\left(\tfrac{1}{r}\right) + n_2 \frac{\partial}{\partial y} \nabla \tfrac{1}{r} +$$

$$= \cancel{S\, n \nabla \nabla\left(\tfrac{1}{r}\right)} = (S\, n \nabla)\nabla\left(\tfrac{1}{r}\right)$$

$$\cancel{\operatorname{curl}^2\left(\tfrac{1}{r}\right) - \nabla^2 \tfrac{1}{r}}$$

$$\cancel{= i \int S\, n \operatorname{curl}^2\left(\tfrac{1}{r}\right) df}$$

$$\cancel{= i \int S \operatorname{curl}\left(\tfrac{1}{r}\right) . ds}$$

$$\boxed{=\operatorname{curl} \mathfrak{Z}}$$

Praca przy przemieszczeniu $\mathfrak{v}$ =

$$\mathfrak{f}$$

$$\mathfrak{f} = \int V \frac{\mathfrak{r}\, ds}{r^3}$$

$$S\, \mathfrak{v}\, \mathfrak{f} = \int S\, \mathfrak{v}\, V \frac{\mathfrak{r}\, ds}{r^3} = \int \underbrace{S\, ds\, V \frac{\mathfrak{v}\, \mathfrak{r}}{r^3}}_{= \int d\omega} = \int S\, \mathfrak{r}\, V \frac{\mathfrak{v}\, ds}{r^3}$$

52

$\operatorname{curl} \mathfrak{f} = 4\pi u$

$\mathfrak{f} = \operatorname{curl} \mathfrak{a}$

corresp. rule

~~$\operatorname{curl}^2 \mathfrak{f} = \nabla^2 \mathfrak{f} =$~~

$L = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} = i\left(\frac{y-\eta}{r^3} dz - \cdots\right)$

$\operatorname{curl}^2 \mathfrak{a} = -\nabla^2 \mathfrak{a} = +4\pi c = 4\pi u$

$\mathfrak{a} = \int \frac{\mathfrak{c}\, dx}{\dots} \quad \left\{ \begin{matrix} F \\ G \\ H \end{matrix} \right.$

$M = \quad \cdots$

$N = \quad \cdots$

$L\,dx + M\,dy + N\,dz = 0$

$(\xi - x) L + \cdots = 0$

$\mathfrak{h} = \nabla \cdots = \frac{i}{r^2} \sin\, ds = i \frac{V \mathfrak{r}\, d\mathfrak{s}}{r^3}$

Ten jeden nie ma ... mniej takie wyrażeń z pot wyjątku

$\int \frac{S \mathfrak{a} V \mathfrak{r}\, d\mathfrak{s}}{r^3} = \int \frac{S\, d\mathfrak{s}\, V \mathfrak{a} \mathfrak{r}}{r^3}$

$\int i\, dw = \int \frac{i\, S \mathfrak{r} V \mathfrak{a}\, d\mathfrak{s}}{r^3} = \int i \frac{S\, d\mathfrak{s}\, V \mathfrak{r} \mathfrak{a}}{r^3} = \int i \frac{S \mathfrak{a} \mathfrak{r}\, V \mathfrak{r}\, d\mathfrak{s}}{r^3}$

~~$\int \frac{\partial i}{r} r\, dr$~~

$d\xi = 0 - d\xi$

$G = i \int \frac{dy}{r}$

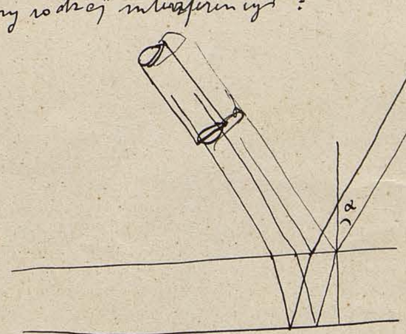
$\frac{\partial G}{\partial z} \quad \frac{\partial G}{\partial z}$

Gdyby obie płyty $\parallel$ to $\Delta = 0$

$\nparallel$ Δ równe dla wszystkich $\parallel$ promieni

W rzeczyw. światło nie zupełnie $\parallel$ (albo też wychodzące promienie nie zupełnie $\parallel$) zatem prążki interf. $\parallel$ Jeżeli teraz za środek jednego promienia innym jest to zmiana pozycyi prążków. Mierzyć albo ~~zuchwyję~~ liczyć ich ilość albo kompensację.

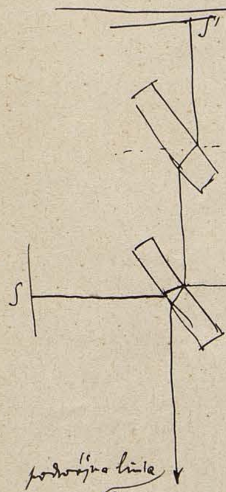
Inny rodzaj interferencyi :



jeżeli powierzchnie zupełnie $\parallel$:
wszystkie pod kątem α padające promienie będą mieć tę samą różnicę fazy

ona się zmieni jednak z różnicą kąta α

linie równego nachylenia α



Interferometr Michelsona: tak jakgdyby płyta pomiędzy S'S''
odsuwając S'' można zmniejszać lub powiększać S'S''

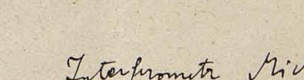
Aż do 300000 λ (czerw. Cd)
540.000 (ziel. Hg)

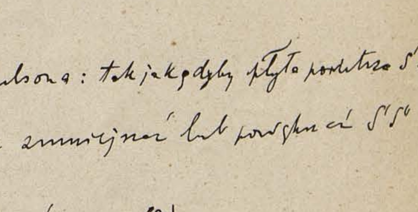
To jest ~~…~~ miarą jednorodności światła

Dla n.p. Na: w szkle Newtona : interf. stają się wreszcie niewyraźne, nikną, znów powstają etc.

wtedy gdy maximum jednej linii na minimum drugiej

zniknęły przy $\delta = 0{\cdot}1445$ m
znów wyraźne $0{\cdot}289$ m





~~$\lambda \cdot 2n \quad \frac{0{\cdot}1445}{0{\cdot}000589} = 2455$~~

$\lambda_1 (n + \frac{1}{2}) = \lambda_2 n \qquad \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\lambda}{2n} = \frac{0{\cdot}000589}{2 \cdot 2455} = 0{\cdot}000\,00012$ m

Więc stanowi to środek do rozstrzygania czy linie pojed., czy podwójne

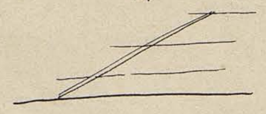
i wogóle jaki rozkład światła w liniach widmowych, jaka ich szerokość etc.

Fale stojące:

$$A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) = 2A \sin 2\pi\frac{t}{T} \cos 2\pi\frac{x}{\lambda}$$

więc węzły tam gdzie $\frac{x}{\lambda} = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}$ -

Wiener ~~phot~~ fotogr.



grubość warstwy phot. = $\frac{\lambda}{30}$!

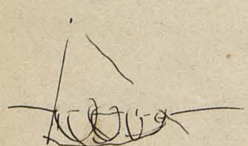
zwierciadło samo tworzy węzeł.

Fotografia w kolorach Lippmanna

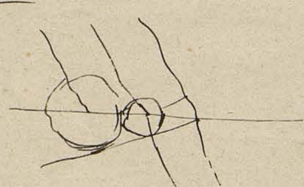
zmiana kolorów przy zwilżeniu warstwy collod.-album. — do oczu.

ukośnie rzucony daje światło — do fot.

Zasada Huyghensa: tylko w odpowiedniej ...



Zaćmienie:

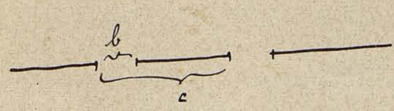


Dwie szpary

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$



$$\cancel{J = \frac{a\lambda}{2\pi\sin\beta}\left[\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\left[\cos 2\pi\delta - 1\right] + \ldots - \sin 2\pi\delta\right]}$$

$$\cancel{+ \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) - \frac{2\pi c\sin\beta}{\lambda}\right]\left[\cos\ldots\right] + \ldots}$$

$$= \frac{a\lambda}{2\pi\sin\beta}\left[\underbrace{\cos\left(\varphi + \frac{2\pi b\sin\beta}{\lambda}\right) - \cos\varphi}\ + \underbrace{\cos\left(\varphi - \frac{2\pi(b+c)\sin\beta}{\lambda}\right) - \cos\left(\varphi - \frac{2\pi c\sin\beta}{\lambda}\right)}\right]$$

$$\underbrace{\sin\left(\varphi - \frac{\pi b\sin\beta}{\lambda}\right)\cdot\sin\frac{\pi b\sin\beta}{\lambda} + \sin\left(\varphi - \frac{2\pi(b+c)\sin\beta}{\lambda}\overset{+\frac{c}{2}\sin\beta}{}\right)\sin\frac{\pi b\sin\beta}{\lambda}}$$

$$= \sin\frac{\pi b\sin\beta}{\lambda}\ \sin\left(\varphi + \frac{\pi(2b+c)\sin\beta}{2\lambda}\right)\cos\frac{\pi c\sin\beta}{\lambda}$$

$$J = \left[\frac{ab}{\ldots}\ \frac{\sin\pi b\frac{\sin\beta}{\lambda}}{\pi b\frac{\sin\beta}{\lambda}}\cdot\cos\pi c\frac{\sin\beta}{\lambda}\right]^2$$

Więc Max. Min takie same jak przedtem

a oprócz tego Max $\frac{c\sin\beta}{\lambda} = 0, 1, 2, \ldots$

Min. $\frac{c\sin\beta}{\lambda} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \ldots$

System pręcików

$$\frac{a\lambda}{2\pi\sin\beta}\left[\sin\frac{\pi b\sin\beta}{\lambda}\left[\sin\overbrace{\left(\varphi - \frac{\pi b\sin\beta}{\lambda}\right)}^{\Sigma} + \sin\left(\Sigma - \frac{\pi c\sin\beta}{\lambda}\right) + \sin\left(\Sigma - \frac{2\pi c\sin\beta}{\lambda}\right) + \ldots\right]\right]$$

$$2\sin\Sigma + 2\sin(\Sigma+\alpha) + 2\sin(\Sigma+2\alpha) + \ldots + 2\sin(\Sigma+n\alpha) = 2S$$

$$\sin\Sigma + 2\left[S - \sin\Sigma - \sin(\Sigma+n\alpha)\right]\cos\alpha + \sin(\Sigma+n\alpha) = 2S$$

$$S = \frac{\left[\sin\Sigma + \sin(\Sigma+n\alpha)\right]\left[1-2\cos\alpha\right]}{2(1-\cos\alpha)} = \sin\Sigma$$

$$S = \cancel{\sin\left(\varepsilon+\frac{n\alpha}{2}\right)\cos\frac{n\alpha}{2}\frac{[1-2\cos\alpha]}{1-\cos\alpha}} -$$

$$\cancel{\text{Ampl.} = \frac{a\lambda}{2\pi s \sin\beta}\,\sin\frac{\pi b \sin\beta}{\lambda}\,\cos\frac{n\pi c\sin\beta}{2\lambda}\,[1}$$

$$\cancel{S = \frac{\sin\varepsilon + \sin(\varepsilon+n\alpha) - 2\sin\varepsilon\cos\alpha - 2\sin(\varepsilon+n\alpha)\cos\alpha - 2\sin\varepsilon + 2\sin\varepsilon\cos\alpha}{2(1-\cos\alpha)}}$$

$$\cancel{= -\frac{\sin\varepsilon - \sin(\varepsilon+n\alpha)[1-2\cos\alpha]}{2(1-\cos\alpha)}} -$$

$$2\sin(\varepsilon+\alpha)\cdot\cos\alpha = \sin\varepsilon + \sin(\varepsilon+2\alpha)$$

$$2\sin(\varepsilon+2\alpha)\cos\alpha = \sin(\varepsilon+\alpha) + \sin(\varepsilon+3\alpha)$$

$$2\ldots$$

$$2\sin(\varepsilon+n\alpha)\cos\alpha = \sin(\varepsilon+(n-1)\alpha) + \sin(\varepsilon+(n+1)\alpha)$$

$$2S\cos\alpha = \underbrace{2S - \sin\varepsilon}_{+\sin(\varepsilon+\alpha)} + \sin(\varepsilon+(n+1)\alpha) - \sin(\varepsilon+n\alpha) - \sin(\varepsilon+\alpha)$$

$$S = \frac{\sin\varepsilon + \sin(\varepsilon+n\alpha) - \sin(\varepsilon+(n+1)\alpha)}{2(1-\cos\alpha)} = \cancel{\sin\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\left[\varepsilon+\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right]\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cancel{\frac{\sin\left(\varepsilon+\frac{n\alpha}{2}\right)\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos\left(\varepsilon+\frac{n\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}{2(1-\cos\alpha)} = \frac{\sin\left(\varepsilon+(n+1)\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

$$= \frac{\sin\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\left(\varepsilon+\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right)\sin\frac{\alpha}{2}}{2(1-\cos\alpha)}$$

$$\sin\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2} - \left[\cos\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{2}\right)\cos n\alpha - \sin\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{2}\right)\sin n\alpha\right]\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$= \sin\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cancel{\begin{aligned}&\sin\varepsilon + \sin(\varepsilon+\alpha)\\ &+\sin(\varepsilon+n\alpha) - \sin(\varepsilon+n\alpha)\cos\alpha\\ &\qquad - \cos(\varepsilon+n\alpha)\sin\alpha\end{aligned}}$$

$$\cancel{= 2\sin(\varepsilon+n\alpha)\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2\cos(\varepsilon+n\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\varepsilon+\frac{n-1}{2}\alpha\right) + 2\sin\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{\sin\left(\varepsilon + \frac{n+1}{2}\alpha\right)\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \cancel{\sin\left[\frac{\varepsilon}{2} + \frac{n+1}{2}\alpha\right]\cos\varepsilon}$$

$$= \frac{\left[\cos\left[\varepsilon + \left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right] - \cos\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{2}\right)\right]\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\ \sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\sin\left[\varepsilon + (n+1)\alpha\right] - \sin\left[\varepsilon + n\alpha\right] - \sin(\varepsilon+\alpha) - \sin\varepsilon}{\ldots}$$

$$I = a^2 b^2 \left(\frac{\sin\frac{\pi b u}{\lambda}}{\frac{\pi b u}{\lambda}}\right)^2 \left(\frac{\sin n\frac{c\pi u}{\lambda}}{\sin\frac{c\pi u}{\lambda}}\right)^2$$

$$u = 0 \quad : \quad J = (abz)^2$$

$$u = \frac{m\lambda}{b+c} \qquad J = (abz)^2\left(\frac{\sin\frac{mb\pi}{c}}{\frac{mb\pi}{c}}\right)^2 \quad \text{Max. II}$$

~~Max. I~~ $u_0 = 0 \quad u_1 = \frac{\lambda}{b+c} \quad u_2 = \frac{2\lambda}{b+c}$ —

Max. I: $u_0 = 0 \quad u_1 = \frac{\lambda}{b} \quad u_2 = \frac{2\lambda}{b}$ —

Min. III $u_0 = \frac{\lambda}{n(b+c)} \quad \frac{2\lambda}{n(b+c)}$ —

między nimi Max III

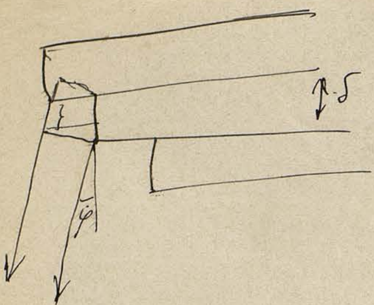
λ ~~prop~~ u widmo normalne

szer. frob

2 ie i trzecie widmo już zakrywają się częściowo

Rowland $\frac{1700}{mm}$ odległości

| czem większe n tem węższy prążek



$n\delta - \delta\cos\varphi + a\sin\varphi$ jeśli to $= k\lambda$

dla prostych: $k\lambda = (n-1)\delta$

$k\,d\lambda = \delta\,dn + (\delta\sin\varphi + a\cos\varphi)\,d\varphi'$

jeśli φ małe: $d\varphi' = \dfrac{k\,d\lambda - \delta\,dn}{a}$

$= \dfrac{\delta}{a}\left[(n-1)\dfrac{d\lambda}{\lambda} - dn\right]$

Jeśli otwór w kształcie koła: prążki

pierwsze minimum pod kątem $\varphi = 0{\cdot}61\,\dfrac{\lambda}{r}$ r promień objektywu

n.p. $\lambda = 0{\cdot}00056$ —

$\varphi = \dfrac{1{\cdot}2'}{r\,(\text{mm})}$ n.p. $r = 20$ cm $\varphi = 0{\cdot}7''$

Oko ludzkie $r = 2$ $\varphi = 0{\cdot}42'$

$\lambda' = \dfrac{\lambda}{n} = \dfrac{\lambda}{1{\cdot}4}$

Cauchy $\frac{1}{n^2} = A - \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} +$

Briot: $= a - b\frac{n^2}{\lambda^2} + \frac{c\,n^4}{\lambda^4} + k\frac{\lambda^2}{n^2}$

Wüllner: $= 1 - P\lambda^2 + \Omega \frac{\lambda^4}{\lambda^2 - \lambda_m^2}$

Ketteler: $= a^2 + \frac{M_1}{\lambda^2 - \lambda_1^2} - k\frac{\lambda^2}{z}$

$\sigma = \frac{1}{2} f(r-at)$

$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$

$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k = (1+\sigma)^k$ 57

$\frac{\partial p}{\partial x} = p_0 \, k \, (1+\sigma)^{k-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x}$

$\cancel{\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = - p_0}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -a^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \end{aligned}\right\}$$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}$

$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$

$\sigma = \frac{A}{r} \sin \frac{(r-at)}{\lambda} \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$

$\frac{\partial v}{\partial t} = + a^2 A \left[\frac{\sin}{r^2} + \frac{\cos}{r} \cdot \frac{2\pi}{\lambda}\right]$

$v = a A \left[-\frac{\cos(r-at)}{r^2} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} - \frac{\sin(r-at)}{r}\right] + \text{const}$

$\cancel{\int_{\lambda}^{\lambda+1} r^2 v^2 \, d\omega \, dr = a^2 A^2}$

$\frac{A}{r_1} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - at)$

$v = \frac{aA}{r_1} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (r - at)$

$\int_{r=n\lambda}^{r=(n+1)\lambda} \frac{1}{2}\rho v^2 \, dr = \frac{a^2 A^2}{r_1^2} \int \sin^2 \ldots dr = \frac{a^2 A^2}{r_1^2} \int \frac{1-\cos 2}{2} \, dr = \frac{a^2 A^2}{r_1^2} \frac{\lambda^2}{2 \cdot 2\pi}$

$= \frac{a^2 A^2 \lambda^2}{4\pi r_1^2}$

Czemu dwie trąby nie 4 razy tak głośno jak jedna?

1). Przyjmujemy naprzód równość tonów: interferencja.

$$\sigma = \frac{A}{r_1}\cos(r_1 - at) + \frac{B}{r_2}\cos(r_2 - at)$$

$$A = B$$
$$r_1 \neq r_2$$

$r_1 - at = r_2 - at + \pi$

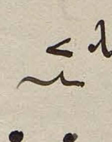
$r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{2}$ czyli napotka albo przy minimalnej odległości

$\sigma = 0$

$r_1 - at = r_2 - at$

$r_1 - r_2 = 0$, ...

$\sigma = \frac{2A}{r}\cos(r - at)$ podwójna ~~amplituda~~



2). W rzeczywistości jednakże zawsze mała różnica wysokości, tak że otrzymujemy zawsze dudnienia

$$\sigma = m \sin 2\pi n t + n \underbrace{\sin 2\pi(n+1) t}_{\sin 2\pi n t \cos 2\pi t + \cos 2\pi n t \sin 2\pi t}$$

$$= \sin 2\pi n t . (m + n\cos 2\pi t) + \cos 2\pi n t .\ n \sin 2\pi t$$

$$= A \sin(2\pi n t + \delta)$$

$$\left.\begin{aligned} A\cos\delta &= m + n\cos 2\pi t \\ A\sin\delta &= n\sin 2\pi t \end{aligned}\right\} \quad A^2 = m^2 + n^2 + 2mn\cos 2\pi t$$

$$\operatorname{tg}\delta =$$

$$6 = m\left[\sin 2\pi n t + \sin 2\pi(n+m)t\right]$$

$$\cancel{= m\,2\cos}$$

$$= -\frac{m}{2}\sin 2\pi\left(n + \frac{m}{2}\right)t \cdot \cos\frac{2\pi m t}{2}$$

$$\cancel{\sin(2\pi n t + 2\pi t + \delta)}$$

$$\cancel{A\sin 2\pi n t.}$$

nach Quinckes

$$2(\sin\alpha + \sin\beta) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cancel{= \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$- \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

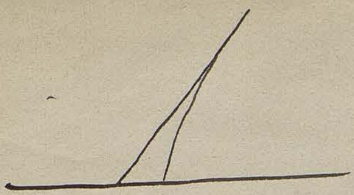
$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\left[\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right]\left[\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right]$$

$$= \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \cancel{\ldots} + \cancel{\ldots}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

$$\cancel{+ \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \ldots\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

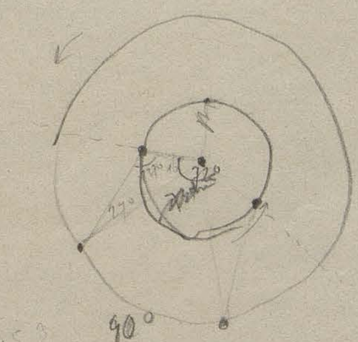
59



$$\frac{\cdot}{\cdot}\frac{d^2y}{dx^2} = F(y)\,dy$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - c^2 = \int_\infty^0 F(y)\,dy$$

$$tg\beta = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\sin\alpha + \frac{1}{c^2}\int F(y)\,dy}}$$



$$\frac{73}{356} \cdot 360 = 72^0$$

$$\frac{73}{356} \cdot \frac{356}{656} \cdot 360 = 40^0$$

$$\frac{60.600}{36.000 \cdot 3{,}700}$$

3	6	12	24
4	4	4	4
7	10	16	28
7.7	14.5	20	30
88	225	765	684

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{4\mu}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial x}$$

$$p = p_0 + a^2 \rho_0 \sigma$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{4\mu}{3\rho_0} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0$$

$$\cancel{u = e^{i\alpha t}}$$

$$\cancel{-\alpha^2 f - a^2 \frac{d^2 f}{dx^2} - i \frac{4\mu}{3\rho_0} \alpha \frac{d^2 f}{dx^2} = 0}$$

$$u = e^{i\alpha t + \beta x}$$

$$-\alpha^2 - a^2 \beta^2 - \frac{4\mu}{3\rho_0} i \beta^2 \alpha = 0$$

$$\beta = \gamma + i\varepsilon$$

$$-\alpha^2 - a^2(\gamma^2 - \varepsilon^2) + \frac{4\mu}{3\rho_0} 2\gamma\varepsilon\alpha = 0$$

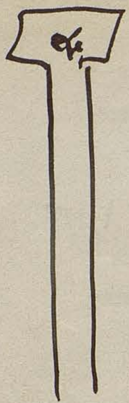
$$-2a^2\gamma\varepsilon - \frac{4\mu}{3\rho_0} \alpha (\gamma^2 - \varepsilon^2) = 0$$

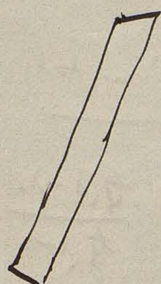
$$\gamma^2 - \varepsilon^2 = \frac{\alpha^2 a^2}{a^4 + \frac{16\mu^2\alpha^2}{9\rho_0^2}} \neq \frac{\alpha^2}{a^2}$$

$$2\gamma\varepsilon = \frac{\frac{4\mu\alpha^3}{3\rho_0}}{a^4 + \frac{16\mu^2\alpha^2}{9\rho_0^2}}$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{a} \qquad \gamma = {}^2\mu$$

Hoje d.





	α	β	
H_2	$35°50'$	80	$80°50'$
	$25°$	70	$60°21'$
CO_2	$35°50'$	$49°50'$	$48°19'$
	$25°$	$33°20'$	$32°33'$

Ponditum-wode

$p_0 = p_0(1 + k\sigma)$

$\rho = \rho_0(1 + \beta p)$

$\sigma = \rho_0 \beta p$

$p = p_0(1 + k_1\sigma_1)$

$k_1 = 0.00005 \cdot 10^{-6}$

$a^2 = \sqrt{\frac{p_0 k_1}{\rho_0}} =$

$$\rho = \rho_0[1 + \beta(p - p_0)]$$

$$\beta(p - p_0) = \frac{\rho}{\rho_0} - 1 = \sigma$$

$$p = p_0 + \frac{\sigma}{\beta} = p_0\Big[1 + \underbrace{\frac{\sigma}{\beta p_0}}_{k_1}\Big]$$

$$a_1^2 = \sqrt{\frac{1}{\beta \rho_0}} = \sqrt{2} \cdot 10^5$$

$$k_1 = \frac{1}{\beta p_0} = 2 \cdot \frac{10^{10}}{10^6} = 2 \cdot 10^4$$

$$A'' = A' \left.\frac{k_1 \sin 2\lambda' - k \sin 2\lambda_1}{k_1 \sin 2\lambda' + k \sin 2\lambda_1}\right|_{\lambda' = 0} = \frac{k_1 a - k a_1}{k_1 a + k a_1}$$

$$A_1 = \frac{k(A' + A'')}{k_1} = \frac{k}{k_1} \frac{2 k_1 a}{k_1 a + k a_1} = \frac{2ka}{k_1 a + k a_1}$$

k_1 bardzo duże A_1 bardzo małe

$A_2 = 10^{-4} A'$

$$(A'-A'')\sin 2\lambda' = A_1 \sin 2\lambda_1 \qquad k_1$$

$$k(A'+A'') = k_1 A_1 \qquad \sin 2\lambda_1$$

$$A'(k_1 \sin 2\lambda' - k \sin 2\lambda_1) = A''(k_1 \sin 2\lambda' + k \sin 2\lambda_1)$$

Juili $k = k_1$

$$A'' = A' \frac{\sin 2\lambda' - \sin 2\lambda_1}{\sin 2\lambda' + \sin 2\lambda_1} = A' \frac{\sin\lambda'\cos\lambda' - \sin\lambda_1\cos\lambda_1}{+}$$

$$= A' \frac{\sin(\lambda+\lambda')\cos(\lambda-\lambda')}{\dots}$$

$$= A' \frac{tg(\lambda-\lambda_1)}{tg(\lambda+\lambda_1)}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$A_1 = A'(1 + \dots) = 2A' \frac{\sin 2\lambda'}{\sin 2\lambda' + \sin 2\lambda_1}$$

$$\perp : A' \frac{1-\frac{\lambda_1}{\lambda}}{1+\frac{\lambda_1}{\lambda}} = A' \frac{1-\frac{a_1}{a}}{1+\frac{a_1}{a}}$$

$a : a_1 = H_1$

$A' = -0.5833\, A'$

$J'' = 0.3402\, J'$

$a = a_1 \qquad \lambda = \lambda_1$

$A' - A'' = A_1$

$k(A'+A'') = k_1 A_1$

$\cancel{A' = A''}$

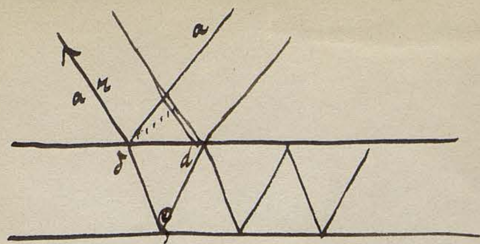
$\rho'' = \rho' \qquad a^2 = k\frac{\mu}{\rho}$

$a^2 : a'^2 = k : k_1$

$$(A'-A'')\sin 2\lambda' = A_1 \sin 2\lambda_1$$

$$(A'-A'')\sin^2\lambda = A_1 \sin^2\lambda_1$$

$$A'' = A' \frac{tg\lambda_1 - tg\lambda}{tg\lambda_1 + tg\lambda} = \frac{\sin(\lambda_1-\lambda)}{\sin(\lambda_1+\lambda)}$$



$a\, r\, \cancel{\sin}\, \varphi$

$a\, d\, \rho\, \delta\, \cancel{\sin}(\varphi - 2\varepsilon)$

$a\, d\, \rho^3 \delta\, \cancel{\sin}(\varphi - 4\varepsilon)$

$a\, d\, \rho^5 \delta\, \sin(\varphi - 6\varepsilon)$

$$\frac{d^2\Sigma}{d\varphi^2} = -\Sigma$$

$$\left(\frac{d\Sigma}{d\varphi}\right)^2 = -\Sigma^2 + C$$

$$\frac{d\Sigma}{\sqrt{C - \Sigma^2}} = d\varphi$$

$$\arcsin \frac{\Sigma}{a} = \varphi + b$$

$$\Sigma = a \cos(\varphi + b)$$

$$\Sigma = m \cos\varphi + m^2 \cos 2\varphi + m^3 \cos 3\varphi + \dots$$

$\varphi = 0$

$$\Sigma = m + m^2 + m^3 + \dots = \frac{m}{1-m} \qquad a \cos b = \frac{m}{1-m}$$

$\cancel{\varphi = \pi}$ $\quad \Sigma = -m + m^2 - m^3 + - \dots$

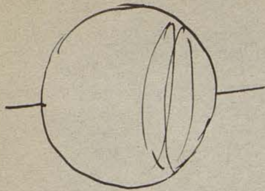
$$= \frac{m^2}{1-m^2} - \frac{m}{1-m^2} = \cancel{\dots} = \frac{m^2 - m}{1-m^2} = -\frac{m}{1+m}$$

$$\Sigma\, a \cos(\pi + b) = -a \cos b = -\frac{m}{1+m}$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\quad \Sigma = m^2 \cos \pi + m^4 \cos 2\pi + \dots$

$$= -m^2 + m^4 - m^6 + m^8 = \frac{m^4}{1-m^4} - \frac{m^2}{1-m^4} = -\frac{m^2}{1+m^2} = -a \sin b$$

$$a^2 = \frac{m^2}{(1-m)^2} + \frac{m^4}{(1+m^2)^2} = \underline{\qquad}$$



$$\overbrace{2\pi a^2 d\varphi \sin\varphi \cdot 6 \frac{2\pi a \sin\varphi}{T}}^{e}\ \overbrace{\frac{\sin\varphi}{a^2}}^{u}$$

$$= \frac{4\pi^2 a 6}{T}\int_0^{\pi} \sin^3\varphi\, d\varphi = \frac{16\pi^2 a 6}{3T}$$

czy elektront. [illegible] dunk [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible].

$$-4\pi 6 = \frac{\partial V}{\partial n} \qquad \frac{4\pi a}{3T}\frac{\partial V}{\partial n}$$

[illegible] $\frac{a\pi}{2} = 10^{7} m = 10^9 cm$

$T = 86400$

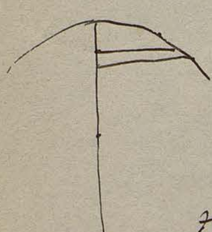
$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{600 V}{1m} = 0{\cdot}02$

$$4 = \frac{8 \cdot 10^9 \cdot 0{\cdot}02}{2{\cdot}6 \cdot 10^5} = \frac{1}{2}\ 10^3 \text{ (elst)}$$

$$= \frac{1}{6}\ 10^{-7} \text{ (elm)}$$

$$\int_0^a n \cdot \frac{2\pi r\, dr\, 6}{r} = 2\pi n 6 a = \frac{\pi a^2 6 \cdot n}{\frac{a}{2}}$$

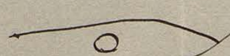
Mo tu $\int 2\pi r\, dr\, 6 \cdot \frac{2\pi r}{T}\frac{1}{r^2}$



$$6 = \cancel{\frac{\varphi}{2\pi\sqrt{a^2-r^2}}}\ \frac{\varphi}{2a\pi\sqrt{a^2-r^2}}$$

$F =$

Abocuumie



Ósrómes zbon nego 7 elekt

$$4\pi i = \cancel{}\ \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi\rho\mathfrak{u} = c \operatorname{curl} \mathfrak{H}$$

$\downarrow$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \operatorname{div}\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{u} = c \operatorname{curl} \mathfrak{H}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = - c \operatorname{curl} \mathfrak{E}$$

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{H}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = -(\nabla\mathfrak{u})\mathfrak{E} = - \mathfrak{E} \operatorname{div}\mathfrak{u} + \mathrm{V}\operatorname{curl}\ldots$$

$$\mathfrak{H} =$$

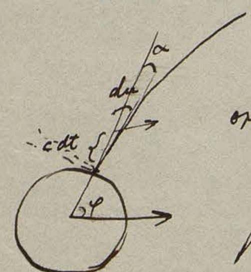
$$T_{u'} - T_u = m_u \frac{du}{dt}\, ds \qquad m_u^{2)} = \frac{\sqrt{2T}}{u}$$

$$= m_u \frac{ds}{dt}\, du$$

$$m_{tr} = \frac{F R}{u^2}$$

$$m_u^{1)} = \frac{1}{u}\frac{dT}{du}$$

~~[illegible]~~ wykład. 20



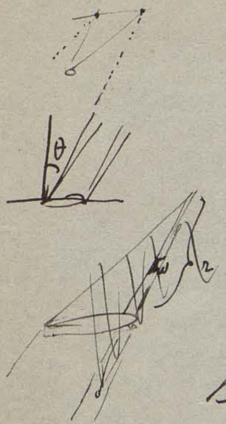
opóźnienie ruchu powoduje skrzywienie linij siły

$$\alpha = \frac{du}{dt}\frac{\cos\varphi}{c}$$

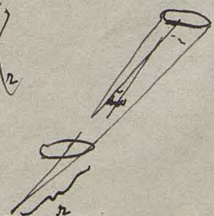
$$\frac{e}{a^2} \cdot \int 2\pi a^2 \overset{\sin\varphi}{\cancel{}}\, d\varphi \cdot \frac{eu \sin\varphi}{a^2} \frac{du}{dt} \frac{\cos\varphi}{c} = \frac{2\pi}{a^2} \frac{e^2 u}{c} \frac{du}{dt} \frac{2}{3}$$

$$= \frac{4\pi}{3} \frac{e^2 u}{a^2 c} \frac{du}{dt}$$

63a



$$\frac{e^{-\alpha r'}}{r^2}\, r^2 \overset{dr}{d\omega} \cos\varphi \;\cancel{\;}$$



$$\frac{e^{-\alpha r}}{R^2} \cos RN \quad dS' . \underset{R^2 dR\, d\omega}{\overset{\shortparallel}{d v}} \qquad R = r + R'$$

$$dS \cos RN \int e^{-\alpha r} dr \, . \, \omega = \frac{dS \cos ns}{R'^2}$$

$$\cos RN \cos ns$$

$$\frac{mv^2}{r} = kr + \frac{evH}{c^2}$$

$$m\omega^2 r = kr + \frac{e\omega r H}{c^2}$$

$$\omega^2 + \frac{e}{m}\omega H = \frac{k}{m}$$

$$\omega = -\frac{eH}{2m} \pm \sqrt{\frac{k}{m} + \left(\frac{eH}{2m}\right)^2}$$

$$\omega_1 - \omega_2 = -\frac{eH}{m} = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda}\right) c$$

$$\frac{e}{m} = \frac{4\pi\; 0\cdot 6 .\, 10^{-4} \;.\; 3.10^{10}}{9000 .\; 2\cdot 2 .\; 10^4}$$

$$= \frac{10^6}{10^8}$$

$$v = \cancel{\quad} r\omega$$

$$= 2\pi r n$$

$$\omega = 2\pi n$$

$$= \frac{2\pi c}{\lambda}$$

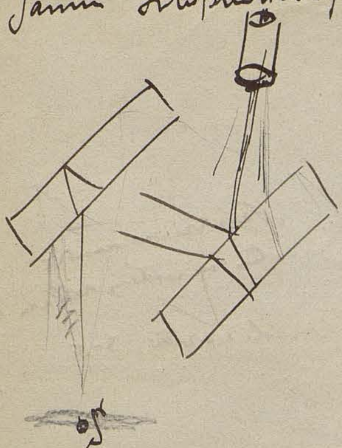
$$\lambda \frac{D_1 - D_2}{\lambda} = \frac{1}{1000}$$

D_1 D_2 $H = 22400$

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda} = \frac{1}{8900}$$

$\cancel{\;} = i\, V_n$

Jamin Interferential refractor



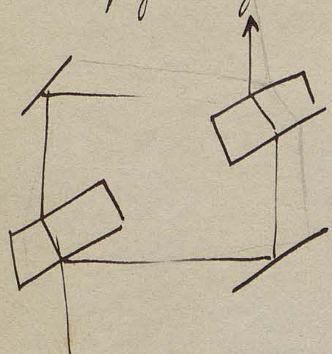
$$\varepsilon = \frac{4\pi\delta}{\lambda'}(\cos\beta_1 - \cos\beta_2)$$

prążki zależne od nachylenia pl.

korzyść że powinne znacznie odległe

najmniejsze różnice (n) można mierzyć

Jamin lepiej według Macha



Lippmann fot. nat. barw. Coll. album. 4 I 1902

warstwy $\frac{\lambda}{2}$ więc światło odbite ma rodzaj λ

$\frac{\lambda}{2}$

$\frac{\lambda}{3}$ it.

właściwie nieznacznie zatem nie tylko dokładnie barwy

[nie wiele warstw 3–5

Zwilgocenie: barwy ku czerw. końcowi } przesuwają się

nachylenie: ku fiol.

$a\cos\alpha + a\frac{d\delta}{\rho}\left[\underbrace{\rho^2\sin(\alpha+\varepsilon)+\dots}\right]$

$\rho^2\cos\varepsilon+\rho^4\cos 2\varepsilon+\dots = e = S_1$

$\rho^2\sin\varepsilon+\rho^4\sin 2\varepsilon+\dots \quad S_2$

$\underbrace{\rho^2 e^{i\varepsilon}+\rho^4 e^{2i\varepsilon}+\rho^6 e^{3i\varepsilon}}\dots = \rho^2\cos\varepsilon+\rho^4\cos 2\varepsilon\dots + \quad = S_1+iS_2$

Optyka

Histor. Emanat. Undul.

$\neq 500{\cdot}8$ sec

$d = 2973 \cdot 10^5$ km

996 sec.
1002 sec

Glasenapp

0. Olof Römer 1675 Newton i Huyghens potw. podczas gdy Cassini i Maraldi sprzeciwili się

$\delta = 8^m \, 18{\cdot}2^s$

Glasenapp $8^m \, 20{\cdot}8^s \quad \pm \frac{2}{1000}$ Parallaxa słońca: Encke 1824: $8{\cdot}57''$

Newcomb $8{\cdot}85'' \pm \frac{1}{200}$

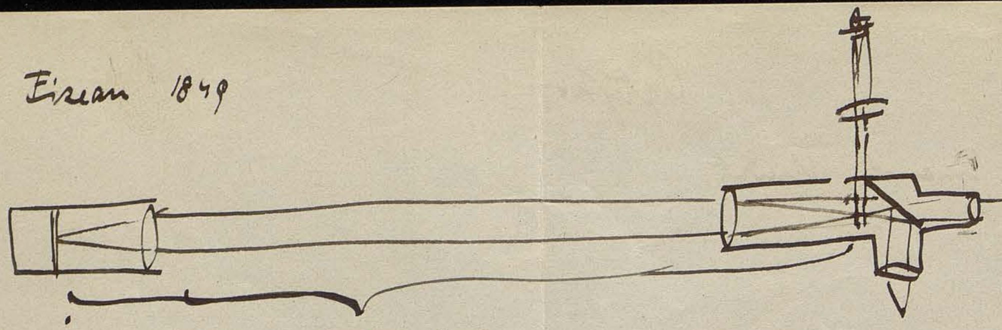
$v = 297.100$ km $\pm \frac{1}{2} - 1\,\%$ Zapewne Michelson odwróci się bardziej mierząc rozmiary astron. przez fizyka

2). Bradley 1727 makal parel. gwiazd

$\alpha = 20{\cdot}25''$ Gill: $20{\cdot}496'' \pm \frac{1-2}{1000}$

$v = \frac{u}{tg\,\alpha} = \frac{2\pi R}{T\,tg\,\alpha} = 298.200$ km [ale znów zależnie od paralaxy!

3). Fizeau 1849



$2l$ = droga

$$\frac{2l}{V} = \frac{1}{2nz} = \frac{2}{2n_1 z} = \frac{4}{2n_2 z}$$

n gdy zniknie
n_1 znów się ukazuje

$$V = 4lnz = 4\frac{ln_1}{2}z = 4\frac{ln_2}{4}z \;--$$

$l = 8{\cdot}633$ km

$z = 720$

$n = 12{\cdot}6$

$v = 313\,300$ km

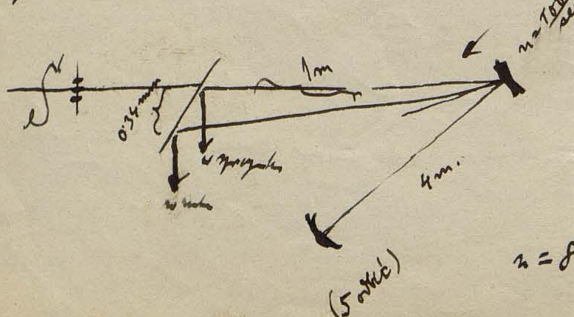
Cornu rejestrując przyrządem elektrycznym, tak samo obroty

n aż do 1600 [zatem n_{21}

(1874) średnia wartość 299950 ± 400

---

4). Foucault 1849



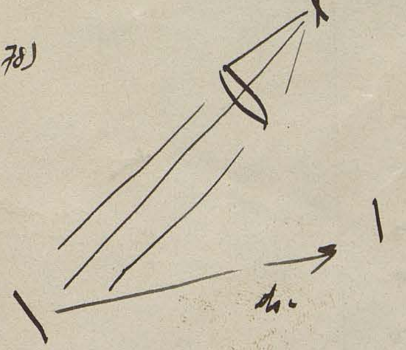
przy każdym obrocie ukazuje się 1 raz
ale z powodu szybkości — ciągłe

$n = 800$

$c = 298\,000$ km

Michelson

(1878)



l = 600 m

przesunięcie 133 mm

v = 299 895

Newcomb (1885) 299 860

Średnia przyjmuje: v = 299 890 ± 30

Podczas gdy astron.: 297 690 zatem przeciwne... od ... teorię ...

α Centauri 3 ¼ ann.

Sirius 17

~~Teorya emisyj. v(woda) > v(pow)~~

undul. .. < ..

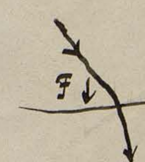
W wodzie Fizeau i Foucault ~~4:3~~ 3:4

Michelson 1·33

Niezal. od natężenia (Lippich) (Ebert) interf.

czerw. 1·4% 2·5% > niebieskie (Michelson)
woda CS2

W próżni niezal. od koloru zaczerwien.



0·434 ± 0·02

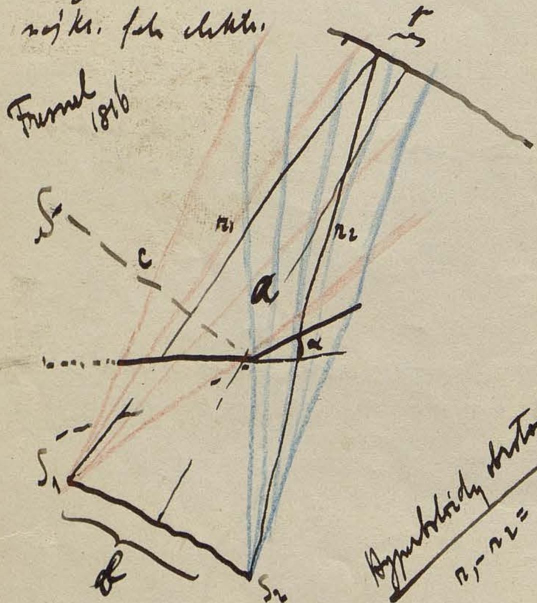
$\frac{n^2-1}{n^2} = 0·438$

Optika (?)

Undul. : $6 = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

λ prof. (Vacuum / Schumann) ~~0.000~~	0.1μ
bez V.	0.185
nieb. kon.	0.33
H_2 nieb.	0.486
Na	589
H_2 czerw.	656
czerw. kon.	812
najdł. fale cieplne (Rubens, Anklinen)	60.–
najkr. fale elektr.	6000

Fresnel 1816



Hyperboloidy odstawa ku S_1 i S_2

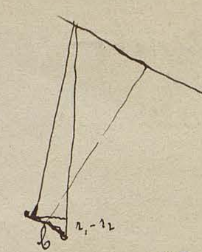
$r_1 - r_2 =$

$r_1^2 = \left(\frac{b}{2} - p\right)^2 + a^2$

$r_2^2 = \left(\frac{b}{2} + p\right)^2 + a^2$

$r_1^2 - r_2^2 = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = -2bp$

$r_1 - r_2 = \frac{bp}{a}$



$b = \frac{a \Delta r}{p} = \frac{100.~~000~~ 10^{-4}}{10^{-1}}$

$= 10^{1}$

10 cm

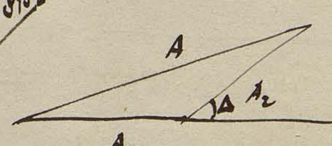
Kwadrat = miara natężenia ; natężenie $\frac{1}{r^2}$

$A_1 = \frac{a}{r^2}$

$A_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) + \quad \frac{r_2}{\lambda} =$

$= A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \delta\right)$

$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \underbrace{2\pi\left(\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right)}_{=\Delta}$



max. $\Delta = 0, 2\pi \ldots$

min

$p = \pm \frac{a}{b}\frac{\lambda}{2}, \quad 3\frac{a}{b}\frac{\lambda}{2}, \quad 5 \ldots$

Zjawiska kolorowe z wyjątkiem 0

zamiast ekranu lupa ; możność. pom.

ujrzenia

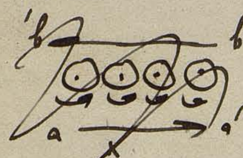
Częściowo wywód matemat., częściowo interpretacya

I prawo indukcyi

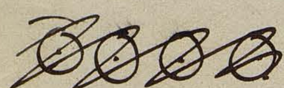
II prawo elektromagn. (praca)

III. prąd składa się z. ; taki prąd polegający na ruchu elektronów.

wogóle równania różniczkowe

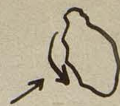
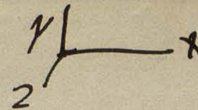


prądy ku nam, postępujące; tworzą siły magn. a a', b b'
poruszaniu tylko wytwarza siły elektr.

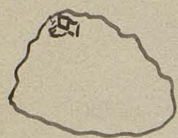


przeciwdziałające pierwszym a w różnym kierunku

Boltzmann
Poincaré Elektr. & Opt.
Föppl - Abraham
Heaviside
Hertz Wied. Ann. 40 p. 577, 41 p. 369
Cohn
(Thomson
Silberstein
Lorentz Encyclop.
Helmholtz

$\overbrace{i\,w}^{E} = -\frac{d\varphi}{dt}$



$\mu \frac{\partial L}{\partial t}\, dy\,dz = \cdot\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) dy\,dz$

$4\pi i = \int F\, ds$

$4\pi u\, dy\,dz = \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) dy\,dz$

$u = \lambda(X-X') + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}$ z określenia Max-

$-4\pi\sigma = KX$ | w kondensatorze

$K\frac{\partial X}{\partial t} = 4\pi u$

równie wiele ze wszystkich punktów

$u = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}$

$$\left. K\frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi\lambda\,(X - X') = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \right\}$$

$$W = \int \frac{K}{8\pi}\left(X^2 + Y^2 + Z^2\right) dv + \int \frac{\mu}{8\pi}\left(L^2 + M^2 + N^2\right) dv$$

$r_n = r_{n-1} + \frac{\lambda}{2}$

$\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a+r_{n-1}}{\lambda}\right) - \pi\right]$

$$s_{p_n} = \int_{r_{n-1}}^{r_n} = \frac{k_n \lambda A}{a+b}\left\{\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a+r_{n-1}}{\lambda}\right) - \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a+r_n}{\lambda}\right)\right\}$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{2k_n \lambda A}{a+b}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a+b}{\lambda}\right)$$

$$s_{p_n} = s_1 - s_2 + s_3 - s_4 \cdots$$

$$= \frac{s_1}{2} + \left(\frac{s_1}{2} - s_2 + \frac{s_3}{2}\right) + \left(\frac{s_3}{2} - s_4 + \frac{s_5}{2}\right) + \cdots \qquad + \frac{s_n}{2}$$

$$= s_1 - \frac{s_2}{2} - \left\{\left(\frac{s_2}{2} - s_3 + \frac{s_4}{2}\right) + \left(\frac{s_4}{2} - s_5 + \frac{s_6}{2}\right) + \cdots \right\}$$

$$\frac{s_1}{2} < s_{p_n} < s_1 - \frac{s_2}{2}$$

$$\frac{s_1}{2} > s_{p_n} > s_1 - \frac{s_2}{2}$$

$$s_{p_n} = \frac{s_1}{2} = \frac{k_1 \lambda A}{a+b}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a+b}{\lambda}\right)$$

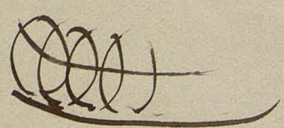
Więc można by myśleć że ustawiając ekran w | objętości połowy strefy pierwszej otrzyma się „cienia" – ale to nieprawda

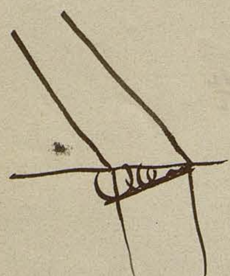
zawsze jasność na osi jeżeli nadajemy k [illegible]
jest znana i jeżeli krawędź geometrycznego cienia koło!

Uginanie (Beugung)

Huyghens

Tworzenie się promieni ?



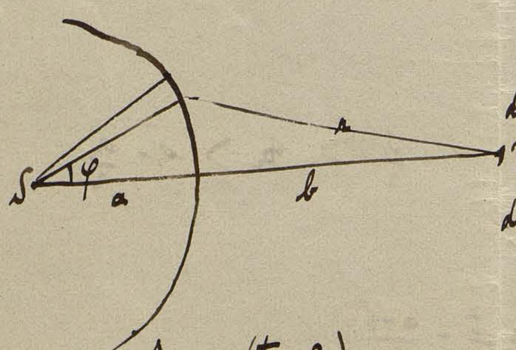


Jednak: 1). Światło z drugiej strony otworu

2). Czemu przy wązkich otworach uginanie ?

Środkiem zaś ... ?

Fresnel: zasada że fale elementarne interferują



$$ds = \frac{A}{a} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a}{\lambda}\right)$$

$$df = 2\pi a^2 \sin\varphi \, d\varphi$$

$$ds_p = \frac{2\pi a^2}{r} \sin\varphi \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a+r}{\lambda}\right) d\varphi$$

$$r^2 = (a+b)^2 + a^2 - 2(a+b)a \cos\varphi$$

$$\cancel{2} r\,dr = +\cancel{2}\, a(a+b) \sin\varphi \, d\varphi$$

$$ds_p = k.\frac{2\pi a}{a+b} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a+r}{\lambda}\right) dr$$

$$r_0 = b + \frac{\lambda}{2}$$

$$r_1 = r_0 + \frac{\lambda}{2}$$

$$r_2 = r_1 + \frac{\lambda}{2}$$

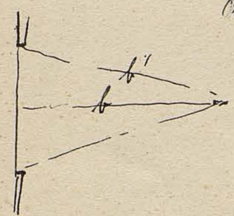
W przestrzeni ~~niefodnej~~ wolnej zatem ten sam skutek jak gdyby bezpośrednio wschodziła fala.

1). Jeśli ekran w kształcie krążka zawsze jasno, bo

$$s = \pm\left[\frac{s_n}{2} + \left(\frac{s_n}{2} - s_{n+1} + \frac{s_{n+2}}{2}\right) + \dots \right] \mp \pm \frac{s_n}{2}$$ (dojdzie nachylenie nie za duże)

2) Jeśli dziura okrągła, to zależy od tego czy ilość stref parzysta czy nieparzysta

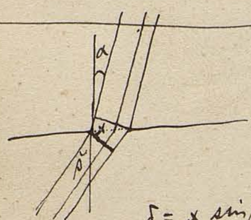
Promienie równoległe:



$$b' - b = m\frac{\lambda}{2}$$

W odległości ∞ $b' - b = 0$

zatem gdy pierwszy raz ~~punkt czarny~~ środek czarny to $b' - b = \lambda$



$$\int_0^b a\,dx\cos\alpha \sin 2\pi\left[\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} - \frac{x(\sin\beta - \sin\alpha)}{\lambda}\right]$$

$$\delta = x\sin\beta + (b - x)\sin\alpha - b\sin\alpha = x(\sin\beta - \sin\alpha)$$

$$= \frac{a\cos\alpha\,\lambda}{2\pi(\sin\beta - \sin\alpha)}\left[\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x + b(\sin\beta - \sin\alpha)}{\lambda}\right) - \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

$$= \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)\left[\cos 2\pi\delta - 1\right] + \sin \cdot \sin 2\pi\delta$$

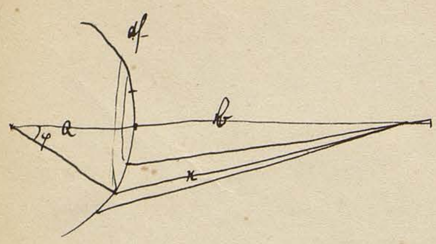
$$J = \frac{a^2\cos^2\alpha\,\lambda^2}{\left[2\pi(\sin\beta - \sin\alpha)\right]^2}\left[1 + 1 - 2\cos 2\pi\delta\right] = \frac{a\cos\alpha\,\lambda}{\pi(\sin\beta - \sin\alpha)}\sin^2\frac{\pi b(\sin\beta - \sin\alpha)}{\lambda}$$

$$= \frac{a^2b^2\cos^2\alpha}{\lambda}\frac{\sin^2\delta}{\delta^2} = \left[ab\cos\alpha\frac{\sin\delta}{\delta}\right]^2$$

Maxima przyp. ~~$1^2 \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{25} \dots$~~

$$1 \quad \frac{1}{3^2} \quad \frac{1}{5^2} \quad \frac{1}{7^2}$$

Fresnel



$$\cos\varphi = \frac{r^2 - a^2 - (a+b)^2}{2a(a+b)} = \frac{r^2 - b^2 - 2ab - 2a^2}{2a(a+b)}$$

$$\sin\varphi \, d\varphi = \frac{r\,dr}{a(a+b)}$$

$$df = 2\pi a^2 \sin\varphi\, d\varphi = \frac{2\pi a r\,dr}{a+b}$$

$$\sigma_a = \frac{A}{a} \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{a}{\lambda}\right)$$

$$d\sigma = df\, k \frac{A}{ar} \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{a+r}{\lambda}\right) = \frac{2\pi A}{a+b} k \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{a+r}{\lambda}\right) dr$$

$$\sigma_n' = \int_{r_{n-1}}^{r_n} = \frac{k_n \lambda A}{a+b}\left[\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{a+r_n}{\lambda}\right) - \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{a+r_{n-1}}{\lambda}\right)\right]$$

$$r_{n-1} = b + \frac{n-1}{2}\lambda \quad \Big\| \quad r_n = b + \frac{n}{2}\lambda$$

$$\sigma_n' = (-1)^{n+1} \frac{2 k_n \lambda A}{a+b} \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{a+b}{\lambda}\right)$$

$$\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 \ldots$$

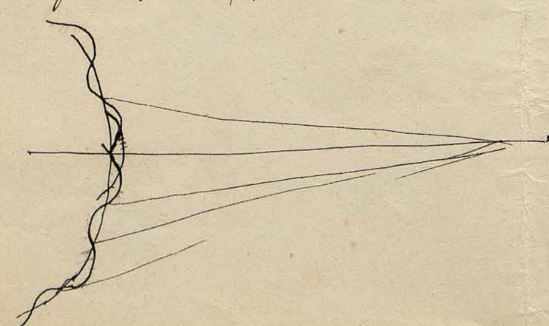
$$= \frac{\sigma_1}{2} + \left(\frac{\sigma_1}{2} - \sigma_2 + \frac{\sigma_3}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_3}{2} - \sigma_4 + \frac{\sigma_5}{2}\right) + \ldots$$

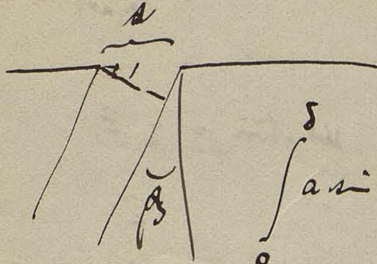
$$= \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{2} - \left(\frac{\sigma_2}{2} - \sigma_3 + \frac{\sigma_4}{2}\right) - \ldots$$

jeżeli k zmniejsza się stopniowo

$$\frac{\sigma_1}{2} < \sigma < \underbrace{\sigma_1 - \frac{\sigma_2}{2}}_{\text{blisko} = \frac{\sigma_1}{2}} \qquad \sigma \doteq \frac{\sigma_1}{2}$$

Wystarcza tylko $\frac{1}{2}$ strefy centralnej





$$\int_0^\delta a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - s \operatorname{tg}\beta\right) ds$$

$$\frac{a \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - s \operatorname{tg}\beta\right)}{\operatorname{tg}\beta}$$

$$= \frac{a}{\operatorname{tg}\beta}\left[\cos \dots - \cos \dots\right] = \frac{a}{\operatorname{tg}\beta} \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\delta}{2}\operatorname{tg}\beta\right)\right] \cdot \sin \frac{\delta}{2}\operatorname{tg}\beta$$

$\pi\frac{\delta \sin\beta}{\varphi\lambda} = \pi$

$$\frac{\delta a}{2}\left(\frac{\sin \pi\frac{\delta \sin\beta}{\lambda}}{\frac{\delta \sin\beta}{2}}\right)^2 = \frac{a\delta \cdot \sin \pi\frac{\delta\sin\beta}{\lambda}}{\frac{\pi\delta\sin\beta}{\lambda}}$$

$$a\,\frac{\sin\left(\frac{\delta}{2}\sin\beta\right)}{\sin\beta}\left\{\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\delta}{2}\sin\beta\right) + \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\delta}{2}\sin\beta - b\sin\beta\right] + \dots\right.$$

$$\sin\varphi + \sin(\varphi-\delta) + \dots = \sin\varphi\left[1 + \cos\delta + \cos 2\delta + \dots \cos(n-1)\delta\right]$$
$$+ \cos\varphi\left[\sin\delta + \sin 2\delta + \dots\right]$$

$$1 + z + z^2 + \dots z^m = \frac{\dots}{1-z} \qquad z = e^{i}$$

$$1 + \cos\delta + \cos 2\delta + \dots = R\,\frac{1}{1-\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{1-\cos\varphi - i\sin\varphi}{(1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} = \frac{1-\cos\varphi}{2(1\cdot}$$

$$= S_m$$

$$zS = S + z^{m+1} - 1$$

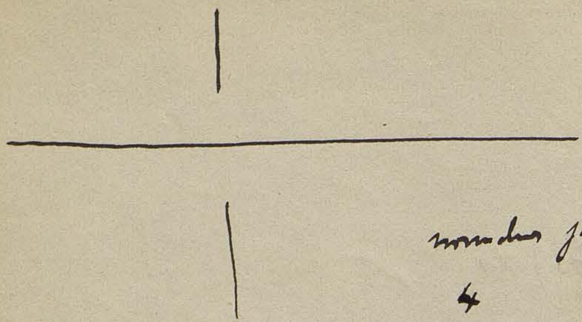
$$S = \frac{z^{m+1}-1}{z-1} = \frac{1-z^{m+1}}{1-z}$$

$$(1-\cos\varphi - i\sin\varphi)\left[1 - \cos(m+1)\varphi - i\sin(m+1)\varphi\right]$$

$$= (1-\cos\varphi) - \cos(m+1)\varphi + \cos\varphi\cos(m+1)\varphi - \sin\varphi\sin(m+1)\varphi$$

$\cancel{1}\cdot b\,\frac{\lambda}{2} = a(a+b)\,\alpha^2$

$\alpha = \sqrt{\frac{b}{a(a+b)}\frac{\lambda}{2}}$



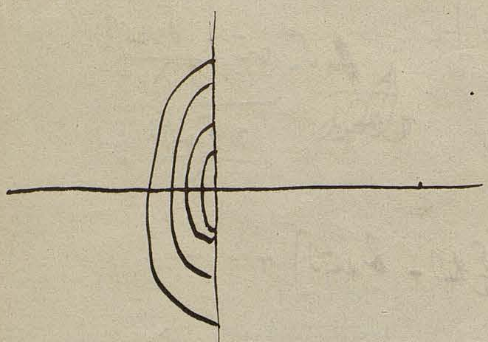
normalna jasność jest ~~tak~~ która $= \frac{1}{2} Z_1$

4 $\qquad Z_1$

norm. $\qquad \cancel{1}\, Z_1 + \frac{1}{2} Z_2$

0 $\qquad Z_1 + Z_2$

Zamiast różnych ekranów można też wziąć jeden i ten sam ale punkt przesuwać.



$4n^2$ jasność

$(n\frac{\lambda}{2} + b)^2 = (a+b)^2 + a^2 - 2a(a+b)\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)$

$bn\lambda\ \cancel{1} = \cancel{2a^2} + \cancel{2ab} - \cancel{2a^2} - \cancel{2ab} + \cancel{1}(a+b)a\cdot\varphi^2$

$\varphi = \sqrt{\frac{b}{a(a+b)}\, n\lambda}$ $\qquad$ np. a

$\cancel{\varphi}\ (b + n\frac{\lambda}{2})^2 = b^2 + \rho^2$

$\rho = \sqrt{b n \lambda}$

np. $b = 100$

$\lambda = 0{\cdot}00005$

$\rho =$

Cykliczne ruchy   Centryfugal regulat.   Monocykel

Bicykel

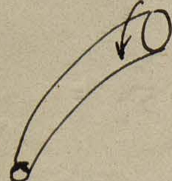
$$T = \frac{A}{2} l_1'^2 + \frac{B}{2} l_2'^2 + C l_1' l_2'$$

$$E = -\frac{d}{dt}\left(\mathcal{L}_1 i_1 + M_{12} i_2\right) + i_1 w$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial l_1'}\right) = L_1 = \frac{d}{dt}\left(A l_1' + C l_2'\right) + \overline{W}_1$$

$$L_2 = \frac{d}{dt}\left(C l_1' + B l_2'\right) + \overline{W}_2$$

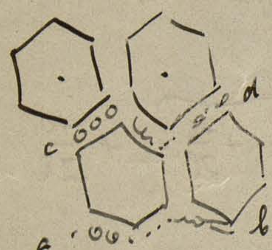
$$K = -\frac{\partial T}{\partial k} = -\frac{l_1'^2}{2}\frac{\partial A}{\partial k} - \frac{l_2'^2}{2}\frac{\partial B}{\partial k} - l_1' l_2' \frac{\partial C}{\partial k}$$



$$p_{\parallel} = p_0 + \rho\omega^2 \int_0^r r\,dr = p_0 + \rho\frac{v^2}{2}$$

średnie ciśnienie $\perp$ $p_2 = p_0 + \frac{\rho v^2}{4}$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{4}\rho v^2$$



I). Prawo elektrolizy

II). Indukcja

ruch a b powoduje powstanie .de ...

III). Prąd przemienny przyjmujący ...

$$2 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^{19} = 8 \cdot 10^{23}$$

$$\frac{10^4}{8 \cdot 10^{23}} \cdot 3 \cdot 10^{10} = \frac{3}{8 \cdot 10^9} = 4 \cdot 10^{-10}$$

72

$$V = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \qquad = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\Big(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\Big)}_{a}^2 + \underbrace{\Big(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\Big)}_{b}^2 + \underbrace{\Big(\qquad\Big)}_{c}^2\Big]$$

$$\frac{\partial V}{\partial F} = \frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial F} + \frac{\partial V}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial F}$$

$$= \quad b \qquad \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial F} +$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \underbrace{\alpha\frac{\partial L}{\partial x} + \beta\frac{\partial L}{\partial y} + \gamma\frac{\partial L}{\partial z}}_{1} - \Big(\underset{\text{obrót}}{M\frac{\partial \alpha}{\partial y} + N\frac{\partial \alpha}{\partial z}}\Big) + L\underbrace{\Big(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\Big)}_{\text{wzrost pola}}$$

$$+ \quad \alpha\frac{\partial M}{\partial y} + \alpha\frac{\partial N}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial t} + \alpha\Big(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta L - \alpha M) - \frac{\partial}{\partial z}(\alpha N - \gamma L) =$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\beta X - \alpha Y) - \frac{\partial}{\partial z}(\qquad) + \alpha\Big(\frac{\partial X}{\partial x} \qquad\Big) = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} - 4\pi\, \alpha$$

1000 V. kula 1 cm średn. $\Big\} = \frac{1000 \cdot 10^8}{9 \cdot 10^{20}} = \frac{1}{9}\, 10^{-9}$ cm

1 Volt $= 10^8 / = 300$ st.

$3.10^5 \qquad \frac{1}{9} \cdot 10^{-20}$

500 . 30 obr. $= \frac{15\,000}{9} \cdot 10^{-9} = \frac{1}{6}\, 10^{-5}$

1000 V.: $\frac{1}{9} \cdot 10^{-12} \cdot 100$

1 cm

$$Y = Q \sin \alpha t \qquad \frac{K}{8\pi}\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{T=\frac{2\pi}{\alpha}} Q^2 \sin^2 \alpha t\, dt = \frac{Q^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2\varphi\, d\varphi}_{\pi} \cdot \frac{K}{8\pi}$$

$$= \frac{Q^2}{2}\cdot\frac{K}{8\pi} + \frac{a^2}{2}\frac{\mu}{8\pi\mu^2 v^2} = \frac{a^2 K}{8\pi}$$

Energja w przestrzeni wypeł.

$$Y = a \sin\alpha\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

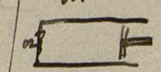
$$N = \frac{a}{\mu v}\cos\alpha\left(t-\frac{x}{v}\right)$$

$$\int\left[\frac{KY^2+\mu N^2}{8\pi}\right] = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{8\pi}\left(K+\frac{1}{\mu v^2}\right)a^2\int_0^\lambda \sin^2\alpha\left(t-\frac{x}{v}\right) dx$$

$$v^2 = \frac{1}{\mu K}$$

$$= \frac{K}{\lambda\, 4\pi}\frac{v}{\alpha}\pi a^2 = \frac{K}{4\pi}\frac{v\cdot\tau}{2\pi\cdot\lambda}\pi a^2 = \frac{K}{8\pi}a^2$$

Bartoli Boltzmann



$\frac{2\, g\, Cal}{min}$ = ilość energji spadającej na ~~minutę~~ 1 cm²

więc $\frac{2\cdot 42\cdot 10^6}{60\cdot 3\cdot 10^{10}}$ = ilość ergów zawarta w 1 cm³ $= \frac{84}{180}\cdot 10^{-4} = \frac{14}{30}\cdot 10^{-4} = \frac{7}{15}10^{-4} \doteq \frac{1}{2}10^{-4}$

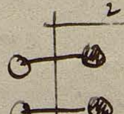
zatem ciśnienie na 1 cm²: $\frac{1}{2}10^{-4}$ Dyn

na 1 m²: $\frac{1}{2}$. Dyn

Gdyby jednak nie ma promieni powracających więc dla ciała czarnego, inaczej dwa razy tyle

$\frac{1}{2}$ mg

Lebedeff (Moskwa) 1900



(Congrès physique II p. 133)

I efekt prądów konwekc. elimin. przez oświetlanie z obu stron

II radiom. różne grubości szkła; w ogóle mały bo także rozrzedz. że pozwoliło odsysanie zwierciadło przestał III ciśnienie

na ziemię całą: $\left(\frac{10^9}{\pi}\cdot 2\right)^2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot 10^{-3} = \frac{2}{\pi}10^{15} = \frac{2}{\pi}10^{12}$ kg!

prawie tak jak ciężar kostki wody 1 km³

Ale czem mniejsze ciało tem większą rolę odgrywają tak że przy drobnych cząstkach może przeważać nad grawitacją

Komety ogony odwrócone; (Schwarzschild etc.)

$$\frac{1}{2}\Big[2KX\frac{\partial X}{\partial x} + X^2\frac{\partial K}{\partial x} + 2KX\frac{\partial Y}{\partial y} + \cancel{2KY\frac{\partial Y}{\partial x}}$$
$$-\cancel{2KY\frac{\partial Y}{\partial x}} - Y^2\frac{\partial K}{\partial y} + 2KX\frac{\partial Z}{\partial z} + \cancel{2KZ\frac{\partial Z}{\partial x}}$$
$$-\cancel{2KZ\frac{\partial Z}{\partial x}} - Z^2\frac{\partial K}{\partial z} + 2XY\frac{\partial K}{\partial y} + 2XZ\frac{\partial K}{\partial z}\Big] = X$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$$

Siła na cząstkę $\rho\, dv$: w kierunku X

$$\rho X = \left[\frac{\partial(KX)}{\partial x} + \frac{\partial(KY)}{\partial y} + \frac{\partial(KZ)}{\partial z}\right] X$$

$$= \frac{\partial\left(\frac{1}{2}K(X^2 - Y^2 - Z^2)\right)}{\partial x} + \underbrace{K\left(Y\frac{\partial X}{\partial y} + X\frac{\partial Y}{\partial y}\right)}_{\frac{\partial(XY)}{\partial y}} - \ldots \qquad - K\frac{\partial(XZ)}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

. . .

Napięcia

$$X_x = \frac{1}{2}K(X^2 - Y^2 - Z^2) \qquad X_y = KXY$$

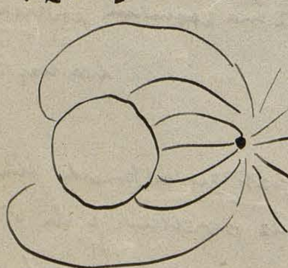
$$Y_y = \frac{1}{2}K(Y^2 - X^2 - Z^2) \qquad Y_z =$$

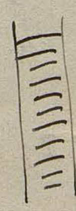
$$Z_z = \frac{1}{2}K(\qquad) \qquad Z_x =$$

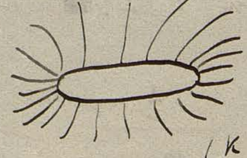
Np. X w kierunku siły

$Y = Z = 0$

$$X_x = \frac{1}{2}KX^2 \qquad Y_y = Z_z = -\frac{1}{2}KX^2 \qquad X_y = \ldots = 0$$





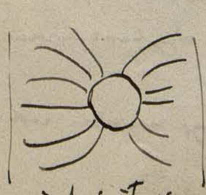


Elektrostatyka (K zmienne!)

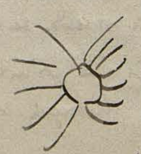
Magnetostatyka

Podobnie w elektromagnetyzmie

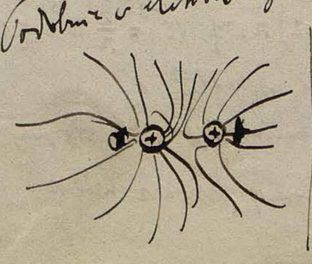
drut w polu



żadnej siły w polu jednostajnym



ale w niejednorodnym tam gdzie gęstość

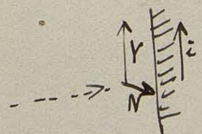


$X_x = \frac{K}{2}(X^2 - Y^2 - Z^2) + \frac{\mu}{2}(L^2 - M^2 - N^2)$ ciśnienie

$X_y = K\,YZ + \mu\,MN$

w ośrodku:

~~$X_x = A\sin\nu(z - ct)$~~ $Z_z = -\left(\frac{\varepsilon}{2}X^2 + \frac{\mu}{2}L^2\right) = -KA^2\cos^2\nu(z - ct)$



między indeksami

siły ponderom.

{ obliczyć in extenso na podstawie $Y = e^{-\alpha z}$ ...

Już Kepler 1619 kształt ogonów komet stąd się tym sposobem wytłum. (tego nie umie)

Schwarzschild ciśnienie zależne od promienia (przy uwzględ. ugięcia)

= granica dla $\lambda/2a$ = 1·5 μ

1 0·18 μ 18 razy tak silnie → tego potrzeba dla wytłum. kształtu ogonów

0·07 znów =

Nichols & Hull 1903

	dośw.	obl.
Lebedew: niesz.	1·1	1·0
Pt	1·8	1·6
Al	1·9	1·8
Ni	1·4	1·6

Ogólnie się zgadzają obl. i dośw.

na razie kładąc $K = 1$:

Siła na wszystkie ρ w kierunku X:

$4\pi\rho X = K\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \cancel{X} =$

$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$ etc.

$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K}{2}(X^2 - Y^2 - Z^2)\right) + \frac{\partial}{\partial y}(KXY) + \frac{\partial}{\partial z}(KXZ)$

$= K\left[X\frac{\partial X}{\partial x} - \cancel{Y\frac{\partial Y}{\partial x}} - \cancel{Z\frac{\partial Z}{\partial x}} + \cancel{Y\frac{\partial X}{\partial y}} + X\frac{\partial Y}{\partial y} + X\frac{\partial Z}{\partial z} + Z\boxed{\frac{\partial X}{\partial z}}\right] =$

$= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$ tak samo magnet. wojsk wyraz

$X_x = \frac{K}{8\pi}(X^2 - Y^2 - Z^2) + \frac{\mu}{8\pi}(L^2 - M^2 - N^2)$ $\quad \cancel{XY = K}$

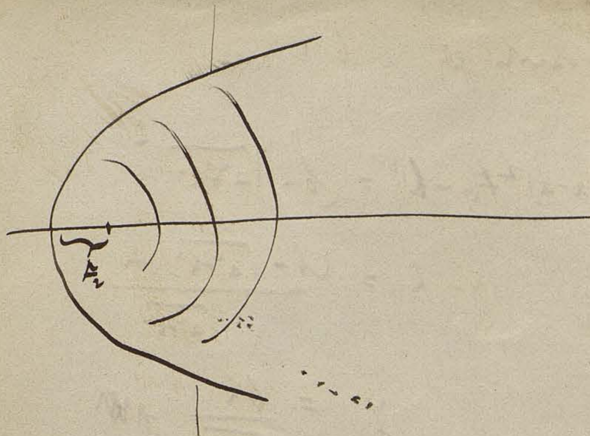
Y_y

Z_z

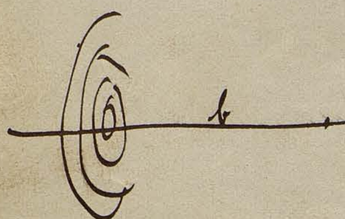
kładąc $Y = A\cos\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{c}\right) \qquad X = Z = 0$

$L = 0;\ M = \sqrt{\frac{K}{\mu}}\,A\cos\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{c}\right);\ N = 0$

pozostaje tylko $X_x = -\left(\frac{K}{2}Y^2 + \frac{\mu}{2}M^2\right) = ---$



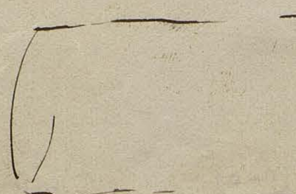
Konstrukcja Fresnela dla głosu np. n = 740
[illegible]



$$(b+n\frac{\lambda}{2})^2 = b^2+\rho^2$$

$$\rho = \sqrt{bn\lambda}$$

a jak dla światła



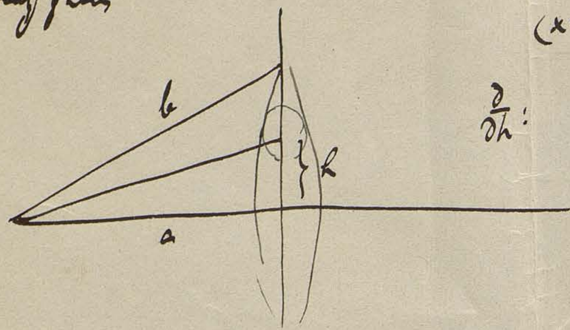
„Teleakust"

Ciężki [illegible] [illegible]

Ćwiczenia:

w chwili gdy w b ...

Huyghens



$$(x-a)^2+(y-h)^2 = \left(b-\sqrt{a^2+h^2}\right)^2$$

$\frac{\partial}{\partial h}$: $$y-h = \frac{\left(b-\sqrt{a^2+h^2}\right)h}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

$$y = \frac{bh}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

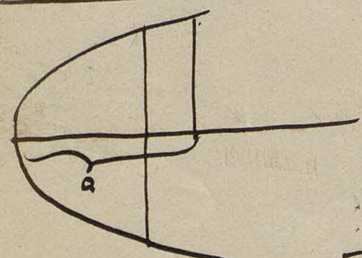
$$h = \frac{ay}{\sqrt{b^2-y^2}}$$

$$(x-a)^2 = \left(b^2 - y^2\right)\left(1-\frac{a}{\sqrt{b^2-y^2}}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{b^2-y^2}-a\right)^2$$

$$x-a = \pm\left[\sqrt{b^2-y^2}-a\right]$$

$$x^2+y^2=b^2 \quad \Big\| \quad (x-2a)^2+y^2=b^2$$



$$h^2 = 2pg$$

$$(x-g)^2+(y-h)^2 = (g-a)^2$$ tu się tylko g zmienia

$$-(x-g) - (y-h)\frac{dh}{dg} = (g-a)$$

$$\frac{dh}{dg} = \frac{p}{h}$$

$$x+\frac{py}{h}-p=a$$

$$h = \frac{py}{a+p-x}$$

$$x^2+2(a+p-x)\frac{h^2}{2p}-2hy+y^2=a^2 \quad \Big| : \quad x^2(a-x)+y^2(a-x)-a^2(a-x)-(a^2-x^2)p=0$$

$$(x^2+y^2-a^2-pa-px)=0$$

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2-\left(a+\frac{p}{2}\right)^2=0$$

$$(x-a)^2 + (y-h)^2 = \frac{\left(b-\sqrt{a^2+h^2}\right)^2}{n^2}$$

$$y - h = \left(\frac{b - \Pi}{\sqrt{a^2+h^2}} - 1\right)\frac{h}{n}$$

$$h =$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

$$V = f_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

$V \, 2y \, r$

$$\nabla^2 V \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right] \qquad V = f(r, t)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dr}\frac{x}{r}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \dfrac{1}{r}\dfrac{dV}{dr} - \dfrac{x^2}{r^3}\dfrac{dV}{dr} + \dfrac{d^2V}{dr^2}\dfrac{x^2}{r^2} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \ldots \end{array}\right\} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2\left[\frac{1}{r}\frac{dV}{dr} + \frac{d^2V}{dr^2}\right]$$

d

$$= a^2 \frac{d}{dr}\left(\cancel{V}\frac{dV}{dr}\right)$$

$$V = \ldots + f(r)$$

$$\alpha^2 f(r) = \ldots$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial I}{\partial x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) I = 0$$

$$I_n(x)$$

$$\cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \nabla^2}$$

$$\frac{\partial^2 (r\sigma)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (r\sigma)}{\partial z^2}$$

$$r\sigma = f_1\left(t - \frac{r}{a}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{a}\right)$$

[illegible] : 77

$$Y = \cancel{a e^{\alpha\kappa x} \sin \alpha(t - vx)} \qquad Y = a e^{-\alpha\kappa x} \sin \alpha (t + vx)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$N = \frac{a e^{-\alpha\kappa x}}{} \Big[\kappa \cos \alpha(t - vx) - v \sin \alpha(t - vx)\Big]_{x=0}$$

$$E \sin\left[\alpha\left(t + \frac{x}{c}\right) + \delta\right]\Big|^{x=0} + R \sin\left[\alpha\left(t + \frac{x}{c}\right) + \varepsilon\right]\Big|_{x=0} =$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$\frac{\alpha}{c} E \cos\left[\alpha\left(t + \frac{x}{c}\right) + \delta\right] - \frac{\alpha}{c} R \cos\left[\alpha\left(t + \frac{x}{c}\right) + \varepsilon\right]$$

$$N = \frac{E}{c} \sin\left[\alpha\left(t + \frac{x}{c}\right) + \delta\right] + \frac{R}{c} \sin\left[\alpha\left(t + \frac{x}{c}\right) + \varepsilon\right]$$

$$\left.\begin{aligned}
E \cos\delta + R \cos\varepsilon &= a \\
E \sin\delta + R \sin\varepsilon &= 0 \\
\frac{E \cos\delta}{c} + \frac{R \cos\varepsilon}{c} &= -a v \\
\frac{E \sin\delta}{c} + \frac{R \sin\varepsilon}{c} &= a \kappa
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
E \cos\delta + R \cos\varepsilon &= a \\
E \cos\delta - R \cos\varepsilon &= -avc
\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}
E \cos\delta &= \frac{a}{2}(1 - vc) \\
R \cos\varepsilon &= \frac{a}{2}(1 + vc)
\end{aligned}$$

$$E \sin\delta = \frac{a\kappa c}{2} = -R \sin\varepsilon$$

$$\frac{R^2}{E^2} = \frac{\cancel{\left(\frac{a}{2}\right)^2}(1 + vc)^2 + \kappa^2 c^2}{\cancel{\left(\frac{a}{2}\right)^2}(1 - vc)^2 + \kappa^2 c^2}$$

$$= \frac{\frac{a\sin\alpha}{r} r^2(1+r^2)(1-\cos\varepsilon) + \frac{a\cos\alpha}{r}\sin\varepsilon\, r^2(1-r^2)}{1-2r^2\cos\varepsilon+r^4 = (1-r^2)^2+2r^2(1-\cos\varepsilon)} =$$

$$= \frac{a}{\cancel{r}} \frac{\sin\alpha\, r(1+r^2)(1-\cos\varepsilon) - \cos\alpha\, r(1-r^2)\sin\varepsilon}{(1-r^2)^2+4r^2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$= M\sin\alpha + N\cos\alpha \qquad = \frac{2a\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\quad} \,\underline{\sin\alpha\, r(1+r^2)\sin\frac{\varepsilon}{2} - \cos\alpha\, r(1-r^2)\cos\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$M^2+N^2 = \frac{4a^2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{(\quad)^2} r^2\left[(1+r^2)^2\sin^2\frac{\varepsilon}{2} + (1-r^2)^2\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\right]$$

zn. w każdym razie $= 0$ jeżeli $\frac{\varepsilon}{2} = 0, \pi, 2\pi, \ldots$

$\varepsilon = 0, 2\pi, 4\pi \ldots$

Dla przechodzącego tam będą maxima.

Niedokładności rachunku: w rzeczywistości promienie wychodzące nie $\parallel$ bo

oko nie patrzy w ∞. I w Newtona zaś ścianki płytki nie $\parallel$.

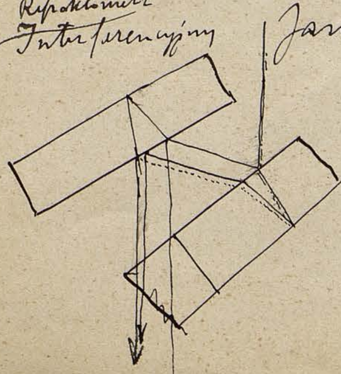
Środek czarny, światło monochromat., białe, obserwacja przez kolorowe szkło, albo widmowa

zmiana nachylenia

Używać można do mierzenia bardzo małych grubości, Abbe-Fizeau Dilatometr

---

Refraktometr
Interferencyjny Jamina



różnica fazy prom. odb. w górnej i w dolnej powierzchni:

$: \frac{4\pi hn}{\lambda}\cos\beta$

zatem różn. obu promieni:

$\frac{4\pi hn}{\lambda}(\cos\beta - \cos\beta')$

$$\cancel{2A\sin\mu\cos\Sigma = \left(\frac{A}{m} + Am\right)\sin\mu - \sin\Sigma}$$

$$A\cos\Sigma + m\cos 2\Sigma + \dots \qquad = A\cos(\mu+\Sigma) = \frac{A\cos\mu - 1}{m}$$

$$A[\sin(\mu+\Sigma)\cos\mu - A\cos(\mu+\Sigma)\sin\mu] = A\sin\Sigma = \frac{\sin\mu}{m}$$

$$A\cos \quad \cos - A\cos \quad \mu = A\cos\Sigma = \frac{A - \cos\mu}{m}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin\mu = m A\sin\Sigma \\ \cos\mu = A - mA\cos\Sigma \\ 1 = A^2 + m^2A^2 - 2mA^2\cos\Sigma \\ A^2 = \dfrac{1}{1+m^2-2m\cos\Sigma} \end{array}\right.$$

$$\cancel{m\cos(\mu+\Sigma) = \sin\mu = m(\sin\mu\cos\Sigma + \cos\mu\sin\Sigma)}$$

$$\cancel{\operatorname{tg}\mu[1 - m\cos\Sigma] = m\sin\Sigma}$$

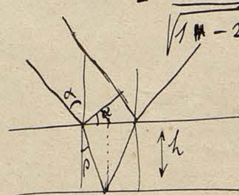
$$\cancel{\operatorname{tg}\mu = \frac{m\sin\Sigma}{1-m\cos\Sigma}} \quad \cancel{\cos\mu = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2}} = \frac{1-m\cos\Sigma}{\sqrt{(1-m\cos\Sigma)^2+m^2\sin^2\Sigma}}}$$

$$\cancel{= \frac{1-m\cos\Sigma}{\sqrt{1-2m\cos\Sigma+m^2}}}$$

$$\cancel{\sin\mu = \frac{m\sin\Sigma}{\sqrt{\ }}}$$

$$A\sin\mu = \quad A^2 m\sin\Sigma = \frac{m\sin\Sigma}{1-2m\cos\Sigma+m^2}$$

$$A\cos\mu = \quad ---A^2 - A^2 m\cos\Sigma = \frac{1-m\cos\Sigma}{1-2m\cos\Sigma+m^2}$$



$$\Sigma = 2\pi\frac{2h}{\lambda}\left(\operatorname{tg}\rho\sin\alpha - \frac{1}{\cos\rho\,\lambda}\right)$$

$$= 2\frac{2\pi h}{\lambda}\left[\frac{\sin\alpha\sin\rho}{\cos\rho} - \frac{\sin\alpha}{\sin\rho\sin\rho}\right]$$

$$= \frac{4\pi h n}{\lambda}\cos\rho$$

$$= \frac{2d\sin\alpha}{\operatorname{tg}\rho}$$

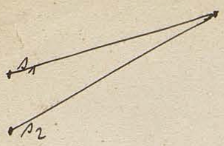
$$\cancel{6 = \frac{1}{\sqrt{1+m^2-2m\cos\Sigma}}\sin\operatorname{tg}\frac{t}{\tau}}$$

$$\cancel{6 = a r\left[\sin\alpha - \frac{(1-r^2)}{r}\left[\frac{1-m\cos(\alpha+\Sigma)\sin\alpha + m\sin(\alpha+\Sigma)\sin\alpha}{1-2m\cos(\alpha+\Sigma)+m^2}\right]\right]}$$

$$6 = ar\sin\alpha - \frac{1-r^2}{r}a\left[\frac{\sin\alpha\cdot(1-r^2\cos\Sigma) - \cos\alpha\, r^2\sin\Sigma}{1-2r^2\cos\Sigma+r^4} - \sin\alpha\right]$$

$$= a\frac{\sin\alpha}{r}\left[\frac{1-2r^2\cos\Sigma+r^4-(1-r^2)(1-r^2\cos\Sigma)}{1---}\right] + \cos\alpha\, r^2\sin\Sigma\,(1-r^2)$$

$$1-2r^2\cos\Sigma+r^4-1+r^2+r^2\cos\Sigma-r^4\cos\Sigma$$



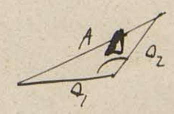
podstawowe różnica fazy = stała

$$s = a_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x_1}{\lambda}\right) + a_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x_2}{\lambda}\right)$$

$$= A \sin\left[2\pi \frac{t}{\tau} - \delta\right]$$

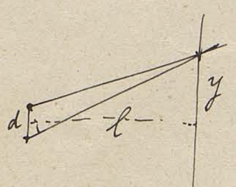
$$A \cos\delta =$$
$$A \sin\delta =$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos 2\pi\left(\frac{x_1 - x_2}{\lambda}\right)$$



ciemno tam gdzie $\frac{a_1 = a_2 \text{ i}}{x_1 - x_2} = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}$ ...

przybl.

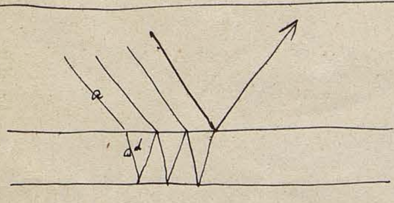


$$x_1 - x_2 = d \sin\alpha = \frac{d\,y}{l}$$

$$y = \frac{\lambda l}{2d}, \quad \frac{3\lambda l}{2d} \ldots$$

Uda się tylko jeśli to samo źródło światła jeśli ~~światła~~ źródła, łączne, światło : cohärent,

gdyby n.p. 2 świece:
δ zmienia się ciągle więc raz ciemno, raz jasno.



$$a[\sin\alpha + d\delta\rho \sin(\alpha+\varepsilon) + d\delta\rho^3 \sin(\alpha+2\varepsilon) + \sin(\alpha+3\varepsilon) + \ldots]$$

$$= \cancel{a r [\sin\alpha +}$$

$$= a r \sin\alpha + \frac{a\,d\delta}{\rho}\left[\rho^2 \sin(\alpha+\varepsilon) + \rho^4 \sin(\alpha+2\varepsilon) + \rho^6 \sin(\alpha+3\varepsilon) + \ldots\right]$$

$$r^2 + \delta^2 = 1$$

$$d\delta = 1 - r^2 \qquad r = -\rho$$

$$\sin\alpha + m \sin(\alpha \mp \varepsilon) + m^2 \sin(\alpha \mp 2\varepsilon) + \ldots = A \sin(\alpha \mp \mu)$$

$$1 + m\cos\varepsilon + m^2 \cos 2\varepsilon + \ldots = A\cos\mu \quad \Big| \sin\varepsilon$$

$$m\sin\varepsilon + m^2 \sin 2\varepsilon + \ldots = A \sin\mu \quad \Big| \cos\varepsilon$$

$$\sin\varepsilon + m \sin 2\varepsilon + m^2 \sin 3\varepsilon + \ldots = A \sin(\mu+\varepsilon) = \frac{A}{m}\sin\mu$$

$$\cancel{-\sin\varepsilon + 0 + m^2 \sin\varepsilon + \ldots} = A\sin(\mu-\varepsilon) = \cancel{\frac{A}{m}\sin\mu - \sin\varepsilon}$$

Jako charakt. uważamy rozchodzenie się prostolinie światła

Trudno jednak określ. w ścisły sposób, bo promień = abstrakc. pojęcie

Mierzenie prędkości astron. { Römer (1675) $\delta = 996^{s} = 16^{m}\ 36^{s}$

$d = 2973 \cdot 10^{5}\,km$

$V = 2.967 \cdot 10^{10}$

niepewności: d:

Bradley (1727) Aberracja $\parallel\ \varepsilon = 20.5''$

$V = 2.982 \cdot 10^{10}$

fiz. { Fizeau (1849) koło zębate Cornu: 2.9995

Young: 3.013

Foucault

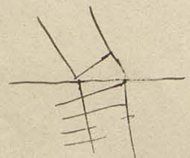
Michelson $D = 600\,m$ $n = 200$ $\Delta = 13\,cm$ $V = 2.999$

nie zależ. od natężenia, a w próżni od barwy (zaiwne § 4) podług Newcomb

W wodzie Michels. $\frac{1}{1.33}$ $(= n)$ czerw. nieb. $\}$ $\overset{>}{\underset{<}{V}}$ 1.4%

Te rezult. już wyst. do obalenia teorii emis. bo tam prędkość odwrotnie

podczas gdy tutaj



Innym wyr. zjaw. interferencji — wyobr. podobnie jak głos

$$s = A \sin\left[\alpha\left(t - \frac{x}{v}\right) + \delta\right]$$

$$\left(t' - \frac{x'}{v}\right)$$

$$t' - t = \frac{x' - x}{v}$$

$x' - x = v\,(t' - t)$

więc v = prędkość wyr.

$$\alpha = \frac{2\pi}{\tau}$$

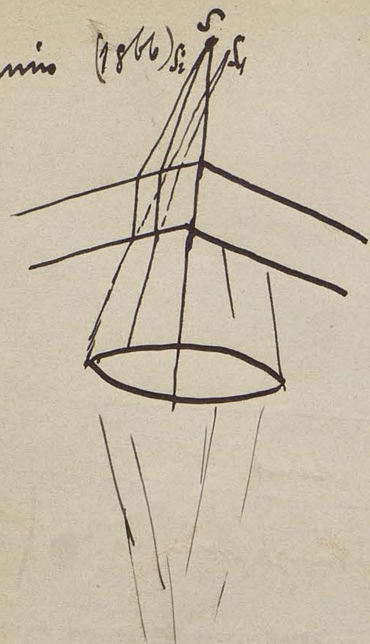
$v\tau = \lambda$

$$s = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right) + \delta\right]$$

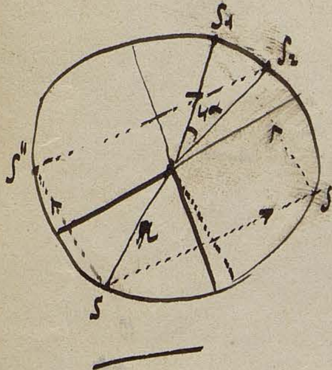
[powierzchnie ~~jedn.~~ równej fazy = pow. fali (nazywamy)

zatem w ośrodku jednor. koło prom. z kul.

Jamin (1866)



Michelson



$\delta = r\,4\alpha$

$$\delta = \frac{a\lambda}{4R\alpha} \qquad \frac{a\lambda}{b}$$

$a = r + \text{od Ekra}$

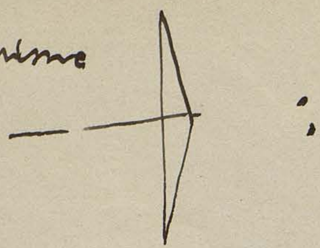
$$\delta = \frac{\lambda}{4\alpha}\left(1 + \frac{\text{od Ekra}}{a}\right)$$

jeśli odległość źródła światła duża o ekranu mała b: $\delta = \frac{\lambda}{4\alpha}$

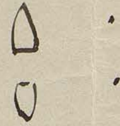
$$\left(\frac{100\,m}{1\,m}\right)$$

wiele wygodniejsze niż Fresnel
bo nie chodzi tu o dokładne stykanie się

Biprisma



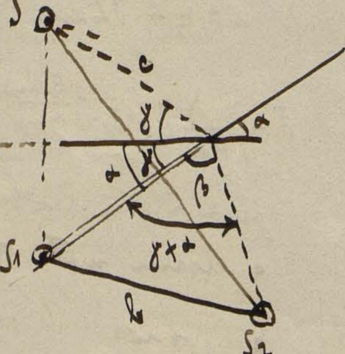
Billet soczewki podzielone.



Wogóle interf. tylko możliwe jeśli światło wszędzie (cohérent)

Czy nie ma interf. jeśli z dwóch części tego samego płomienia?

Podobnie jak w akustyce ~~[illegible]~~ które umówmy nie zdarzy się żeby ze jednem miejscem cacko, ze drugiem płomą tylko .... [dwie trąbki Lage]



$$b = 2c\sin\frac{\beta}{2} = 2c\sin\alpha$$

$$\beta = \gamma+\alpha+\alpha-\gamma = 2\alpha$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2c\sin\alpha}$$

Np. $\alpha = 10'$

$\sin\alpha = 0{,}004$

$c = 10$

$a = 100$

$\frac{a}{b} = 1200$

$$p = \pm\, 200.\frac{\lambda}{2},\ 3.200.\frac{\lambda}{2}, .$$

~~0,05 mm~~

$A \sin \frac{2\pi}{}\left(\frac{t}{\tau} - \frac{mx+ny+pz}{\lambda}\right)$

$X = A\cos\varphi \sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{c}\right)$

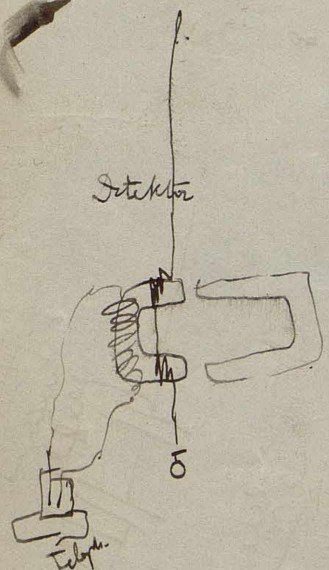
$Z = -A\sin\varphi \sin$

$M = \frac{A}{n} \sin\frac{2\pi}{\tau}\left(- \cdot \cdot \quad\right)$

$X_r = A'\cos\varphi'\sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi'}{c}\right)$

$Z_r = -A'\sin\varphi' \sin$

$\vdots$



$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$

$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{2\pi}{\tau c} A \sin\frac{2\pi}{\tau}\left(\text{—} \quad \right)$

$M = \frac{1}{c}$

$(E_p - R_p)\cos\varphi = D_p\cos\chi$

$(E_p + R_p)\sqrt{\ } = D_p\sqrt{\ }$

$2E_p = D_p\left(\frac{\cos\chi}{\cos\varphi} + \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}\right)$

$D_p = E_p \frac{2\sin\chi\cos\varphi}{\sin(\varphi+\chi)\cos(\varphi-\chi)}$ $\quad R_p = E_p\frac{\operatorname{tg}(\varphi-\chi)}{\operatorname{tg}(\varphi+\chi)}$

$R_p =$

	n	$\sqrt{K}$
por.	1·000 294	1·000 295
CO_2	1· 449	473
H_2	138	132

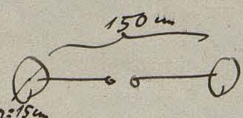
	n_D	$\sqrt{K}$
Benzol	1·50	1·5
Petroleum	1·39	1·4
CS_2	1·63	1·6
$CHCl_3$	1·45	2·3
C_2H_5OH	1·36	5
H_2O	1·33	9

$$z = A \sin\alpha\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$A \sin\alpha\left(t - \frac{x}{c}\right) + A' \sin\alpha\left(t + \frac{x}{c}\right) = 0$$

$$K_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + K_2 \frac{\partial X_2}{\partial x_2} = 0$$

K_1

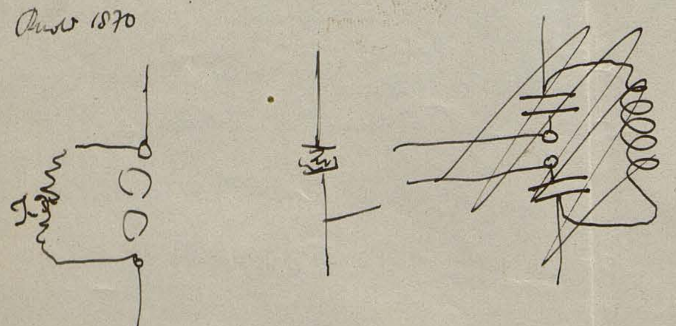
Hertz 

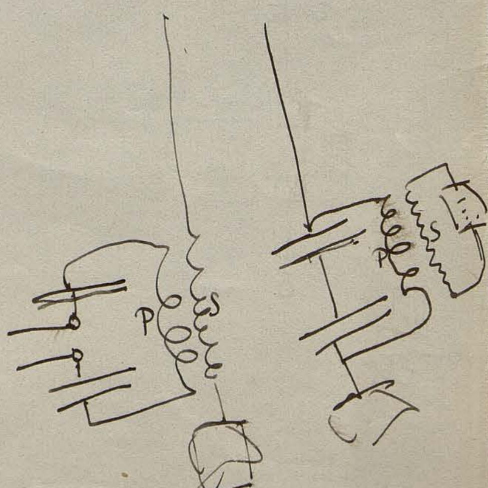
$c = \frac{15}{2} \frac{1}{v^2} =$ $L = 1802$

1887

$\tau = 1{\cdot}26 \cdot 10^{-8}$ sec $\lambda = 300$

Branly 1890





$r + \rho\, d\delta\, (e^{-i\delta} + -$

Ampl. $r + \rho\, d\delta\, \dfrac{e^{-i\delta}}{1-\rho^2 e^{-i\delta}}$ $\quad . \; d\delta\, \dfrac{1}{1-\rho^2 e^{-i\delta}}$

$\delta = \dfrac{4\pi h \cos\varphi}{\lambda}$

82°

$r + \rho = 0$

$d\delta + r^2 = 1$

$J_r = \dfrac{4 r^2 \sin^2\frac{\delta}{2}}{(1-r^2)^2 + 4 r^2 \sin^2\frac{\delta}{2}}$ $\qquad J_d = \dfrac{(1-r^2)^2}{(1-r^2)^2 + 4 r^2 \sin^2\frac{\delta}{2}}$

$J_d = d\delta \sin\gamma \; + d\delta \rho^2 \{\sin(\gamma+\varepsilon) + - -$

$= d\delta \sin\gamma [1 + \rho^2 \cos\varepsilon + \cdots]$

$+ d\delta \cos\gamma [\rho^2 \sin\varepsilon + \cdots]$

$J = d^2\delta^2 \left[1 + \dfrac{\rho^2(\cos\varepsilon - \rho^2)}{\cdots\cdots} \right]^2 + \rho^4 \dfrac{\sin^2\varepsilon}{[\cdots]^2}$

$= (1-r^2)^2 \left\{ 1 + 2\dfrac{\rho^2 \cos\varepsilon}{-N-} - \dfrac{2\rho^4}{-N-} \right\} + \cancel{\dfrac{\rho^4 (\quad - 2\rho^2\cos\varepsilon + \rho^4)}{N}} + \dfrac{\rho^4 \quad 2\varepsilon}{N}$

$= \dfrac{1 + \quad + \rho^4}{1 - - -}$

$r = -\rho$ Dla przepuszczonego światła:

$d\delta = 1 - r^2$

$$J^2 = a^2 \frac{d^2\delta^2}{1 - 2\rho^2\cos\varepsilon + \rho^4}$$

dla $\varepsilon = 0$: $J^2 = 0$: $r^2 + \frac{2 d\delta r\rho(1-\rho^2) + d^2\delta^2\rho^2}{(1-\rho^2)^2} = 0$

$$1 = \frac{d^2\delta^2}{(1-\rho^2)^2}$$

$$\therefore J = a^2 \frac{2r^2(1-\cos\varepsilon)}{1-2r^2\cos\varepsilon + r^4} = a^2 \frac{4 r^2 \sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{1 - 2r^2\cos\varepsilon + r^4} = a^2 \frac{r^2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{(1-r^2)^2 + 4r^2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$J_1 = a^2 \frac{(1-r^2)^2}{1-2r^2\cos\varepsilon + r^4} = a^2$$

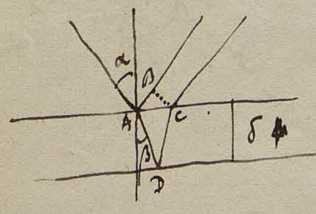
Między minim. takie bezpośrednio bez [illegible] można [illegible] ale wystarcza [illegible]

J min, J_1 max : $\varepsilon = 2k\pi$

$$2\pi\left[\frac{2AD}{\lambda'} - \frac{AB}{\lambda}\right]$$

$$\varepsilon = 2AD \cdot n - AB = \delta\left[\frac{2n}{\cos\beta} - 2\delta\, tg\beta \sin\alpha\right]$$

$$= 2\delta\left[\frac{\sin\alpha}{\sin\beta\cos\beta} - tg\beta\sin\alpha\right] = \frac{2\delta\sin\alpha}{\sin\beta\cos\beta}(1-\sin^2\beta)$$



$$= \frac{2\delta\sin\alpha}{tg\beta} \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$$

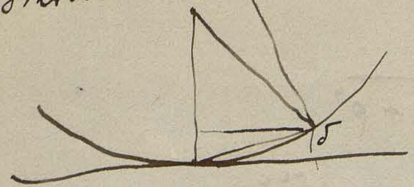
$$= 2\pi \cdot \frac{2\delta}{\lambda'}\cos\beta$$

więc zależny od δ (przy stałem β) koła

ale zmienny z nachyleniem β

Co prawda że tego nie dokładnie, bo [illegible] odstęp [illegible] promienia równoległe

Szkiełko Newtona



$\delta : x = x : 2R$

$\delta = \frac{x^2}{2R}$

$x^2 = k\frac{\lambda R}{\cos\beta}$ Min.

$x^2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}\frac{R}{\cos\beta}$ Max

Środek do mierzenia λ (Na, D)

w świetle przechodzącym

Koloy:

w większej odległości białe światło

ale po spektroskopie okaże prążki w różnych odstępach

Flintgl. Sensopaść trongl. Th. Young bardzo środek 1802 już mniej więcej uciesem wytłomaczenie

nie można pójść poza kilka λ bo niemożliwość wskutek tego że kiepskie ...

Mierzenie bardzo małych grubości

Fizeau dilatometr

$k\lambda = (k+\frac{1}{2})\lambda'$

$k(\lambda-\lambda') = \frac{\lambda'}{2}$

$\lambda-\lambda' = \frac{\lambda}{2k} = 0{\cdot}000294$

$d = 0{\cdot}5$

$2d = 1{\cdot}0 \quad k = 491$

Michelson

1 cd 300000

7 Hg 530000

To jest ważne ze względu na warunki co do jednorodności światła

Drą Jeż Fizeau zauważył że interf. Na_D znikają przy $\delta = 0{\cdot}1445$ mm

$\delta = 0{\cdot}4335$ mm.

Ponieważ dwie linie max jednej pod min drugiej:

$$2\delta = k\lambda = \left(k+\tfrac{1}{2}\right)(\lambda - \Delta\lambda)$$

$$= k\lambda + \frac{\lambda}{2} - k\Delta\lambda$$

$$k\Delta\lambda = \frac{\lambda}{2} \qquad \Delta\lambda = \frac{\lambda}{2k}$$

$$2\delta = 0{\cdot}289$$

$$k = 491$$

$$\lambda = \frac{0{\cdot}289}{491} = 0{\cdot}000589$$

$$\Delta\lambda = \frac{0{\cdot}000589}{982} = 0{\cdot}0000006$$

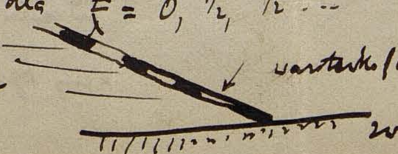
Jeżeli dwie ścisłe linie to po za tem znów się pokazują ale jeśli jedna linia o tej grubości to w ogóle po za tem już nie będzie interf.

Sposób wykazania interf.: fale stojące jeśli kierunki przeciwne

$$a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) = 2a \sin 2\pi\frac{t}{T} \cos 2\pi\frac{x}{\lambda}$$

Amplituda znika dla $\frac{x}{\lambda} = 0, \ 1/2, \ 2/2 \ldots$

Wiener

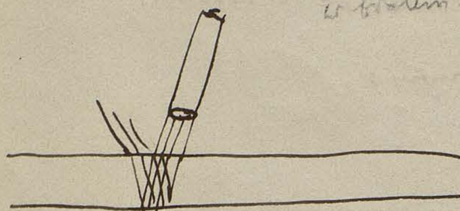


Dotychczas omawialiśmy zależność od δ

zamiast tego też grubsze płytki równoległe i obserwować zależność od β, używając

przez lunettę na ∞ nastawioną : koła równego nachylenia β

w białem świetle nic, tylko w monochrom.



Uwydatnia się tego przy obserwowaniu płyt ∥

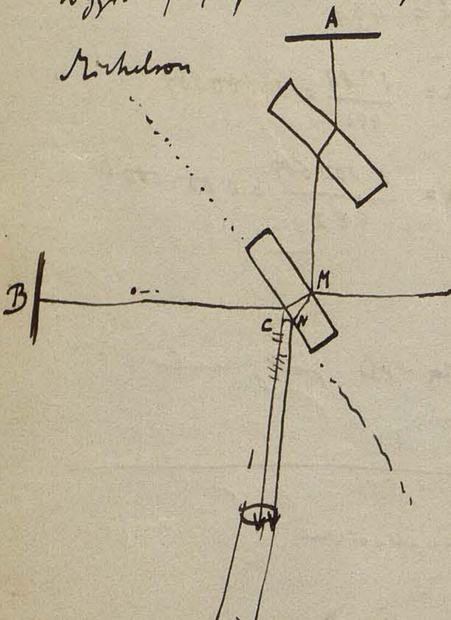
bo jeśli różnica grubości to koła zdeformowane

~~t. j. interferencja~~ Widać się to jeszcze przy grubości kilku mm zatem interf.

kilku tysięcy λ

Wygodniejszy aparat do stopniowego podłużania ε :

Michelson



różnica fazy = 0 jeśli | 2 MA + MN = 2 MB − MN + ... c

A przy nierówności ich taka interferencja jak przy

płytkach równoległych

przesuwając zatem B można

dowolnie zmieniać odstęp δ

Tak otrzymał interf. przy 20 cm

CD war. = 300000 λ

a przy Hg ziel. jeszcze więcej

540000

Takie wypośrodnio : $\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ *

$Y = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right) + \mathcal{B} \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{x}{\lambda}\right)$ $\qquad C \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda_1}\right)$

$N = -\frac{A}{v} \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right) + \frac{\mathcal{B}}{v} \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{x}{\lambda}\right)$

$A + \mathcal{B} = C \qquad A + \mathcal{B} = C \quad \Big| \; n \qquad (n-1) A + (n+1)\mathcal{B} = 0$

$\frac{-A + \mathcal{B}}{v_1} = \frac{-C}{v_2} \qquad A - \mathcal{B} = nC \qquad \mathcal{B} = -\frac{n-1}{n+1} A$

$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \qquad \sigma = A e^{\alpha\left(t - \frac{x}{a}\right)}$

$\alpha^2 \sigma =$

~~$x = A \ldots$~~

~~$x = A \sin \alpha\left(t - \frac{x}{a}\right)$~~

~~$A \sin\varphi + \mathcal{B} \cos\varphi$~~

~~spełnia $A \sin\varphi$~~ $\qquad \sigma = \mathfrak{J}\left[A e^{i\theta}\right]$

~~$(A + i\mathcal{B}) \sin\varphi$ $\quad A \cos\varphi$~~

~~$(A + i\mathcal{B}) \ldots e^{i\varphi} \frac{-e^{-i\varphi}}{2i}$~~ $\qquad \sin\varphi_2 = \frac{\sin\varphi}{n} \qquad \cos\varphi_2 = i\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{n^2} - 1}$

$\mathcal{B} = A \frac{\sin(\varphi - \varphi_2)}{\sin(\varphi + \varphi_2)} = A \frac{\left[i \sin\varphi \sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{n^2} - 1} - \frac{\cos\varphi \sin\varphi}{n}\right]}{\left[-i \sin\varphi \sqrt{- -} \quad + \qquad\right]}.$

$A \sin(\theta + \varepsilon) = \mathfrak{J}\left[A e^{i(\theta+\varepsilon)}\right] = \mathfrak{J}\left[\mathcal{B} e^{i\theta}\right] \; \Big\| \; \mathcal{B} = A e^{i\varepsilon}$

$A \sin\theta \qquad\qquad \mathfrak{J}\left[A e^{i\theta}\right]$

$A \cos\theta \qquad \theta + \frac{\pi}{2} \qquad \mathfrak{J}\left[A e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}\right] = \mathfrak{J}\left[A(-\sin\theta + i\cos\theta)\right]$

$-A \sin\theta \qquad \theta + \pi \qquad \mathfrak{J}\left[A e^{i(\theta+\pi)}\right] = \mathfrak{J}\left[A(-\cos\theta - i\sin\theta)\right]$

ogólnie $\boxed{\theta + \varepsilon} \qquad \mathfrak{J}\left[A e^{i(\theta+\varepsilon)}\right] = \mathfrak{J}\left[\underbrace{A e^{i\varepsilon}} e^{i\theta}\right]$

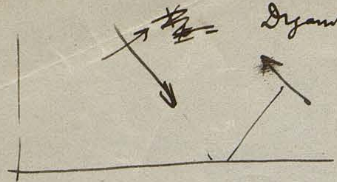
różnica fazy ε

więc amplituda kompleksowa $\mathcal{B} = A e^{i\varepsilon}$

$\overline{\alpha + i\beta} = A\cos\varepsilon + i A \sin\varepsilon$ reprezentuje różnicę fazy ε

$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\beta}{\alpha}$

Drgania równoległe do pł. padania



$$X = A\cos\varphi \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi - y\cos\varphi}{\lambda}\right)$$

$$Y = A\sin\varphi \sin \ldots \ldots$$

$$Z = 0$$

$$L = 0$$

$$M = 0$$

$$N = \frac{A}{v} \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi - y\cos\varphi}{\lambda}\right)$$

to wszystko spełnia istotnie $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$

i równania $\left\{ \frac{\partial L}{\partial t} = \ldots \right.$

$X' = B \qquad X'' = C$

$Y' \qquad Y''$

$N' = \qquad N''$

$\sin\varphi = \sin\varphi'$

$\cos\varphi = -\cos\varphi'$

$y = 0$

$X + X' = X''$

$N + N' = N''$

$$(A - B)\cos\varphi = C\cos\varphi_2$$

$$(A + B)\sin\varphi_2 = C\sin\varphi$$

$$B = A\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_2)}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_2)} \qquad C = A \ldots$$

---

prostop. do pł. pad.

$$Z = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\sin\varphi - y\cos\varphi}{\lambda}\right)$$

$$L = -\frac{A}{v}\cos\varphi \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \ldots\right)$$

$$M = -\frac{A}{v}\sin\varphi \sin\left(\qquad\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial Z}{\partial y} = + A\frac{\cos\varphi}{\lambda} \cdot \ldots$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} = A\sin\varphi$$

$$A + B = C$$

$$(A - B)$$

$$B = -A\frac{\sin(\varphi - \varphi_2)}{\sin(\varphi + \varphi_2)}$$

$$C = A\frac{2\sin\varphi_2\cos\varphi}{\sin(\varphi + \varphi_2)}$$

$\varphi = 0$:

$$\cancel{B_1 = B_2 = A\frac{\sin\varphi - \sin\varphi_2}{\sin\varphi + \sin\varphi_2} = A}$$

$$B_s = -A_s\frac{n-1}{n+1}$$

$$B_p = A_p\frac{n-1}{n+1}$$

} więc takie w przeciwieństwie (rysunek)

dla $n > 1$

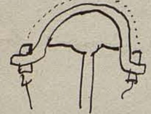
Odbicie od zwierciadła, fale stojące, węzły etc. elektr.

Géoclases p 290 (appareil à caoutchouc) 86

p 295

„On a souvent l'occasion d'assister à la propagation très progressive des cassures et des plis"!

Distribution générale des montagnes



calotte en caoutchouc. distendue par convexité de plâtre

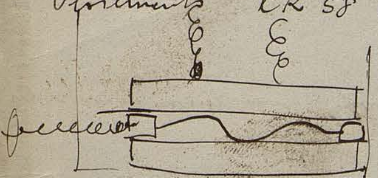
rissförmige Anordnung von Gebirgen

Daubrée Géologie expérimentale Paris 1879

Chapitre II

Similitude : { Bertrand J. d. Écol polyt. 32
Phillips CR 28 (1873) 1). Equil. des corps élastiques semblables
2). Mouvement " " "

Plissements Daubrée: CR 58 (1878) p 77, 283, 728



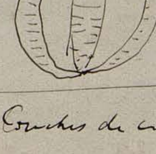
} p. 289 – 299

d'autant plus nombreux que ~~la~~ pression plus grande

pression verticale inégale: 

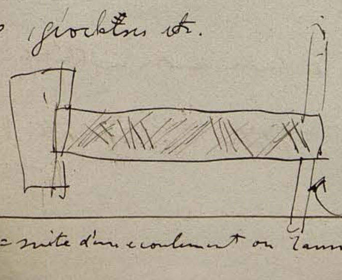
épaisseur inégale: 

p. 389
sphère en caoutchouc couverte d'un enduit

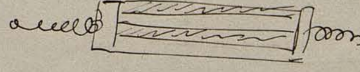


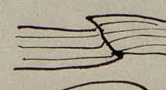
Runzelungen immer ⊥ zum Rand
R = 70 cm
r = ½ R
Breite der Runzeln
λ = 2.5–3 mm

Failles, géoclases etc.



p. 321 Couches de cire, diff. color.





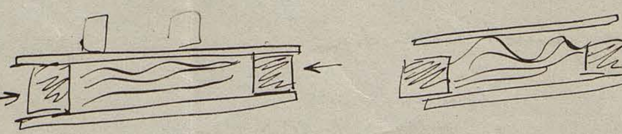
fracture avec glissement

Schistosité = suite d'un écoulement ou laminage 391 – 445

Stanislas Meunier   Géologie expérimentale

Zurcher C. R. 118 p. 215 (1894) identité des plissements de l'écorce terrestre avec ceux d'une masse de faible épaisseur

p. 277
Les plis: James Hall 1812



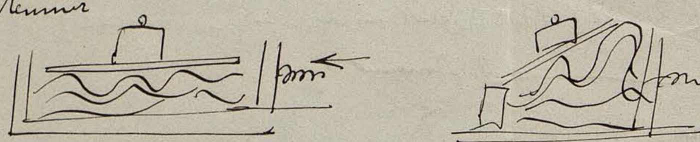
feuilles d'étoffe   coup de maillet

Henry Cadell 1888 Edinb Roy Soc expériences sur Mountain Building   pression à l'aide d'une vis

Bailey Willis ~~...~~ The Mechanics of Appalachian structure

Thirteenth annual Report of U.S. geological survey Washington 1893

St Meunier



pression verticale uniforme   inégale

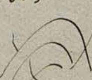
1878 Alphonse Favre : caoutchouc distendu, couvert d'argile, puis laissé se contracter

l'argile se plisse

1884 H. Schardt (à propos ~~de~~ Dent-Vaudois) couches d'argile et sable (plis)

Pas plasticité mais concassement, puis raccommodage

St M. : crochets



la roche réduite en feuillets, schistosité! qui est le résultat de la torsion

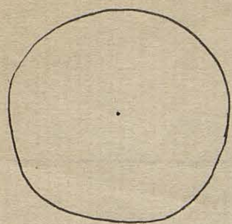
cassures

Schistosité p. 288 : (Tyndall) Daubrée, St Meunier.

↓ par écoulement

√ par l'emploi de feuille caoutchouc contractile

plâtre ... se feuillette ∥ à la feuille



$$r^2\dot\varphi = c$$

$$\cancel{\ddot r - r\dot\varphi^2 = \frac{\alpha}{r^n}}$$

$$\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 = \frac{\alpha}{r^{n-1}} + \mu$$

Gdzie Perihel albo Aphel r $\qquad r^2\dot\varphi^2 = \dfrac{\alpha}{r^{n-1}} + \mu$

$$r^4\dot\varphi^2 = c^2$$

$$1 = \frac{\alpha}{c^2 r^{n-3}} + \mu r^2$$

$$\cancel{\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2} = \frac{c}{\left(\frac{\alpha}{c^2}\right)^{\frac{2}{n-3}}}}$$

$$\cancel{r^{n-3} = \frac{\alpha}{c^2}}$$

$$\dot\varphi^2 = \frac{\alpha}{r^{n-3}} + \frac{\mu}{r^2}$$

$$d\varphi = \frac{c\,dt}{r^2}$$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \cancel{} = \left(\mu + \frac{\alpha}{r^{n-1}}\right)\frac{r^4}{c^2} - r^2$$

$$d\varphi = \int_b^a \frac{dr}{\sqrt{\mu r^4 + \frac{\alpha}{c^2} r^{5-n} - r^2}}$$

$$r = R + z$$

$$\int_0 \frac{dz}{\sqrt{\cancel{\mu R^4 + \frac{\alpha}{c^2}R^{5-n} - R^2} + \left(4\frac{\mu}{c^2}R^3 + (5-n)\frac{\alpha}{c^2}R^{4-n} - 2R\right)z + \quad z^2 \cdot -}}$$

$$4\frac{\mu}{c^2} b^3 + 4\frac{\alpha\, b^{4-n}}{c^2} - 4b = 0$$

$$(4-n)$$

$$F = -r^n$$

Apsydy

$n = 1$
$\quad - 2$

$$\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{n+3}}$$

$$\cancel{\#}\, a^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = g a(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}} = \sqrt{\frac{g}{a}}\,dt$$

$$\sqrt{(1+\cos\varphi-(1+\cos\varphi_0)} = \sqrt{2\left(\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}\right)^2}} = \int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k\sin^2\varphi}}$$

$$k\sin\varphi = z$$

$$\cancel{k\cos\varphi\, d\varphi = dz}$$

$$\cancel{\cos\varphi = \sqrt{1-\frac{z^2}{k^2}}}$$

$$\int\frac{dz}{\sqrt{k^2-z^2}\sqrt{1-z^2}}$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi_0}{2}\cdot\sin\alpha$$

$$d\varphi\cos\frac{\varphi}{2} = 2\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\alpha\, d\alpha$$

$$d\varphi = \frac{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\alpha\, d\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\alpha}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-}}$$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^{2n}\varphi\, d\varphi} = \int\sin^{2n-1}\varphi\, d(\cos\varphi) = \sin^{2n-1}\varphi\cos\varphi - (2n-1)\int\sin^{2n-2}\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi$$

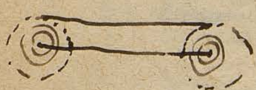
$$J_{2n} = \frac{2n-1}{2n}J_{2n-2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{h}{2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin^4\frac{h}{2}+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k\right.$$

$2i\frac{ds}{r}$

$W=\int H_n\,ds = 2i\int_a^r \frac{dr}{r} = 2i\,\lg\frac{r}{a}$ $\qquad \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{2i}{r}$

$\frac{2i^2}{r}2a\pi$

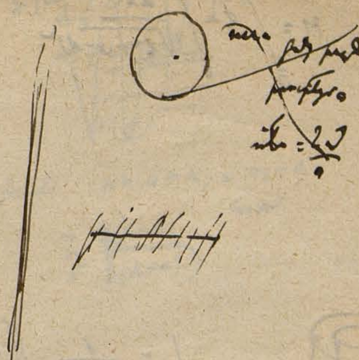


$p = P - 2a\pi\underbrace{\int_a^r \frac{2i}{r}\,dr}_{4a\pi i\lg r}$

$F = -\frac{\partial W}{\partial r} = -$

$\frac{2i}{a^2}\int_0^a r\,dr + 2i\int_0^R \frac{dr}{r} = \frac{2i}{a} + 2i\lg\frac{R}{a}$

$N=\int H_n\,ds\sin\alpha\cdot y = H_n F\sin\alpha$



zatem $i = i_0 \sin pt$

$$M=\int_0^l dx\int_0^l \frac{dx'}{\sqrt{b^2+(x-x')^2}} = (x-x')\lg\left\{\frac{x'-x+\sqrt{b^2-}}{b}\right\}+\sqrt{b^2+(x'-x)^2}\Big|_0^l$$

$$=2b+2\sqrt{b^2+l^2}+l\lg\left(\frac{l+\sqrt{b^2+l^2}}{\sqrt{b^2+l^2}-l}\right)$$

$$=2l\left[\lg\frac{2l}{b}-1\right]$$

$$L=\frac{1}{(R^2\pi)^2}\iint ds\,ds'\,df\,df'$$

$$=\frac{1}{(R^2\pi)^2}\iint 2l\left[\lg\frac{2l}{b}-1\right]f\,df'$$

$$\frac{1}{2r\pi}\int_0^{2r\pi}\lg b\,ds=\lg\rho \quad \text{für} <$$

$$\lg r \ldots >$$

$$\lg\sqrt{a^2+\rho^2-2a\rho\cos\varphi}\ \cos\varphi\,d\varphi = -$$

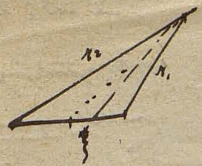
$$\lg x\,dx = x\lg x-1$$

$$\overline{\lg b}=\frac{1}{R^2\pi}\int_0^\rho \lg\rho\cdot 2r\pi\,dr+\int_\rho^R \underbrace{\lg r\;2r\pi\,dr}_{\lg(r^2)}$$

$$=\frac{1}{R^2\pi}\left[(\rho^2\pi-0)\lg\rho+\frac{\pi}{2}(r^2\lg r^2-r^2)\Big|_\rho^R\right]=\lg R-\frac12+\frac{\rho^2}{2R^2\pi}$$

$$\overline{\overline{\lg b}}=\frac{1}{R^2\pi}\int_{\rho=0}^R\left[\lg R-\frac12+\frac{\rho^2}{2R^2\pi}\right]2\rho\pi\,d\rho=\lg R-\frac14$$

$$L=2l\left[\lg 2l-1-\lg R+\frac14\right]=2l\left[\lg\frac{2l}{R}-\frac34\right]$$



$$\int_{-a}^{+a} \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}} = -\lg \frac{x-a+r_1}{x+a+r_2}$$

$$\lg\left(x-\xi+\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}\right)$$

$$U = \mu \lg \frac{x+a+r_2}{x-a+r_1}$$

jinak $x = a + r_1 = r_2 - a$

také

$$\lg \frac{(x-a)}{(x+a)}$$

$$x+a+r_2 = (x-a+r_1)\,c$$

z těch hranic: $c = 1$ $\qquad r_1 - r_2 = 2a$

$$r_2(1+\cos\theta_2) = c\,r_1(1+\cos\theta_1) \qquad\Big\|\qquad r_2 \cos^2\frac{\theta_2}{2} = c\,r_1 \cos^2\frac{\theta_1}{2}$$

$$r_2^2\left[1+2\cos\theta_2+\cos^2\theta_2\right] = \dots$$

$$(x+a)^2+y^2+2(x+a)r_2+(x+a)^2 =$$

$$\cancel{2(x+a)^2+y^2} + 2(x+a)r_1 = \cancel{\left[2(x-a)^2+y^2+2r_1(x-a)\right]}c^2$$

$$\cos^2\varphi+\cos^2\psi+\cos^2\chi=1$$

$$\cos\varphi\cos\alpha+\cos\psi\cos\beta+\cos\chi\cos\gamma=0$$

$$\cos\varphi\cos\lambda+\cos\psi\cos\mu+\cos\chi\cos\nu=0$$

$$\cos\psi(\cos\alpha\cos\nu-\cos\lambda\cos\gamma)=\cos\varphi(\cos\mu\cos\gamma-\cos\nu\cos\beta)$$

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\mu\cos\gamma-\cos\nu\cos\beta}=\frac{\cos\psi}{\cos\nu\cos\alpha-\cos\lambda\cos\gamma}=\frac{\cos\chi}{\cos\lambda\cos\beta-\cos\mu\cos\alpha}=\lambda$$

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{(\ )^2+(\ )^2+(\ )^2}}$$

$$\cos\varphi=\frac{\cos\mu\cos\gamma-\cos\nu\cos\beta}{\sqrt{\dots}}=\frac{\cos\mu\cos\gamma-\cos\nu\cos\beta}{\sin\varepsilon}$$

Prąd po czworoboku

Solenoid strikowaty

2 Prądy prostolinijne równoległe

linie siły, pociągnięcie!

busola wstawić

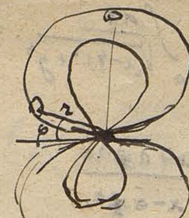
jeśli prąd i dany

najkorzystniejszy

przekrój przy danej

ilości drutu

tak że



$$n\, 2\pi i \frac{r^2 \sin^2\varphi}{r^3} = \text{const}$$

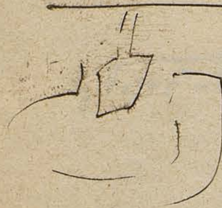
$$n q r = \text{const}$$

$$\frac{\sin^2\varphi}{r^2} = \text{const}$$

$$r = \alpha \sin\varphi$$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_0 = \alpha$$

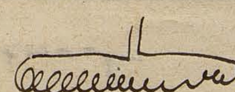
Jeśli



Moment

dla przewodnika kołowego

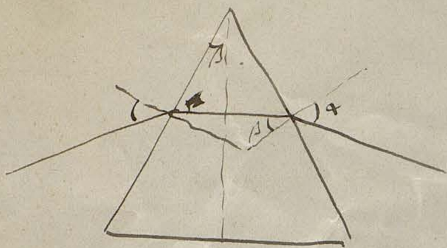
Solenoid w polu magnet. jednostajnym ...



Siły między 2 przewodnikami prostymi nieskończ. długimi

według BS lub $\int H_n\, ds$

Jeśli solenoid sprężysty, o ile się skróci (wydłuży?) przy puszczeniu prądu?



$D = 2(\alpha - \beta) \qquad \alpha = \beta + \frac{D}{2} = \frac{D+\gamma}{2}$

$n = \dfrac{\sin\frac{D+\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$

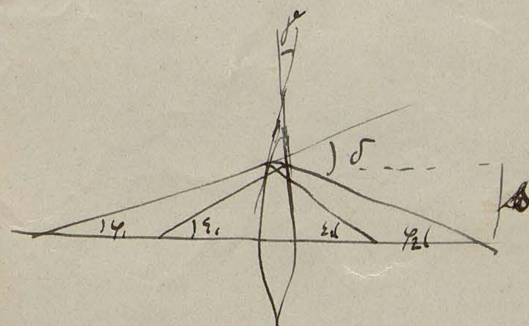
$\gamma\, n = (D+\gamma)\, n$

$\sin\frac{D}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{D}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = n \sin\frac{\gamma}{2}$

$\sin\frac{D}{2} = (n-1)\sin\frac{\gamma}{2}$

$D = (n-1)\gamma$

$= \varphi_1 + \varphi_2$



$\varphi_1 + \varphi_2 = (n-1)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$

$\varphi_1 = \frac{\Delta}{x} \qquad \varphi_2 = \frac{\Delta}{y} \qquad \varepsilon_1 = \frac{h}{r_1} \qquad \varepsilon_2 = \frac{h}{r_2}$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$

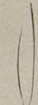
$= \frac{1}{f}$

$\frac{1}{f}$ = ~~[illegible]~~ $= \frac{1}{x}$

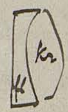
$f > x > 2f$ (4 5 ≥ ∞) $\qquad x = 2f \quad y = 2f$

x

$x = f$

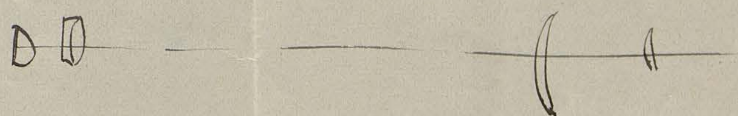


	n_C	n_D		
Crown	1·51	1·52	$\nu = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$	0·017
Flint	1·61	1·63		0·028

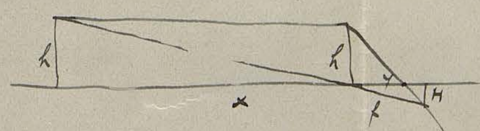


Okular nach Ramsden

Huygens



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$



$$\frac{h}{x} = \frac{H}{y}$$

$$\frac{h}{f} = \frac{H}{y-f}$$

$$\frac{f}{x} = \frac{y-f}{y} = 1 - \frac{f}{y}$$

$$\frac{H}{h} = \frac{y}{x}$$

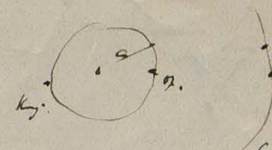
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$$

Huygens Traité de la lumière 1690
Newton Optics 1704

Th. Young 1801
Fresnel 1818

93

O. Römer 1675   [illegible]   42h 28m 36s



Glasenapp 1002

2 [illegible] opóźnia o 986 sek.

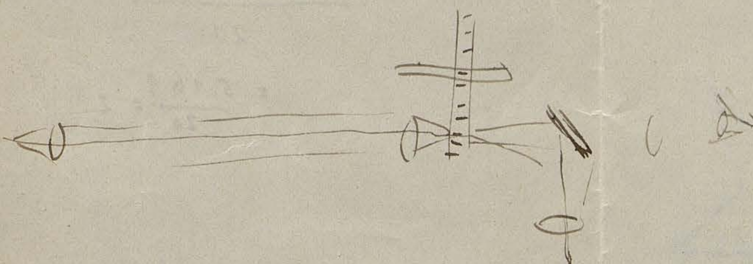
a = 150.000 000 km.

Bradley 1727 $\alpha = 0°0'21''$ teraz $20.5''$

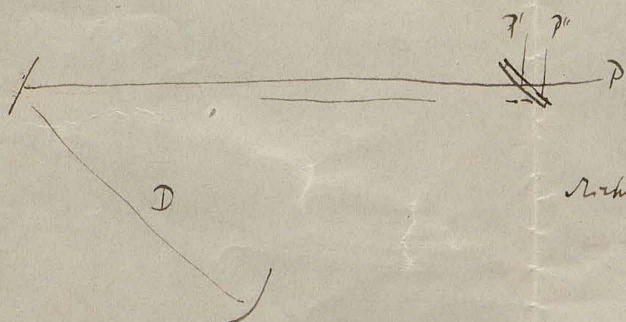
$V = 2.967 . 10^{10}$
2.982

Fizeau 1849

Foucault   800 obrotów



Cornu $2.9995 . 10^{10}$



Michelson   D = 600 m
200 obrotów   przesunięcie P′P″ 13 cm

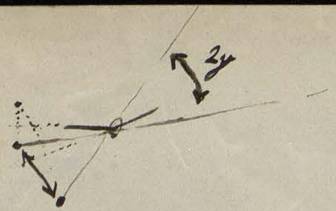
$V = 2.999 . 10^{10}$

od słońca 8 min.
α Centauri 3 1/4 lat
Syriusz 17 lat

Foucault woda

Michelson $\frac{c}{v} = 1.33$ H_2O
1.77 CS_2

taka dyspersja



$b = 2y\, a$

$\delta = \frac{\lambda A}{2y\, a}$

$2y = \frac{\lambda A}{\delta a}$

$n = \frac{2y A}{\delta} = \frac{(2y)^2 a}{\lambda}$

$= \frac{\lambda A^2}{\delta^2 a}$

$A = 400$

$\delta = \cancel{}\ \frac{1}{3}$

$a = 20$

$\lambda = 5.10^{-5}$

$$\frac{5.10^{-5} . 16.10^{4} . 9}{20}$$

$= \frac{5.16.9}{20} = 2$

1)

III 13

Notatki pomięszane
z wykładów

a) mechaniki
b) optyki
c) elektrodynamiki

gar keinen Maxwellschen Dämon, da merkliche Druckschwankungen und Bewegungserscheinungen schon im Bereich bequem mikroskopisch (sogar mit dem freien Auge) sichtbarer Raumteile auftreten; wir können z. B. in der Scheidewand eines Gefäßes ein Loch von mikroskopisch kleinen Dimensionen herstellen und es mit einem kleinen, einseitig wirkenden Ventil versehen, oder mit einem Kranz von feinen elastischen Härchen (Wimpern), welche den Teilchen einer Emulsion nur den Hindurchgang nach einer Seite gestatten würden. Eine solche Vorrichtung würde automatisch eine dauernde Druckdifferenz herstellen und wäre so eine Quelle nutzbarer Energie auf Kosten der Wärme der Umgebung. Theoretisch noch einfacher und übersichtlicher ist das Beispiel des Torsionsfadens. Bringen wir anstatt des Spiegels unten ein Zahnrad mit einer Sperrklinke (mit Zwangsführung) an, welche nur einseitige Drehung zuläßt. Infolge der fortwährenden Schwankungen wird das Zahnrad eine Drehung, der Faden eine Torsion erfahren, welche dauernd zu nutzbarer Arbeit am Aufhängepunkt verwendet werden könnte. Es wäre diese Vorrichtung analog einer Spielbank, welche die Gesetze des Zerfalls systematisch korrigiert. Die Schwierigkeit der technischen Ausführung bildet da keinen Einwand, wenn die Sache nur prinzipiell möglich ist.

§ 21. Trotz alledem glaube ich nicht, daß wir auf diese Weise ein arbeitsleistendes Perpetuum mobile erhalten; denn gerade in der Herstellung des einseitigen Ventils, der Sperrklinke, liegt eine prinzipielle Unmöglichkeit, sofern die Betrachtungen der statistischen Mechanik zu Recht bestehen. Diese Vorrichtungen wirken unter gewöhnlichen Umständen eben nur dadurch, daß sie in der Gleichgewichtslage verharren müssen, welche einem Minimum potentieller Energie entspricht. Sobald es sich aber um molekulare Schwankungen handelt, sind neben der Minimallage sämtliche anderen Lagen möglich, und zwar sind sie nach Maßgabe der Größe der Gesamtarbeit verteilt[1]). Das Ventil hat seine eigene Schwankungstendenz; entweder ist seine Federkraft so groß, daß es überhaupt fast nicht aufgeht, oder sie ist so klein, daß es fortwährend umherschwankt und darum unwirksam bleibt. Ein Perpetuum mobile wäre also

1) Am einfachsten illustriert dies eine graphische Darstellung, indem man die Winkelverschiebung des Zahnrades als x, die Verschiebung der Sperrklinke als y, die geleistete Gesamtarbeit als z aufträgt. Im Falle einer Sperrklinke mit Zwangsführung (durch eine wellenförmige Nut leicht herstellbar) erhält man eine wellen- oder zickzackförmige, vom Nullpunkt aus beiderseits aufsteigende Kurve, im Falle einer gewöhnlichen, einseitig begrenzenden Sperrklinke eine Fläche. Die Dichte der Zustands-

zusammenfassenden Artikel in der Enzyklopädie d. math. Wiss. sehr treffend hervorgehoben wird, aber ihre Beweiskraft gewinnt wohl in den Augen der Physiker eine wesentliche Stütze in den heute besprochenen Erscheinungen.

Fassen wir das Gesagte noch kurz zusammen. Die molekularen Schwankungsphänomene geben uns heute keinen Grund, den zweiten Hauptsatz, wie so viele andere Dogmen der Physik, vollständig umzustoßen. Sie nötigen uns nur zu einer abweichenden Formulierung, wenn wir für die Sätze der Thermodynamik universelle Geltung beanspruchen. Es genügt vielleicht eine scheinbar ganz geringfügige Ergänzung des Wortlautes, indem man sagt: „Es kann keine automatische Vorrichtung geben, welche fortgesetzt nutzbare Arbeit auf Kosten der Wärme tiefster Temperatur erzeugen würde“. Es genügt sogar die kurze Fassung: „Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile zweiter Art“, nur verlegt man die Schwierigkeit dann in die Erklärung des letzteren Begriffs.

Denn es kann Arbeit auf Kosten der Wärme niederer Temperatur erhalten werden, und es kann Wärme von selbst von niederer Temperatur zu höherer übergehen, und die scheinbar irreversibeln Prozesse sind tatsächlich reversibel[2]). Man braucht dazu gar keine eigene Vorrichtung man muß nur einfach warten, bis es infolge der Gesetze des Zufalls von selbst geschieht, das heißt bis eine entsprechend große Abweichung vom Normalzustand stattfindet. Ein jeder, auch noch so „unwahrscheinlicher“ Zustand wird sich im Laufe der Zeit ereignen, und ein jeder Arbeitsbetrag A wird auf Kosten der umgebenden Wärme geliefert werden. Nur wächst die dazu durchschnittlich erforderliche Zeit T so außerordentlich, sobald man den Bereich der mittleren Schwankung erheblich überschreitet, daß das Verhältnis

$$\lim_{\infty} \frac{A}{T} = 0 \qquad (14)$$

wird.

Ebenso kann man bei einem ehrlichen Glücks[illegible]soluter Sicherheit jeden gewünscht[illegible]g gewinnen, wenn man genügend [illegible]nd Kapital zur Verfügung hat, um nic[illegible] vorzeitigen Abbruch des Spieles

1) Heutzutage wäre es wohl wünschenswert, dieselben durch eine „statistische Elektrodynamik“ zu ersetzen. Das Hauptproblem der statistischen Mechanik ist offenbar die konsequente Einreihung der Quantentheorie und der von Nernst behandelten Erscheinungen in das bisherige theoretische System.

2) Beispielsweise entsteht bei der Brownschen Bewegung fortwährend Wärme durch Reibung und umgekehrt treibende Bewegung durch Wärme.

$m^2 = 2N$.

(Eingegangen 26. September 1912.)

1). Pojęcie entropii z punktu widzenia kinetycznej teoryi gazów

2). ~~O ruchu obrotowym ciał sztywnych~~

3). O zjawiskach magnetycznych w żelazie i podobnych ciałach.

4). O optycznych własnościach metali

5). O przemianach ciał promieniotwórczych

6). ~~Zarys optyki geometrycznej~~

7). Rozchodzenie się elektryczności w drutach i Kablach

8). -

1). Ciepła właściwe gazów —

2). Teorya promieniowania

3). Zjawiska fotoelektryczne

4). Metody określania gazów wraz z ~~zasadą~~ dyskusyą ich podstaw teoretycznych

5). Metody określania przewodnictwa cieplnego " " "

6). " " stałej dielektrycznej " "

7). Teorya Saint Venanta skręcania i przegięcia belek

8). Teorya Helmholtza tworzenia się strumieni cieczy.

9). Hertza teorya odkształcania kul sprężystych.

10). Nowe zasady termodynamiki Nernsta

11). ~~Drgania poprzeczne prętów i błon sprężystych.~~

96

Kamerlingh Onnes   Versuche f. [illegible] He d. Entspannung.

Comm 105   1908

Aus Isoth. bei $-253°$ und $-259°$ war KT berechnet worden $5°$ K.

Daraus folgte Möglichkeit d. Verfl. von He von comprimirt bis 100 Atm

bei Temp d. schmelzenden H_2

Es zeigte sich dichte Wolke wenn feste Massen sich absonderten

Aber Analyse zeigte dass das Gas $0{\cdot}37 - 0{\cdot}45$ % H_2 enthielt

und als es gereinigt wurde, zeigten sich keine Condensationserscheinungen

Nachschrift dass schnelleres Entspannen doch wieder leichte Nebel [illegible]

Comm 108   10/7 gelungen

[illegible] b [illegible] v H_2

Klare farblose Flüssigkeit Dichte $0{\cdot}15$, Siedp. (He therm) $4{\cdot}3°$ K.

$b = 0{\cdot}0007$

$a = 0{\cdot}00005$ KT ca $6°$

KD   2-3 Atm.

Comm 102

Isothermen von He   b. $100°$ und $-217°$

$-253°$ $-259°$

Daraus Boylepunkt   ca $-250°$

durch Vergleich mit H_2 : KT $= 5{\cdot}3°$

Comm. 99, 100

Isoth. von H_2 von $-104°$ bis $-217°$

mit destill. H_2 Boylepunkt H_2 $-165{\cdot}72°$ bezg. unterhalb [illegible] $-183°$

Comm 101   bis $-217°$ Pt Therm. genau bis auf $0{\cdot}02°$

Fabius & Erubs. [illegible] Dinners Leiden 1908

an. Phys. 32 p 849

33 p 93

H_2	TK.	pk.	Inv T.	Boyle T.
	32·2	14	192·5	107·3

He

23° 2 Isotherm

−250°

$23 : 107·3 = x : 32$

$x_k = 6°$

KT: 6° KD: 2·5

$a(H_2) = 0·00038$ ‖ $a\ N_2$ 0·00276

$b(H_2) = 0·00088$ ‖ 0·00166

$192·\cancel{5} : 107·\cancel{3} = x : 23$

$180 : 100 = x : 23$

−36

54

Inv. T. J. −51·4

−5000

−273

−773

160

−210°

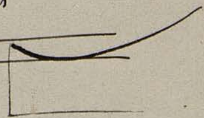
$$\Delta T = \frac{1}{C_p} \int_{p_1}^{p_2} \left[T \frac{\partial v}{\partial T} - v\right] dp \qquad p + \frac{a}{v^2} = \frac{R\theta}{v-b}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \Big\{ \; pv + \frac{a}{v} - bp = R\theta \quad \sim \quad \frac{\partial v}{\partial T} = \frac{R}{p - \frac{a}{v^2}}$$

$$v - T\frac{\partial v}{\partial T} = v - \frac{RT}{p - \frac{a}{v^2}} = \frac{R\theta - \frac{a}{v} + bp - \frac{a}{v} - R\theta}{p - \frac{a}{v^2}} = \frac{bp - \frac{2a}{v}}{p - \frac{a}{v^2}}$$

$$\neq \frac{b - \frac{2a}{pv}}{1 - \frac{a}{pv^2}} \neq b - \frac{2a}{pv} = b - \frac{2a}{RT}$$

$$\Delta T = -\frac{1}{C_p}\left(b - \frac{2a}{RT}\right) \Delta p$$



$RT_i = \frac{2a}{b}$

$RT_B = \frac{a}{b}$

$RT_k = \frac{8a}{27b}$

Boyle Punkt: $\frac{\partial}{\partial p}(pv) = 0$

$$pv + \frac{ap}{pv} - bp = R\theta$$

$$\left(\frac{a}{pv} - b\right) = 0$$

$$b = \frac{a}{pv} \neq \frac{a}{RT}$$

H_2 Siedp. − 252·9 Dewar | Schmp.

− 252·6 Travers & Jaq. | − 258·9°

50 mm Hg

$\boxed{\text{at } 16 - 205 \\ c = 6}$

Dulong Petit

Dichte H_2 = 0·07

Travers. −805 K.T. −240·8° (Olsz. 1905)

~~Olszewski 1902 K.Dr. 14 Atm.~~

Dewar ~~Hildebrand~~

Travers & Jaquerod 10 Atm. 13° abs (Stickst H₂ 5 mm Hg)

Olszewski 1895 −210° 120 Atm.

Olszewski 180 Atm. −259°

1905

180	40	20	13	5	1 Atm.
40°	7·6	5·8	4·4	3·3	1·7

Sposoby określenia liczby drobin w gazach.

Kowalski
~~Termodynamika w zastosowaniu do zjawisk dysocyacyi.~~

~~Termodynamika w zastosowaniu do~~ podwójnych ~~mieszanin cieczy.~~

Zarys optyki geometrycznej.

O ruchu obrotowym ciał sztywnych.

Trzciński
~~Teorya elektronowa w zastosowaniu do metali.~~

~~Teorya~~ O przemianach ciał promieniotwórczych. ~~Rudzki~~

Sobkiewicz
~~Teorya zjawisk fotoelektrycznych~~

O zjawiskach ferromagnetyzmu.

O optycznych własnościach metali.

Zjawiska indukcyi elektromagnetycznej.

1). Pojęcie entropii z punktu widzenia kinetycznej teoryi gazów

2). Ciepło właściwe gazów (doświadczenia, teorya termodynamiczna i kinetyczna)

Peczuk

3). O ruchu obrotowym ciał sztywnych

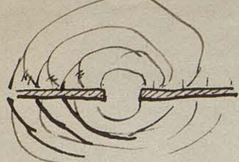
4). O zjawiskach ferromagnetyzmu

5). O optycznych własnościach metali

6). Teoretyczne podstawy telegrafii bez drutu

7). ~~O zjawiskach [illegible] (doświadczenia i wnioski teoretyczne)~~ [illegible]

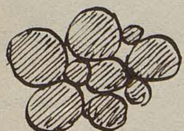
8). Teoretyczne podstawy metod służących do skraplania gazów



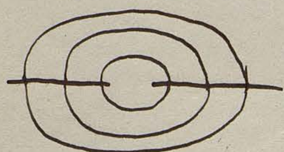
$\Delta^2\theta = 0$

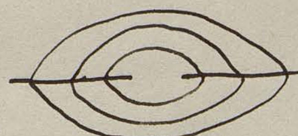
$\frac{\partial\theta}{\partial n} = \theta\kappa$

100

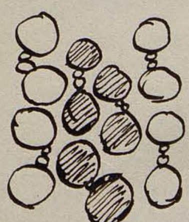


w wakuum:





Emisyjność $\frac{E}{r}$ przy niskiem ciśnieniu

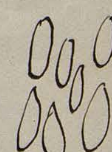


Jeżeli niektóre cząstki związane, ale złymi kontaktami

Dopóki wyższe ciśnienie, złe kontakty działają prawie jak izolat. oporów. z przewodnictwem przez gaz i promieniow.

więc tak jak

wobec wielkiego rozrzedzenia przewodn. każde i cząstki połączone jak całość



101

Zaproszenia rozesłano tym o których przypuszcz. że chętnie udział wezmą

ale jeśli ktoś ~~któ~~ nie został zaproszony a chciałby to niech się nie obrazi. Ktokolwiek

zechce przychodzić niech się uważa za zaproszonego

(i dyskusye dydaktyczne

Cel ogólny : utrzymanie się au courant życia naukowego zapomocą sprawozdań i dyskusyi:

specyalizacya, spleśnienie (Physical Soc. Thomson w Cambridge) Société de Physique

~~wzgl. praktyczne~~ ~~[illegible]~~ Kollogium Warburga / ~~[illegible]~~ Kollegium Sommerfelda

Man muss darnach trachten sich zu blamiren

Konieczne warunki żeby się udało : I) nie wymagać dużego przygotowania (dziś wyjątek)

II) dyskutować bez obawy kompromitacyi

wogóle jak najmniej formalistyki

organizacya : 1) wybór przewodniczącego

zebrania G.T.O.i K.

instytucya przewodniczącego konieczna, ~~[illegible]~~ już w celu ~~[illegible]~~ porządku w dyskusyi (udzielania głosu)

ktoś musi się zająć ustaleniem terminów i przedmiotów

~~[illegible]~~ sprawozdań, rozesłaniem zaproszeń etc.

2). ewentualnie do pomocy sekretarz

3). ~~[illegible]~~ składki, przekonać czy się uda

4). terminy, co 2 tygodnie, dzień czwartek, rozesłanie zaproszeń

~~5). Tematy~~

Tematy

Porządek dzienny na przyszły raz

20·67

Ag $\mu = 0.363$

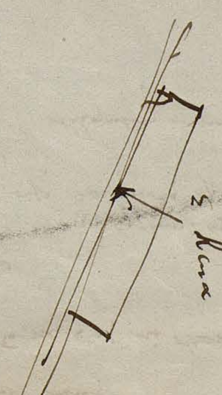
Cu 0.34

E [illegible]

Au $= 8500$

Cu $= 4100$

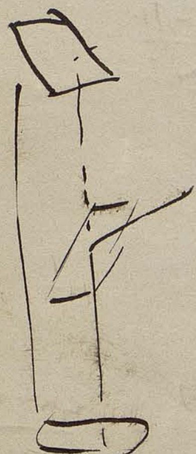
$e = 1.55$



Doświadcz. odnośne: Fresnel i Brewster ; [illegible] zgodni

~~Nörrenberg~~

Rottensch.



Interferencya światła polaryz.:

Arago Fresnel : { dwa promienie ⊥ pola nie interf. }
{ ∥ interf. }

nie zupełnie odpowiednie wskutek śladów polaryz. elipt.

Neumann:

$$\sin 2\alpha\,(a^2 - a'^2) = \sin\beta\cos\beta\; a_1^2$$

$$\left.\begin{aligned}\sin 2\alpha\,(a+a') &= a_1 \sin\beta\cos\beta \\ a+a' &= a_1\end{aligned}\right|\sin\beta\cos\beta$$

$$a' = a_1 \frac{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta}{+} = -\frac{tg(\alpha-\beta)}{tg(\alpha+\beta)}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha\,(a-a') &= \sin\beta\; a_1 \\ \cos\alpha\,(a+a') &= \cos\beta\; a_1\end{aligned}\right\}$$

$$(a-a')\sin\alpha\cos\beta - (a+a')\cos\alpha\sin\beta = 0$$

$$a' = a_1 \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{+} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Przeciwny znak: podczas gdy u Fresnela strata $\frac{\lambda}{2}$ przy odb. od $\alpha > \beta$

to u Neumanna gdy: $\beta > \alpha$

Nie ma sposobu rozstrzygnięcia z doświadczeń

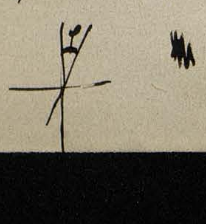
~~tak~~ Dowody Neumanna [illegible] tylko tyle wskazują że wychodzą z dwóch przypadków

więc w ogóle nie może nigdy nic rozstrzygnąć.

Doświadczalne sprawdzenie bezpośrednie byłoby trudne z powodu niedokładności

metod fotometrycznych (chyba bolometr!!)

ale pośredni sposób: skręcenie płaszczyzny polaryzacji w skutek odb.

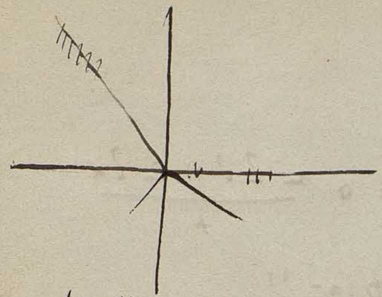


$a_\perp = a \sin\varphi$

$a_\parallel = a \cos\varphi$

po odb. $tg\,\psi = tg\,\varphi \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \; \frac{tg(\beta+\alpha)}{tg(\beta-\alpha)}$

$= tg\,\varphi \cdot \frac{\cos(\beta-\alpha)}{\cos(\beta+\alpha)}$



$$\sigma' = a \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(\frac{t}{\tau} - \frac{-x\cos\lambda + y\sin\lambda}{v}\right)$$

$$\sigma'' = a' \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x\cos\lambda' + y\sin\lambda'}{v}\right)$$

$$\sigma_1 = a_1 \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x\cos\lambda_1 + y\sin\lambda_1}{v_1}\right)$$

$\sigma' + \sigma'' = \sigma_1 \qquad x=0:$

$$a\sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t + y\frac{\sin\lambda}{v}\right) + a'\sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t - y\frac{\sin\lambda'}{v}\right) = a_1\sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t - y\frac{\sin\lambda_1}{v_1}\right)$$

1. $\boxed{a + a' = a_1} \qquad \lambda = -\lambda' \qquad \frac{\sin\lambda}{\sin\lambda'} = \frac{v}{v_1}$

$$\frac{E}{\rho}\frac{\partial\sigma}{\partial x} = \frac{E_1}{\rho_1}\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}$$

$$\frac{E}{\rho}\left(\frac{\cos\lambda\, a - \cos\lambda'\, a'}{v}\right) = \frac{E_1}{\rho_1}\frac{-\cos\lambda_1\, a_1}{v_1}$$

$(a - a')\cos\lambda =$

$$\sin\beta\,(a-a') = a_1 \sin\alpha \quad \Big| \cos\beta$$
$$\cos\alpha\,(a+a') = a_1 \cos\beta \quad \Big| \sin\alpha$$

$$a' = a\,\frac{\sin\beta\cos\beta - \sin\alpha\cos\alpha}{+} = a\,\frac{\sin 2\beta - \sin 2\alpha}{+}$$

$$a' = \frac{\sin(\beta-\alpha)\,\cos(\beta+\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)\,\cos(\beta-\alpha)} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} \qquad \perp$$

$$a_1 = 2\,\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta} \qquad (I\,b)$$

$$\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$$

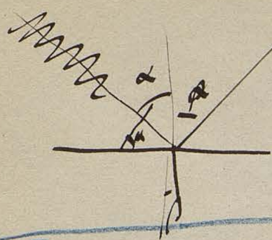
$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \qquad \cos\alpha = \sin\beta$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n = \operatorname{tg}\alpha$$

Gesetz Brewster

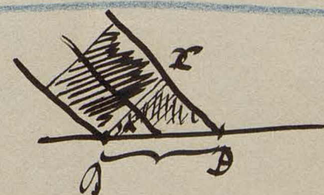
$$J' = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)} + \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)}\right]$$

$$\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}$$
$$\sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}$$
$$\cos\varphi + \cos\psi = 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}$$
$$\cos\varphi - \cos\psi = -2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}$$



$$a \cos\alpha + a' \cos\alpha = a_1 \cos\beta$$

$$(a+a')\cos\alpha = a_1 \cos\beta \qquad (\mathrm{I}\,b)$$



$$m a^2 = m' a'^2 + m_1 a_1^2$$

ρ

$$BC.\cancel{BD} = BC \,.\, BD \sin\alpha$$

$$= BD^2 \sin\alpha\cos\alpha$$

$$\rho a^2 \sin\alpha\cos\alpha = \rho a'^2 \sin\alpha\cos\alpha + ..$$

$$\frac{E}{\rho} : \left(\frac{E}{\rho}\right)_1 = n^2 = \frac{\sin\alpha^2}{\sin\beta^2}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}$$

$$\sin\alpha\cos\alpha(a^2 - a'^2)\sin^2\beta = \sin\beta\cos\beta\, a_1^2 \sin^2\alpha$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(a^2 - a'^2) = \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\, a_1^2$$

$$\sin\beta\cos\alpha\,(a^2 - a'^2) = \cos\beta \sin\alpha\, a_1^2 \qquad \mathrm{II}.$$

$:1$

$$\sin\beta\cos\alpha\,(a - a') = \sin\alpha\cos\beta\, a_1$$

$$= (a+a')\sin\alpha\cos\beta$$

$$a' = a\,\frac{\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta}{\ldots} = a\,\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \qquad \| \ (1a)$$

$$a_1 = a\,\frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

~~Rowland~~

Fraunhofer 1823 D środek 5890 $\mathring{A} = 10^{-10}$ mm

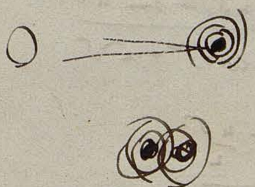
Ångström 1868 5892
(siatka Noberta)

Rowland 1887 5893

Nowe jednostki — z powodu nie ścisłości dotł. → Rowland 6438.680 5086.001 4800.097

~~Michelson~~ Cd Michelson (Normal m) 6438.4722 | 5085.8240 | 4799.9107

Instrumenty opt.



$\rho = \frac{k\lambda x}{D}$

$k = 1.22$
2.23
3.24
4.24
5.24

aby rozróżnić gwiazdy $1'' = (484 \cdot 10^{-6})$ $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ $D = 12.6$ cm

θ'' rozpozn. $= \frac{12.6}{D}$

oko ludzkie

$D = 3$ mm

$\theta = 42''$ ale z powodu physiolog.: wielkość pręcików....
1' (Helmholtz)

$$\frac{a \sin(\frac{\delta}{2}\sin\beta)}{\sin\beta}\left[\sin\varphi + \sin(\varphi-\delta) + \sin(\varphi-2\delta)+ \dots \right]$$

$$\underbrace{}\ \sin\varphi\left[1+\cos\delta+\cos 2\delta+ \dots \quad \cos(n-1)\delta\right]$$

$$+\cos\varphi\left[\sin\delta+ \dots \quad \sin\dots\right]$$

$$A^2+B^2 = \left|\left[1+e^{i\delta}+ \dots\ e^{(n-1)\delta}\right]\right|$$

$$= \cancel{\frac{1-z^n}{1-z}}\left|\frac{1-z^n}{1-z}\right| = \frac{1-\cos n\delta + i\sin n\delta}{1-\cos\delta - i\sin\delta}\cdot\frac{1-\cos n\delta - i\sin n\delta}{1-\cos\delta+i\sin\delta}$$

$$= \cancel{\frac{(1-\cos n\delta+i\sin n\delta)(1-\cos\delta+i\sin\delta)}{(1-\cos\delta)^2+\sin^2\delta}} = \frac{(1-\cos n\delta)^2+\sin^2 n\delta}{(1-\cos\delta)^2+\sin^2\delta}$$

$$= \frac{4\sin^4\frac{n\delta}{2}+4\sin^2\frac{n\delta}{2}\cos^2\frac{n\delta}{2}}{4\sin^4\frac{\delta}{2}+4\sin^2\frac{\delta}{2}\cos^2\frac{\delta}{2}} = \frac{\sin^2\frac{n\delta}{2}}{\sin^2\frac{\delta}{2}}$$

$$J = \cancel{a\sin\delta}\left[\frac{a\, b \sin\frac{\pi b\sin\beta}{\lambda}}{\frac{\pi b \sin\beta}{\lambda}}\cdot\frac{\sin\frac{n\pi c\sin\beta}{\lambda}}{\sin\frac{\pi c\sin\beta}{\lambda}}\right]^2$$

$$\frac{n\pi c\sin\beta}{\lambda}=\frac{3\pi}{2n}$$

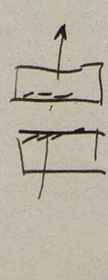
$$n : \cancel{\frac{1}{\frac{3\pi}{2n}}} = n : \frac{4}{9\pi^2}$$

$$J_r = \frac{4r^2\sin^2\frac{\delta}{2}}{1-\dots}$$

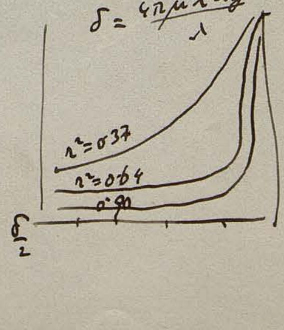
$$\frac{1}{1+\frac{4r^2}{(1-r^2)^2}\sin^2\frac{\delta}{2}} = \frac{1}{1+\varepsilon\sin^2\frac{\delta}{2}}$$

$$\delta = \frac{4\pi\mu l\cos\varphi}{\lambda}$$

Fabry Perot



$$J_d = \frac{(1-r^2)^2}{(1-r^2)^2+4r^2\sin^2\frac{\delta}{2}}$$



I Einf. II Einf.

$a + a' = a_1$ $(a + a')\cos\alpha = a_1 \cos\beta$ $\sin\alpha$

$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(a^2 - a'^2) = a_1^2 \frac{\cos\beta}{\sin\beta}$

$(a - a')\cos\alpha \sin\beta = a_1 \cos\beta \sin\alpha$ || $(a - a')\sin\beta = a_1 \sin\alpha \; \cos\beta$

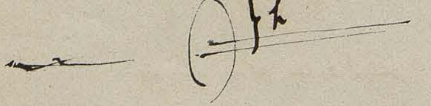
$a(\sin\alpha\cos\beta \mp \cos\alpha\sin\beta) + a'(\quad) = 0$ $a(\cos\alpha\sin\alpha - \sin\beta\cos\beta) + a'(\quad + \quad) = 0$

$a' = a \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{\quad " \quad + \quad}$

$a' = a \cancel{\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}} \; a \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}$

$= \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}$

$$4\pi s_0 = \iint \left\{ \frac{\partial \frac{s\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}}{\partial n} \cos nr - \frac{1}{r}\frac{\partial\, s\left(t-\frac{r}{v}\right)}{\partial n} \right\} dS$$



roz. liš. $\varphi > 0{\cdot}61 \frac{\lambda}{h}$

$h = 20\ \text{cm}$

$\varphi = 0{\cdot}0117' = 0{\cdot}7''$

Otvor lidské pupily $h = 2\ \text{mm}$

$\varphi = 0{\cdot}42'$

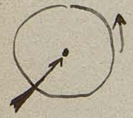
$\frac{10}{30\ \text{cm}} = 5\ \text{mm}$ $\quad$ $0{\cdot}1$

$0{\cdot}05\ \text{mm}$

Zeemann 1897 wszczepieni w polu magn.; Lorentz czy mi polar? istotnie

$$f = \frac{m v^2}{r} = m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{\cancel{T}}n\right)^2 r = \alpha r$$

w polu magn. prostopadł. do płaszczyzny



$$f = m\left(\frac{2\pi n}{\cancel{T}}\right)^2 r - e v H = \left[m\left(\frac{2\pi n}{\cancel{T}}\right)^2 - e\left(\frac{2\pi n}{\cancel{T}}\right) H\right] r = \alpha r$$

$$4\pi^2 n_0^2 m = \alpha = 4\pi^2 n^2 m - 2\pi e n H$$

$$\cancel{4\pi}\,(n^2 - n_0^2) = \frac{e n H}{2\pi m}$$

$$n - n_0 = \frac{\cancel{}\,He}{4\pi m}$$

$$\dashrightarrow\ n' - n_0 = -\frac{He}{4\pi m}$$

$$\Big\}\ n - n' = \frac{He}{2\pi m}$$

$$\lambda = \cancel{\frac{v}{n}}$$

$\lambda = 0.000589$

$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{1000}$

$\Delta\lambda = \frac{1}{40}\, d\lambda \qquad H = \cancel{1}8.000$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{(n-n')}{n} = \frac{\lambda}{v}\,\frac{He}{2\pi m}$$

$$\frac{e}{m} = \frac{2\pi}{H}\left(\frac{v}{\lambda}\right)\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{2\pi\cdot\cancel{3\cdot 10^{10}}\ 0.00006}{8000\cdot\cancel{0.0000589}}\ \frac{1}{40.000}$$

$$= \frac{6\pi}{4\cdot 5.89\cdot 0.8}\cdot 10^7 \ \# \ 10^7 \cdot 1.6$$

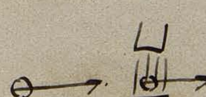
polaryzacja kołowa w tym kierunku; dublet

pokazało się że są ~~...~~ ze strony fioletowej

zatem e ujemny ładunek!

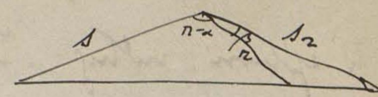
polaryzacja liniowa w kierunku ⊥; triplet

Michelson, Cornu etc. ; który porównał metodą z płomieniem sodowym



gdy magnes to jasność polaryzowana liniowo

$$s\, s_2 \sin(\pi-\alpha+\beta) = s r \sin\alpha + s_2 r \sin\beta$$



$$s s_2 (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) =$$

$$s s_2 (n\cos\beta - \cos\alpha) = n r s + s_2 r$$

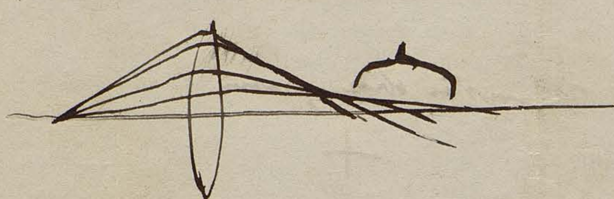
$$\frac{1}{s} + \frac{n}{s_2} = \frac{n\cos\beta - \cos\alpha}{r} = \frac{\sin^2\alpha}{s} + \frac{n\sin^2\beta}{s_1}$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{s} = n\left(\frac{\cos^2\beta}{s_1} - \frac{1}{s_2}\right)$$

$$\neq n\,\frac{s_2-s_1}{s_1 s_2}$$

Aberracja sferyczna na osi

$$\Delta s_2 \neq \sin^2\alpha\,\frac{1}{s_2^2}$$



$$s_1 = s_2 + \Delta$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{s} = \frac{n}{s_2}\left[\cos^2\beta\left(1-\frac{\Delta}{s_2}\right)-1\right]$$

$$= -\frac{n}{s_2}\left[\frac{\Delta}{s_2}\cos^2\beta + \sin^2\beta\right]$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{s} = -\frac{n\sin^2\beta}{s_2}$$

$$s = -n s_2$$

$$s + n s_2 = 0$$

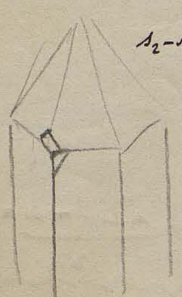
$$\frac{1}{s} + \frac{n}{s_2} = \frac{n-1}{r}$$

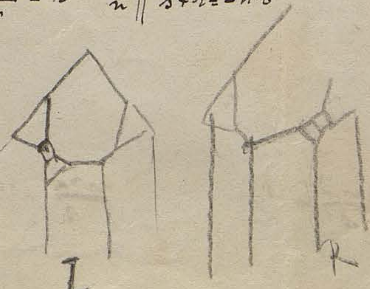
$$\frac{n}{s_2} - \frac{1}{n s_2} = \frac{n-1}{r} = \frac{1}{s_2}\,\frac{n^2-1}{n}$$

$$s_2 = \frac{(n+1)r}{n} \qquad s = -(n+1)r$$

$$s_2 - r = \frac{(n+1)r}{n} - r = \frac{r}{n} \;\Big\|\; s + r = -nr$$

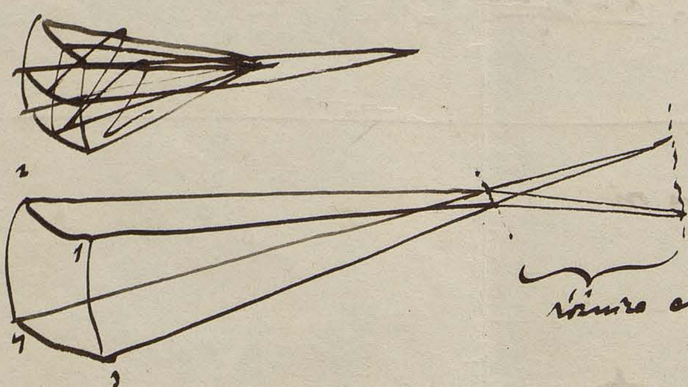
zatem astygmatyzm znika w punktach aplanatycznych





Tak obrazowanie tylko przybliżenie uwzględnione przez promienie przyosi.

W ogólności według Malus: system ortotomiczny zatem normalne do powierzchni

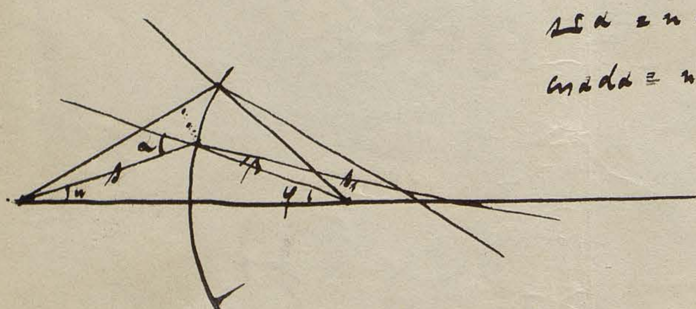


oba punkty są dwie linie ogniskowe (Brennlinien)

różnica astygmatyczna

Tylko jeśli promień jest prosty może powstać obraz wyraźny

(Astygmatyzm fizjologiczny!)



$\sin\alpha = n\sin\beta$

$\cos\alpha\, d\alpha = n\cos\beta\, d\beta$

$\alpha = u+\varphi \quad | \quad \varphi = \beta + u'$

$d\alpha = du + d\varphi \quad | \quad d\varphi = d\beta + du'$

$\cos\alpha\,(du+d\varphi) = n\cos\beta\,(d\varphi - du')$

$s\,du = r\,d\varphi\cdot\cos\alpha$

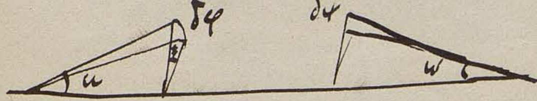
$s_1\,du_1 = r\,d\varphi\cdot\cos\beta$

$\cos\alpha\left(\frac{r\cos\alpha}{s}+1\right) = n\cos\beta\left(-\frac{r\cos\beta}{s'}+1\right)$

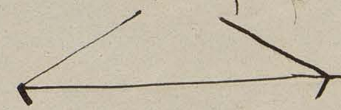
$\frac{\cos^2\alpha}{s} + \frac{n\cos^2\beta}{s'} = \frac{n\cos\beta - \cos\alpha}{r}$

$wv = -\frac{f}{f'} = +\frac{n}{n'}$ $w = \frac{tg\,u'}{tg\,u}$ $v = \frac{y'}{y}$

$n' y' \, tg\, u' = n y \, tg\, u$



przekrój ~~[illegible]~~ wzdłuż osi



$w = \frac{\delta\psi}{\delta\varphi}$ $\delta\varphi = \varepsilon \sin u$

$\delta\psi = \varepsilon \sin u'$

$w = \frac{\sin u'}{\sin u}$ $v = \frac{y'}{y}$

$n' y' \sin u' = n y \sin u$

Podobnie też dla przekroju wzdłuż południka

$w = \frac{du'}{du}$ $v =$

---

to jest warunek, ażeby wąski element wielkiej miary ⊥ ~~[illegible]~~ tworzył dokładny obraz, ale powierzchni spełniamy z $n' y' \, tg\, u' = n y \, tg\, u$ więc obraz nie będzie jednokreślny

więc nie mogą być równocześnie spełnione, zatem zależnie od celu (wielki obraz przez wszystkie mogący punkty)

Mikroskop objektyw (aplanatyczny) musi dając przedmiot bardzo mały a wiązka duża

Okular przedmiot duży wiązka mała | tak samo aparaty fotogr. zwłaszcza | musi być ortoskopowy

Aberacja na osi

$$\varepsilon = -\frac{h^2\left\{2 - 2n^2 + n^3 + \frac{r_1}{r_2}\left(n + 2n^2 - 2n^3\right) + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 n^3\right\}}{f\, 2n(n-1)^2\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)^2}$$

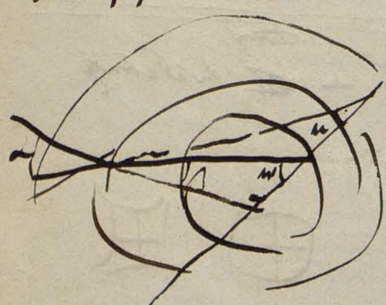
pod względem aberacji lepiej jeśli wypukłością [illegible] [illegible]

i jeśli przedmiot

aniżeli

Aplanatyzm

Punkty aplan. kuli



$\sin u' : \sin u = \cancel{v'} v'_2 : v_2 = v' : v$

$\frac{n-1}{2}$

~~[illegible]~~

$$\frac{\sin u'}{\sin u} = \frac{v'}{v} = \cancel{\ } n$$

wielkość przedmiotu:

$y : y' = nr : \frac{r}{n}$

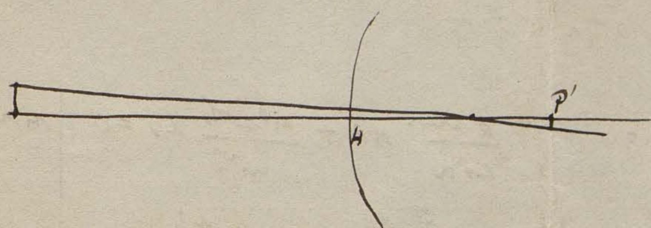
$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{n^2}$$

Amici obiektyw. aplanatyczny z immersją

$$\frac{y' \sin u'}{y \sin u} = \frac{1}{n} = \frac{v}{v'}$$

$v' y' \sin u' = v y \sin u$

 — Drude fig. 25



$$\cancel{n f' = \frac{n r}{n-1}}$$

$$\frac{1}{e} + \frac{n}{e'} = \frac{n-1}{r}$$

$$1 + \frac{n e}{e'} = \frac{e(n-1)}{r}$$

$$h : -h' = \frac{e+r}{e'-r} = \frac{n e}{e'}$$

$$\frac{h}{h'} = \left[-\frac{e(n-1)}{r} + 1\right] \qquad \cancel{\frac{h'}{h} = \frac{1}{\frac{e(n-1)}{r} - 1} = \frac{1}{1 - \frac{e'(n-1)}{n r}}}$$

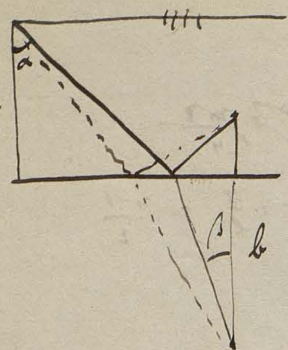
$= +1$ jeżeli $e = 0$ / $e' = -0$

Takie punkty (leżące z tej samej strony) gdzie powiększenie $= 1$ nazywamy punktami głównemi (Gauss)

$\frac{h'}{h}$ = powiększenie poprzeczne $= \frac{e'}{n e}$ = wtedy punkta $\mp \frac{1}{n} \frac{\operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} u'}$

$n h' \operatorname{tg} u' = h \operatorname{tg} u$

$v' h' \operatorname{tg} u' = v h \operatorname{tg} u$ = niezmiennik optyczny ponieważ niezmienniony zostaje przy dowolnej ilości załamań



$$s = \frac{a}{\cos\alpha} + \frac{n b}{\cos\beta}$$

$$c = a \operatorname{tg}\alpha + b \operatorname{tg}\beta$$

$$\frac{ds}{d\alpha} = 0 : \quad \frac{a \sin\alpha}{\cos^2\alpha}\, d\alpha + \frac{n b \sin\beta}{\cos^2\beta}\, d\beta = 0 \quad \Big|\ n \sin\beta$$

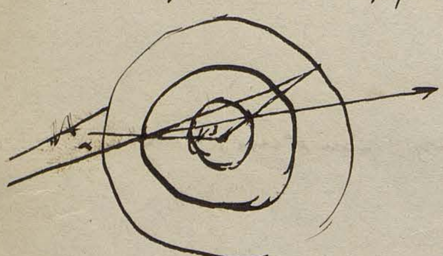
$$\frac{a\, d\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{b\, d\beta}{\cos^2\beta} = 0$$

$$\frac{a \sin\alpha\, d\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{a n \sin\beta\, d\alpha}{\cos^2\alpha} = 0$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$$

Model: zyt ortotomiczny przechodzi ... p...

Tak samo dla soczewek



$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$$

wszystkie promienie idące ku nr zostaną skierowane ku: $\frac{r}{n}$

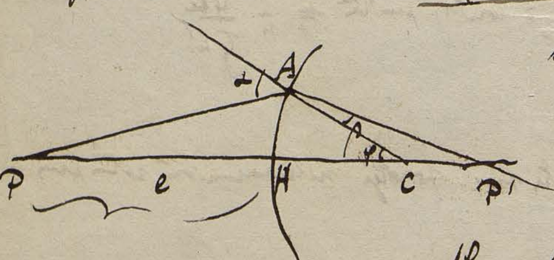
wciągając stałe ~~...~~ sin

$$\frac{\sin u}{\sin\beta} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{r}{n}} = \frac{\sin\alpha}{\sin u'} = n$$

$$\frac{\sin u}{\sin u'}\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n^2$$

$$\frac{\sin u}{\sin u'} = n$$

dla punktów aplanatycznych



$$\sin\alpha : \sin\varphi = \frac{l + r}{PA}$$

$$\sin\beta : \sin\varphi = \frac{l' - r}{AP'}$$

dla wypukłych: $\quad \frac{l + r}{l' - r}\,\frac{l'}{l} = n$

$$1 + \frac{r}{l} = n\left(1 - \frac{r}{l'}\right)$$

$$\frac{1}{l} + \frac{n}{l'} = \frac{n-1}{r}$$

$$\begin{cases} f = \dfrac{r}{n-1} \\ f' = \dfrac{n r}{n-1} \end{cases} \qquad \Big|\ \frac{f'}{f} = n$$

$$\frac{\xi^2}{V^2-a^2} = \frac{l^2v^2\left[\cancel{\ } + \frac{\rho^4}{(v^2-a^2)}\right]^2}{v^2-a^2+\frac{\rho^4}{v^2}} = \frac{l^2v^2}{(v^2-a^2)^2}\left(v^2-a^2+\frac{\rho^4}{v^2}\right) = \frac{l^2v^2}{v^2-a^2} + \frac{l^2}{(v^2-a^2)^2}\rho^4$$

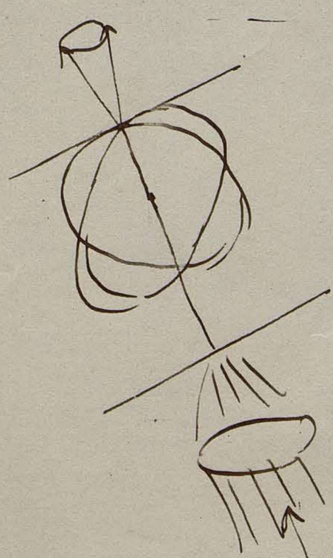
$$\frac{\eta^2}{V^2-b^2} \qquad = l^2v^2$$

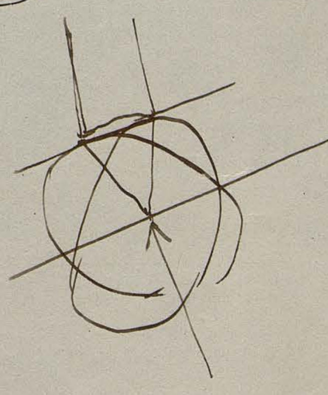
$$\boxed{\frac{\xi^2}{V^2-a^2} + \frac{\eta^2}{V^2-b^2} + \frac{\zeta^2}{V^2-c^2} = 1}$$

$$\frac{\lambda^2V^2}{V^2-a^2} + \frac{\mu^2V^2}{V^2-b^2} + \frac{\nu^2V^2}{V^2-c^2} = 1$$ [illegible]

Wellenfläche

$$-V^4\underbrace{\left[\lambda^2(b^2+c^2)+\mu^2(a^2+c^2)+\nu^2(a^2+b^2)\right]}_{\substack{=(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)(a^2+b^2+c^2)\\ -(\lambda^2a^2+\mu^2b^2+\nu^2c^2)}} + V^2\left[\lambda^2b^2c^2+\mu^2a^2c^2+\nu^2a^2b^2\right] = -V^4(a^2+b^2+c^2) + V^2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) - a^2b^2c^2$$





112

$$\cancel{(x-\xi)\frac{\partial F}{\partial x}+(y-\eta)\frac{\partial F}{\partial y}+(z-\zeta)\frac{\partial F}{\partial z}=0}$$

$$\cancel{(x'-\xi)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)'+\ldots=0}$$

$$\cancel{(x''-\xi)\frac{\partial F''}{\partial x}+\ldots=0}$$

$$\cos\varepsilon=\frac{\cancel{}}{l\lambda+m\mu+n\nu}$$

$$\varphi=\frac{v}{\cos\varepsilon}=\frac{v}{l\lambda+m\mu+n\nu}$$

$$l\xi+m\eta+n\zeta=v$$

$$l\xi+m\eta+n\zeta+k(l^2+m^2+n^2)=v+k$$

$\frac{\partial}{\partial l}\ldots$

$$\xi+2kl=\frac{\partial v}{\partial l} \quad\Big|\quad l$$

$$\eta+2km=\frac{\partial v}{\partial m} \quad\Big|\quad m$$

$$\zeta+2kn=\frac{\partial v}{\partial n} \quad\Big|\quad n$$

$$\frac{l}{a^2-v^2}=\frac{\lambda}{g^2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{2l}{a^2-v^2}+\underbrace{2\left[\frac{l^2}{(a^2-v^2)^2}+\frac{m^2}{(b^2-v^2)^2}+\frac{n^2}{(c^2-v^2)^2}\right]}_{\frac{1}{g^4}}v\frac{\partial v}{\partial l}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial l}=\frac{l}{v^2-a^2}\frac{g^4}{v}$$

$$v+k-k+2k=0$$

$$2k=-v$$

$$\xi=\frac{\partial v}{\partial l}+v\,l$$

$$\xi=l\left[v+\frac{1}{v^2-a^2}\frac{g^4}{v}\right]$$

$$\eta=$$

$$\zeta=$$

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=v^2+\cancel{2g^4\left(\frac{l^2}{v^2-a^2}+\frac{m^2}{v^2-b^2}+\frac{n^2}{v^2-c^2}\right)}+\frac{g^8}{v^2}\underbrace{\left[\frac{l^2}{(v^2-a^2)^2}+\frac{m^2}{(v^2-b^2)^2}+\frac{n^2}{(v^2-c^2)^2}\right]}_{=\frac{1}{g^4}}$$

$$\downarrow$$

$$\rho^2=v^2+\frac{g^4}{v^2}$$

$$v^4 - v^2\left[l^2(b^2+c^2) + m^2(a^2+c^2) + n^2(a^2+b^2)\right] + l^2b^2c^2 + m^2a^2c^2 + n^2a^2b^2 = 0$$

$$L = l^2(b^2-c^2) \qquad M = m^2(c^2-a^2) \qquad N = n^2(a^2-b^2)$$

$$2V^2 = l^2(b^2+c^2) + m^2(a^2+c^2) + n^2(a^2+b^2) \pm \sqrt{\underbrace{M^2+N^2+P^2-2MN-2NP-2MP}_{(M+N-P)^2-4MN}}$$

2 pierwiastki równe jeśli $M+N-P=0$ $\quad MN=0$

Nie może być $M=0$ by byłoby $N=P$ co nie zachodzi $N<0$ $\quad P>0$

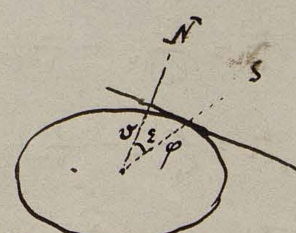
więc $N=0$

$\cancel{M}=0 \quad l^2(b^2-c^2) = n^2(a^2-b^2)$

$$l = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \qquad m=0 \qquad n = \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

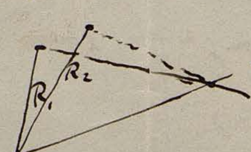
$l=0 \qquad v^4 - v^2\left[m^2(a^2+c^2) + n^2(a^2+b^2)\right] + m^2a^2c^2 + n^2a^2b^2 = 0$

$$(v^2-a^2)\left[v^2-(b^2n^2+c^2m^2)\right] = 0$$



więc punkty styczności są tak:

$$\frac{x^2}{a^2-R^2} + \frac{y^2}{b^2-R^2} + \frac{z^2}{c^2-R^2} = 0$$



$K_1 \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}$

$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$

$K_2 \frac{\partial Y}{\partial t} =$

$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0$

$K_3 \frac{\partial Z}{\partial t} =$

$\frac{\partial (K_1 X)}{\partial x} + \frac{\partial (K_2 Y)}{\partial y} + \frac{\partial (K_3 Z)}{\partial z} = 0$

$K_1 \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \Delta^2 X - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)$

Fresnel = prąd fal. dal.

$u = K_1 X$

$v = K_2 Y$

$w = K_3 Z$

$u = K_1 X = A \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{v}\right)$

$v = K_2 X = A \mu -$

$= A \nu$

$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1 = l^2 + m^2 + n^2$

$\lambda l + \mu m + \nu n = 0$

popr. zaburzenia fal

$\frac{\lambda}{c^2} = \frac{\lambda}{K_1 v^2} - \frac{l}{v^2}\overbrace{\left(\frac{l\lambda}{K_1} + \frac{m\mu}{K_2} + \frac{n\nu}{K_3}\right)}^{g^2}$

$\frac{\mu}{c^2} = \frac{\mu}{K_2 v^2} - \frac{m}{v^2}\left(\qquad \right)$

$\frac{\nu}{c^2} = \frac{\nu}{K_3 v^2} - \frac{n}{v^2}\left(\qquad \right)$

prawo Fresnela

$\cancel{\lambda\left(K_1 - \frac{c^2}{v^2}\right)}$ $\lambda\left(\overbrace{\frac{c^2}{K_1}}^{a^2} - v^2\right) = l g^2$

$\mu\left(\overbrace{\frac{c^2}{K_2}}^{b^2} - v^2\right) = m g^2$

$\nu\left(\overbrace{\frac{c^2}{K_3}}^{c^2} - v^2\right) = n g^2$

$\frac{l^2}{a^2 - v^2} + \frac{m^2}{b^2 - v^2} + \frac{n^2}{c^2 - v^2} = 0$

$l = 0 \qquad m^2c^2 - m^2v^2 + n^2c^2 - n^2v^2 = 0$

5). $\frac{x}{f} = \frac{f'}{x'} = \frac{1}{v}$

$x x' = f f'$

Jeśli początek współrzędnych H, H'

$x' = f' + \xi'$

$x = f + \xi$ (znak zmieniony bo z drugiej strony względem kierunku światła)

$(f'+\xi')(f+\xi) = f f'$

$\xi' f + \xi f' + \xi \xi' = 0$

$\frac{f}{\xi} + \frac{f'}{\xi'} + 1 = 0$

Szczególny przypadek już mówiliśmy:

$f = \frac{r}{n-1} \qquad f' = \frac{nr}{n-1}$

$\frac{1}{l} + \frac{n}{l'} = \frac{n-1}{r}$

6). $v = \frac{f'}{x'} = \frac{f'}{f'+\xi'} = \cancel{\frac{x}{f}}$

$v = \frac{\frac{nr}{n-1}}{\frac{nr}{n-1}+l'} = \frac{1}{1+\frac{(n-1)l'}{nr}} = 1$ jeśli $l'=0$

powiększenie poprzeczne

powiększenie kątowe $w = -\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u}$ = z figury $-\frac{\frac{l}{f}}{\frac{l}{f'+\xi'}} = -\frac{f'+\xi'}{f} = -\frac{f}{x'} = -\frac{x}{f'}$

$= -\frac{f}{f'}\frac{1}{v} \qquad w v = -\frac{f}{f'}$

7). powiększenie podłużne: $x x' = f f'$

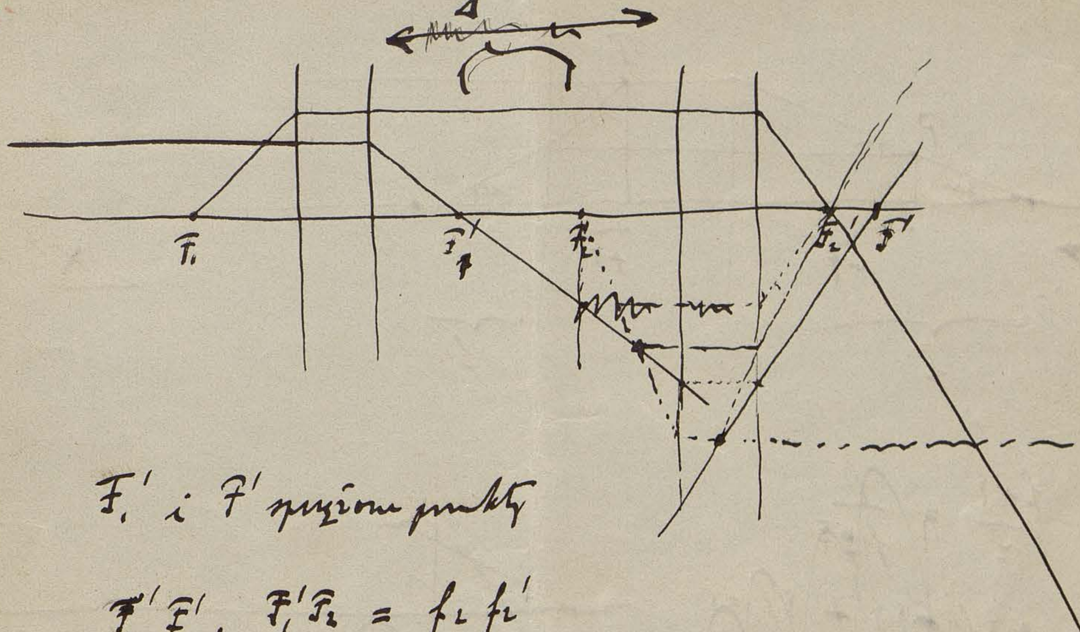
$(x+\Delta x)(x'+\Delta x') = f f'$

$x'\Delta x + x \Delta x' + \Delta x \Delta x' = 0$

$u = \frac{\Delta x'}{\Delta x} = -\frac{x'}{x+\Delta x'}$ więc zależne od $\Delta x'$; tylko dla małych [illegible]

$$ua - \frac{u'}{u} = -\frac{v}{w}$$

9)



F_1' i F' sprzężone punkty

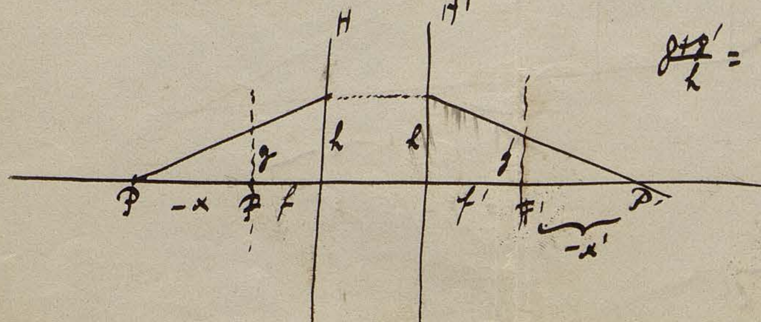
$$F_2'F' \cdot \underbrace{F_1'F_2}_{\Delta} = f_2 f_2'$$

$$F_2'F' = \frac{f_2 f_2'}{\Delta}$$

$$f' = \frac{f_2 f_1'}{\Delta}$$

Jeśli punkt P na osi:

8)



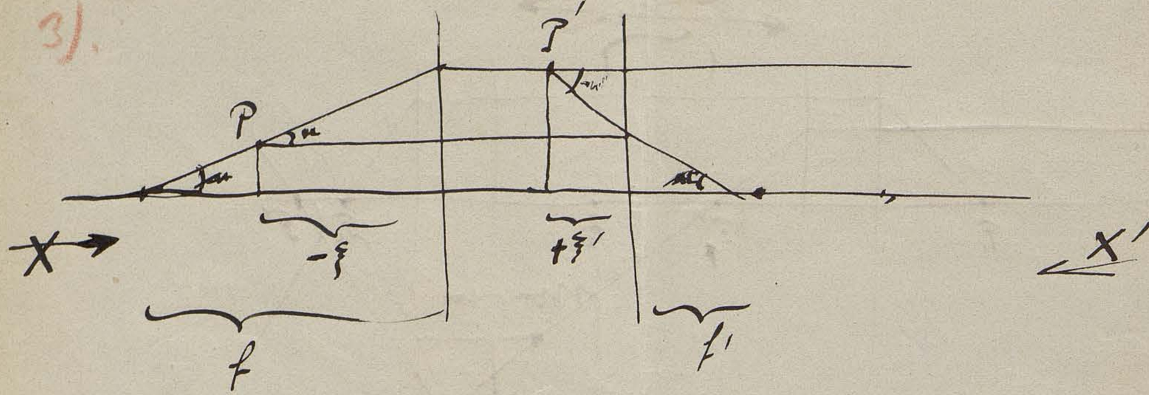
$$\frac{g}{h} = \frac{-x}{f-x} \qquad \frac{g'}{h} = \frac{-x'}{f'-x'}$$

$$\frac{g+g'}{h} = \frac{-xf'+xx'-x'f+xx'}{ff'+xx'-xf'-x'f} = 1$$

$$(ff'=xx')$$

$$g+g'=h$$

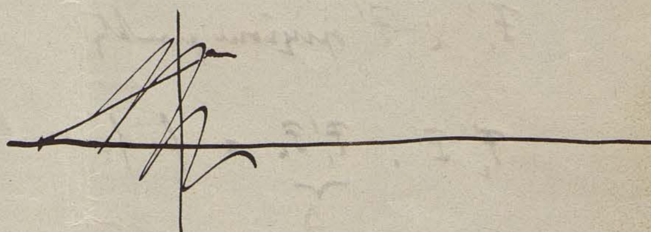
3).

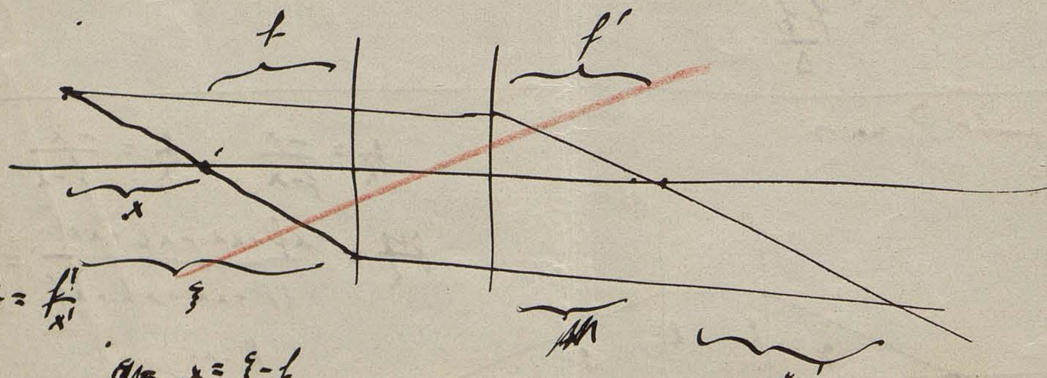


$$\frac{f+\xi}{f} = \frac{f'}{f'+\xi'}$$

$$+\xi f' + \xi\xi' + \xi' f = 0$$

$$\frac{\xi}{f} + \frac{\xi'}{f'} = -1$$





$$\frac{x}{f} = \frac{f'}{x'}$$

$x = \xi - f$

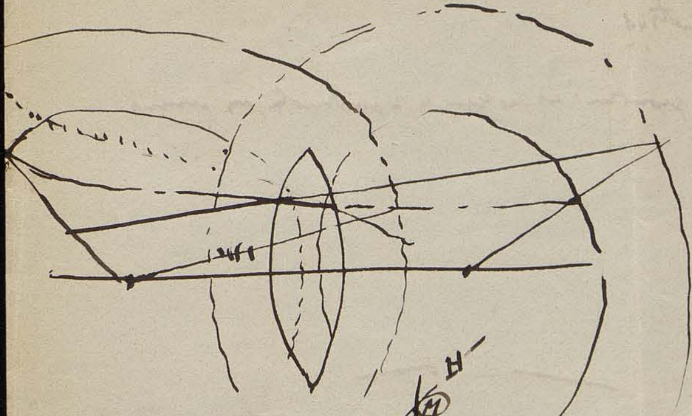
$x' = \xi' - f'$

4).

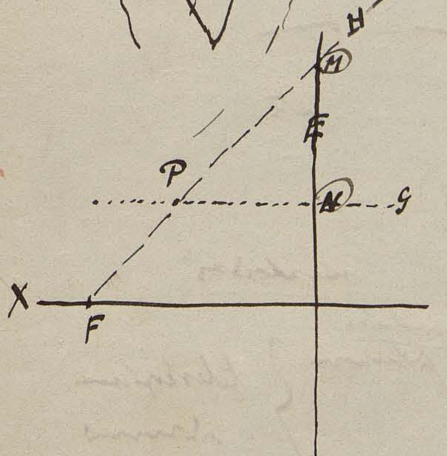
$$\frac{\xi - f}{f} = \frac{f'}{\xi' - f'}$$

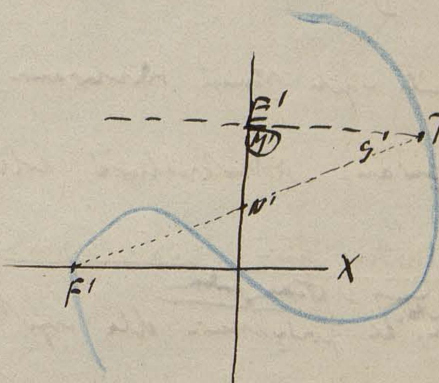
$$\xi\xi' - f\xi' - f'\xi = 0$$

$$\frac{\xi}{f} + \frac{\xi'}{f'} = 1$$



2)

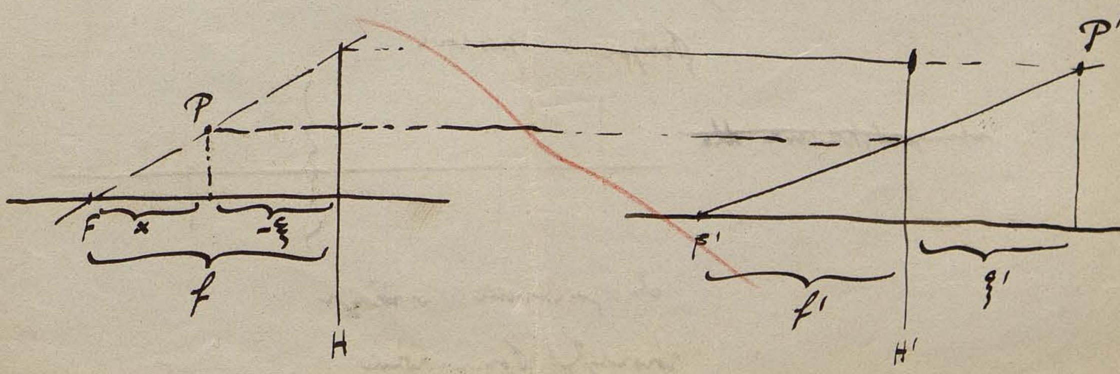




powiększenie = v

Płaszczyzny główne

Wskutek nich jeszcze prostsze konstrukcje



promienie sprzężone

ogólny syst. optyczny z osiową symetryą

nazywamy obraz = punkt (punkty) jako miejsce promieni wychodzących z przedmiotu się przecina

obraz przedmiotu jeżeli równe punkty

A . B . C
D

a . b . c
d

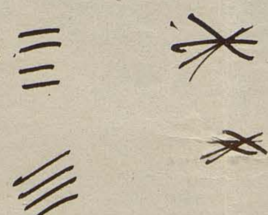
Jeżeli wszystkie ostatnie odwzorowane to punkty . . . punkty

Tak zwana jednokreślność (Kollin. Verwandt)

I. Najprostsza jest podob. punkt. i obraz niezależny

~~t.zn. że figury w płaszczyznach punktu~~
II. t.zn. że powiększenie dla wszystkich ~~...~~ promieni równoległych jednakowe } teleskopowe odwzorowanie
ze równoległych promieni odpowiadają tyż równoległe

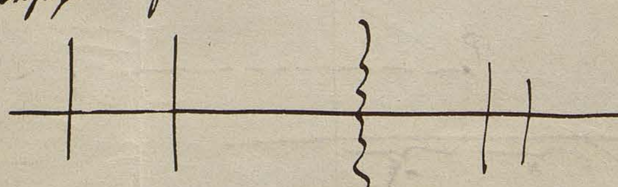
III. równoległe obraz



Najogólniejszy zgodny z symetryą

promieni opisowe

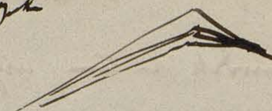
~~ale powiększenie dla~~



ale powiększenie w różnych
równoległych planach różne

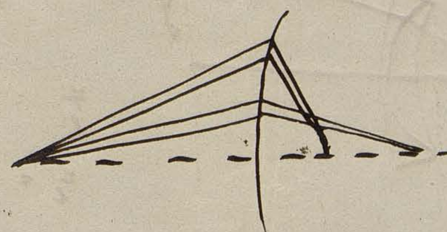
Zatem: I). Astygmatyzm:

jeżeli usunięty to znosi się dla każdego punktu



II Aberracja na osi

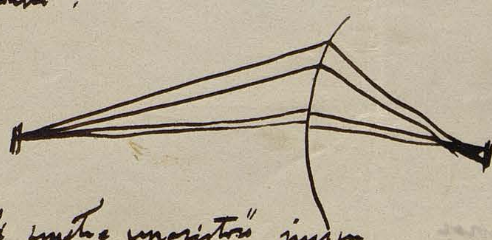
zależna od nachylenia dróg w różnych punktach:



III ~~Dla~~ Jeżeli punktów na osi obrazy wszystkie w tym samym miejscu

nie potrzeba by obrazy elementu pow. były różnej wielkości wskutek rozmaitych nachyleń promieni:

warunek aplanatyczności



IV ~~Dla~~ Jeżeli wszystkie wyrazistość jasna

wykonalności

warunek ortoskopii

V Krzywizna obrazu

rzędzie c. Achromatyzm

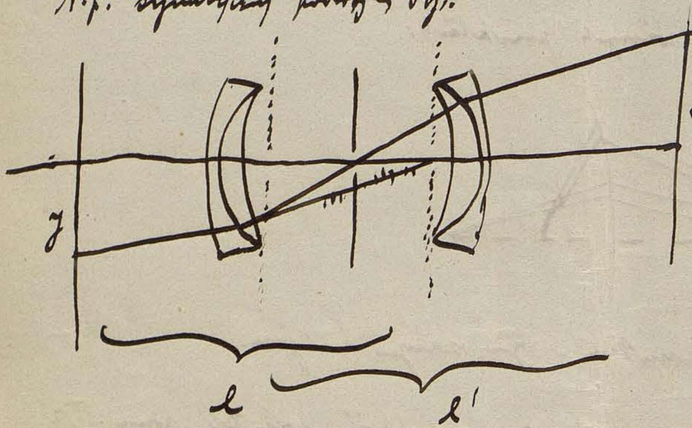
I Fotogr. Krajobrazy:

Wielka pow. przy ~~...~~ wązkie snopy,

Astygmatyzm, Orthoskopia, Krzywizna

ważny środek ku temu więcej odpow. „Blende"

N.p. symetryczny podwójny obj.



Pierwotnie pojedyncza soczewka z diafragmą (ortosk.)

zaczerń daguerotypii 1839

Achrom. i bez dw. ...

Symetr. dublet Steinheil 1866

ortosk. (coma)

Jeśli soczewki ~~...~~ achrom. nazyw.

„Aplanat" (nie ...)

rozmaite nazwy, ...

symetr. dublet 1840 Petzval

Steinheil Antiplanat

Zeiss anastigmat

$\frac{y'}{l'} = tg\, u'$

$\frac{y}{l} = tg\, u \qquad u = u'$

$\frac{y'}{y} = \frac{l'}{l}$ = wzrost dla ... punktów

Anastygmaty Drude p. 87

Teleobjektiv

długa krótka kamera | bo ~~...~~ obraz tu więcej ... więcej ...

portrety

mała pow. szerokie snopy (bo wielkie soczewki dużo silne światło)

Aberracja, Aplanatyzm | nie dużo tak bardzo o ortoskopię

Achromatyzm	n_C	n_D	n_F	$\nu = \dfrac{n_F - n_C}{n_D - 1}$ $\left(\dfrac{\Delta n}{n-1}\right)$
Calcium Silicat Crown	1'5153	1'5179	1'5239	0·0166
Silicat Flint	1'6143	1'6202	1'6314	0·0276

k i f dla jednego koloru fotogr. różny realne oka. zato

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \qquad \frac{1}{f_1} = (n_1-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right) = (n_1-1)\,k_1$$

$$d\left(\frac{1}{f_1}\right) = dn_1\, k_1 = \frac{dn_1}{n_1-1}\,\frac{1}{f_1} = \frac{\nu_1}{f_1}$$

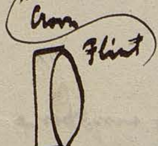
$$d\left(\frac{1}{f}\right) = d\left(\frac{1}{f_1}\right) + d\left(\frac{1}{f_2}\right) = 0 = \frac{\nu_1}{f_1} + \frac{\nu_2}{f_2}$$

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f}\,\frac{\nu_2}{\nu_2 - \nu_1} \qquad \frac{1}{f_2} = -\frac{1}{f}\,\frac{\nu_1}{\nu_2 - \nu_1}$$

jedno prog. ramię f
wszystko $r_1' = r_2$

jedno [illegible] z drugiem. (także usilny obranie pokrywają)

Przedmiot  objektywy teleskopowe

$$\Delta = a - (f_1 + f_2) \qquad f = \frac{f_1 f_2}{\underbrace{f_2 + f_1 - a}_{\Delta}}$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{a - (f_1 + f_2)} \qquad \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{a}{f_1 f_2}$$

$$0 = \frac{\nu_1}{f_1} + \frac{\nu_2}{f_2} - \frac{a(\nu_1 + \nu_2)}{f_1 f_2} \qquad a = \frac{\nu_2 f_1 + \nu_1 f_2}{\nu_1 + \nu_2}$$

$\nu_1 = \nu_2$: $\quad a = \dfrac{f_1 + f_2}{2}$

Okuláre soustavy v ten způsob

Ramsden 

$f_1 = f_2 = a$ soustava: $a = \frac{2}{3} f_1$ čočky ne v ideální poloze —

Huyghens soustava $f_1 = 3 f_2$ $a = 2 f_2$

Dvě čočky vzdálené dotýkající se $\Delta = -(f_1 + f_2)$

$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} = f'$ $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$

$F_2' F' = \frac{f_2^2}{f_1 + f_2}$

Mikroskop

Objektyw: 1) Aplanatyczne i Achrom.

2). Achrom.

Okular 1). Astygmatyczne

2). Ortoskop.

3). Achrom.

Znaczenie Apertury ($n \sin U$)

dotychczas $< 1{\cdot}6$

Apochromaty = system achrom. także pod względem wzmocn. Aplanatyczne

$$\delta > \frac{\lambda}{2a}$$

$= 0{\cdot}00016$ mm

rozróżnić jeszcze możemy okiem $2'$ zatem powiększenie 900

Anastygmat fotograf.

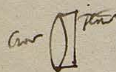
Achromat. : $\nu_2 f_1 = -\nu_1 f_2$

stare

1 2

$f_1 < f_2$

$\nu_2 > \nu_1$



2 1

~~krzywizna~~ krzywizna = 0

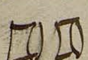
jeżeli $n_1 f_1 = -n_2 f_2$

jeżeli $\frac{\nu_2}{\nu_1} >$ | $\frac{n_2}{n_1} >$ wtedy ↑ niemożliwe

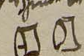
tylko jeżeli szkło posiadające duże ν_n ma małe ν duże n

Neoachromat

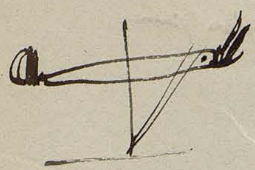
Altachrom. + Neoachrom. =



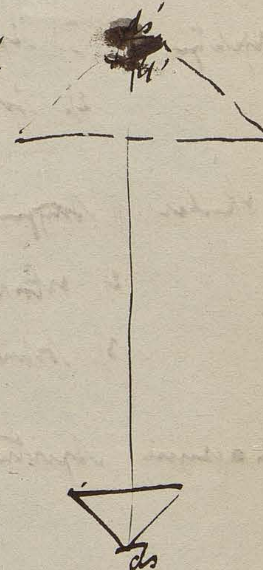
Anastygmat aplan.



Natężenie światła wychodzącego pod kątem (zależne przez ds) φ w przez. [illegible]



$$i\,ds\int_0^U 2\pi \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \pi i\,ds\sin^2 U$$



oświetlenie obrazu jeśli żadnej straty energii, to znaczy

$$\pi i\,ds\sin^2 U = \pi i'\,ds'\sin^2 U'$$

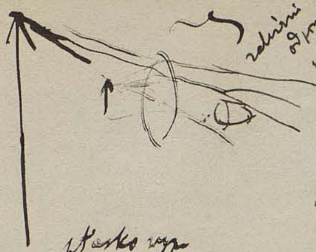
$$i' = i\underbrace{\frac{ds}{ds'}\,\frac{\sin^2 U}{\sin^2 U'}}$$

$$= \left(\frac{y\sin U}{y'\sin U'}\right)^2 = \left(\frac{n_0}{n'}\right)^2 i$$

Zatem natężenie ~~światła~~ obrazu wzrasta z kwadratem (Stosunek ważny!)

$$(n_0\sin U)^2 = a^2 \text{ numerische Apertur}$$

Lupa



zależności od przyjętej przy oddaleniu silna anortoskopia

$$\left(v = \cancel{\frac{x}{}} = \cancel{\frac{f}{x}} \right) \quad \frac{f}{x} = \frac{x'}{f} = \frac{\delta + a}{f}$$

~~$x = 25$ cm~~ $\delta = 25$ cm

pojedyncza soczewka przyjąć 8 dobre $f = 3$ cm

lepsza złożona

Mikroskop 1). $f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}$ gdyż powiększając odstęp Δ można zmniejszyć

$f' = \frac{f_1' f_2'}{\Delta}$ dowolnie f

n.p. $f_1 = f_2 = 10$ mm $\quad \Delta = 100 \quad f = 1$ mm

2). większy odstęp oka

3). i przedmiotu

4). łatwo często wymienić okular

5). podział zadania między obj. i ok. zmniejsza błędy i wielka apertura

Już używano w 16 i 17 wieku

achromat. Frauenhofera Amici około 1811 1817 r.

obj. złożone z kilku soczewek … aby zmniejszyć błędy

Lister (1830) zwrócił uwagę na znaczenie punktów aplanatycznych

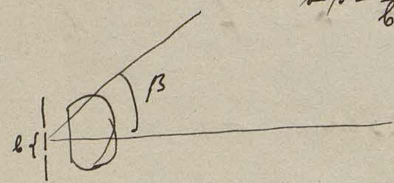
Amici (w ścisłym sensie)

z immersyą Amici woda (1840)

1878 Abbe homog. imm.

Abbe tzw. Apochromate (1886)

$\sin\beta = \frac{\lambda'}{b} = \frac{n\lambda}{b}$



odległość ~~punktu głównego~~ ogniska od wierzchołka

$$f_2' + F_2'F' = \frac{f_2'}{\Delta}(\Delta + f_2)$$

$$= \frac{\frac{v_3 r_2}{v_3 - v_2}\left[d - \frac{v_2 r_1}{v_2 - v_1} - \right]}{d - \frac{v_2 r_1}{v_2 - v_1} - \frac{v_2 r_2}{v_3 - v_2}} + = \frac{-\frac{r_2}{n-1}\left[d - \frac{n r_1}{n-1}\right]}{d(n-1) - n r_1 + n r_2}$$

odległość punktu głównego od wierzchołka

$$h' = f_2' + F_2'F' - f' = \frac{-r_2 d}{d(n-1) - n r_1 + n r_2}$$ ważne dla dowolnych soczewek między wierzchołkami

$$\neq -\frac{d}{n}\,\frac{r_1}{r_1 - r_2}$$

Cienkie soczewki

$$f = f' = \frac{-r_1 r_2}{(n-1)(r_1 - r_2)}$$

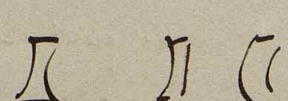
zatem ~~[illegible]~~ [illegible]

~~N. B.~~ ~~$r_2 < 0$~~

Dodatnie jeśli $r_1 > 0$, $r_2 < 0$ 

$r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $r_2 > r_1$ 

$r_1 < 0$, $r_2 < 0$, $r_1 > r_2$

Ujemne jeśli 

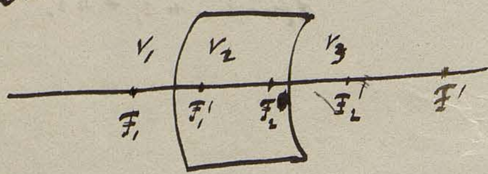
Dla takich cienkich soczewek odstęp od ogniska = ogniskowa, ale nie dla grubych!

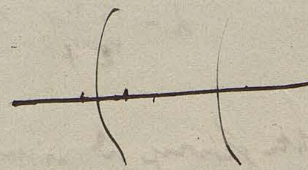
$f = -\frac{r}{2}$ $\qquad f' = \frac{r}{2}$

można to zatem podciągnąć pod ogólny wzór $f = -\frac{nr}{n-1}$ $\qquad f' = -\frac{r}{n-1}$

stawiając $n = -1$

Soczewki:





$$\Delta = d - f_1' - f_2$$

$$f_1 = \frac{v_1}{v_2 - v_1} r_1 \quad \Big| \quad f_1' = \frac{v_2}{v_2 - v_1} r_1 \quad \Big| \quad f_2 = \frac{v_2}{v_3 - v_2} r_2 \quad \Big| \quad f_2' = \frac{v_3}{v_3 - v_2} r_2$$

$$f = -\frac{v_1 v_2 \; r_1 r_2}{(v_1 - v_2)(v_2 - v_3)\left(d - \frac{v_2 r_1}{v_1 - v_2} - \frac{v_2 r_2}{v_2 - v_3}\right)}$$

$v_3 = v_1 = 1 \;\|\; v_2 = n$

$F_2' F' = \ldots$

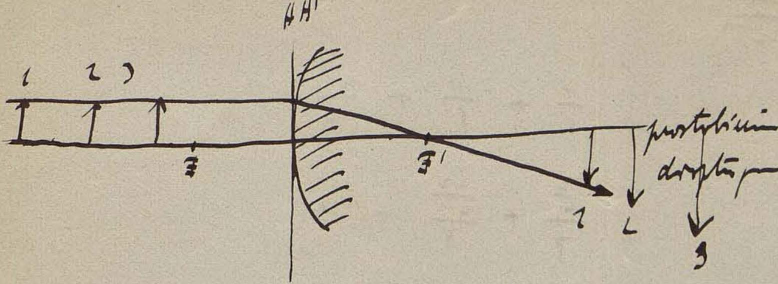
$$f = -\frac{n r_1 r_2}{(n-1)^2 \left[d(n-1) - n r_1 + n r_2\right]}$$

więc zależnie od d

dla cienkich soczewek:

$$f = -\frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_1 - r_2)}$$

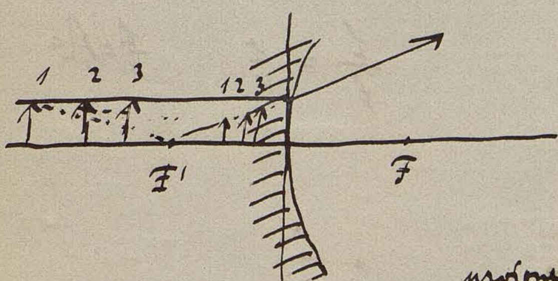
$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$



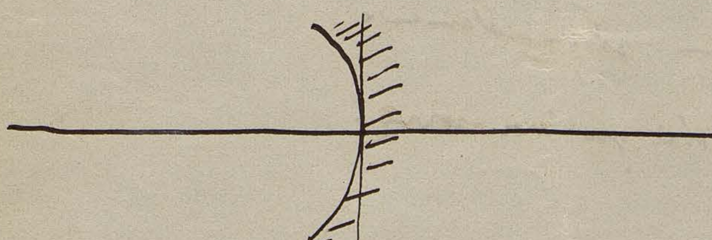
$$f = \frac{\nu r}{\nu' - \nu} \qquad f' = \frac{\nu' r}{\nu' - \nu}$$

$\nu' = 1 \qquad \nu = n$

$$f = -\frac{nr}{n-1} \qquad f' = -\frac{r}{n-1}$$

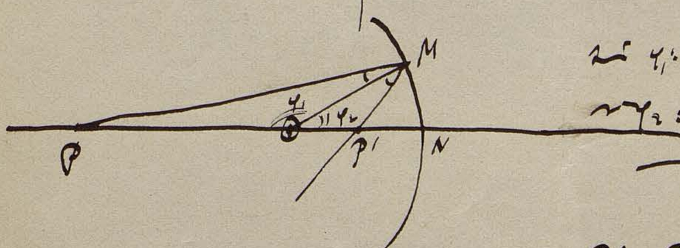


urozene



musí být to samé tylko předmět a obraz zaměnit

zatím $r \ldots -r$



$\sin \varphi_1 : \sin \alpha = PM : PO$

$\sin \varphi_2 : \sin \beta = P'M : P'O$

$PM : PO = P'M : P'O$

$PO : P'O = PM : P'M$

$\neq PN : P'N$

$PN = e$

$P'N = -e'$

$-r$

$$\frac{e+r}{e'-r} = -\frac{e}{e'}$$

$$1 + \frac{r}{e} = -1 + \frac{r}{e'}$$

$$-\frac{1}{e} + \frac{1}{e'} = \frac{2}{r}$$

$$\frac{1}{e} + \frac{n}{e'} = \frac{n-1}{r}$$

$$\frac{1}{\xi} + \frac{n}{\xi'} + \frac{n-1}{r} = 0$$

$$\frac{\frac{r}{n-1}}{\xi} + \frac{\frac{nr}{n-1}}{\xi'} + 1 = 0$$

$$f = \frac{r}{n-1}$$

$$f' = \frac{nr}{n-1} \qquad n = \frac{v}{v'}$$

ogólnie: $f = \dfrac{v r}{v' - v}$ $\qquad f' = \dfrac{v' r}{v' - v}$ $\qquad \dfrac{f}{f'} = \dfrac{v}{v'}$

W systemie: $\dfrac{f}{v} = \dfrac{f'}{v'} = \dfrac{f_2}{v_2} \ldots$

$$\frac{f}{f'} = \frac{f_1 \, f_2 \, f_3 \ldots}{f_1' \, f_2' \, f_3' \ldots} = \frac{v}{v'} \, \frac{v'}{v''} \ldots = \frac{v}{v_k}$$

stosunek $\frac{f}{f'}$ = stosunkowi wsp. załamania

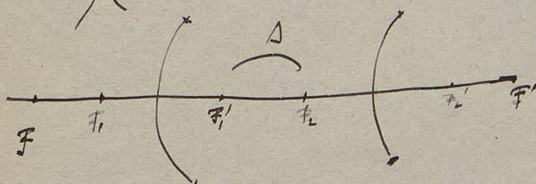
zatem w powietrzu: obie ogniskowe równe!

$$\frac{y'}{y} = 1 - \frac{e'}{f'} = \frac{f}{e}$$

$$\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = -\frac{e-f}{f'} = -\frac{e}{e'} = -\frac{f}{e'-f'}$$

$$\frac{y' \operatorname{tg} u'}{y \operatorname{tg} u} = \frac{f}{f'} = \frac{1}{n} = \frac{n}{n'}$$

zatem ogólnie $\quad n' y' \operatorname{tg} u' = \text{const}$

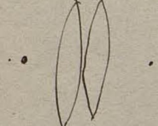


$$\frac{1}{e} + \frac{1}{e'} = \frac{n-1}{r}$$

$$F' = \frac{f_1^* f_2^*}{\Delta} = \frac{\frac{n r_1}{n-1} \cdot \frac{n r_2}{1-n}}{d - \frac{n r_1}{n-1} - \frac{n r_2}{1-n}} = -\frac{n r_1 r_2}{(n-1)\left[n(r_1 - r_2) - d(n-1)\right]}$$

$d = 0$:

$$\frac{1}{F'} = \cancel{\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}} \; (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

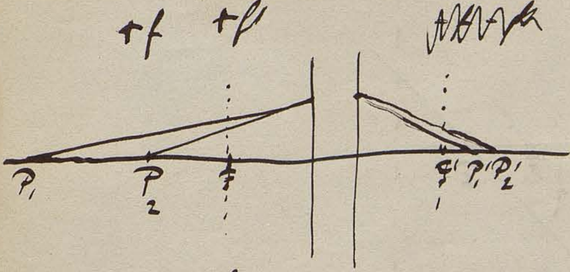


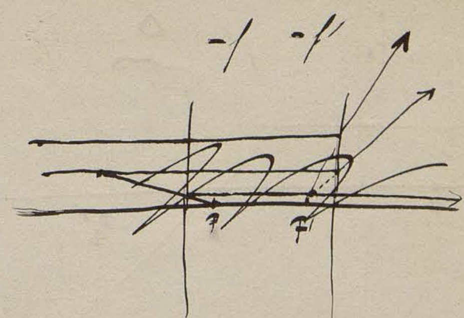
$\Delta = -(f_1 + f_2)$

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Różne rodzaje, zależnie od znaków f f'





$xx' = ff'$

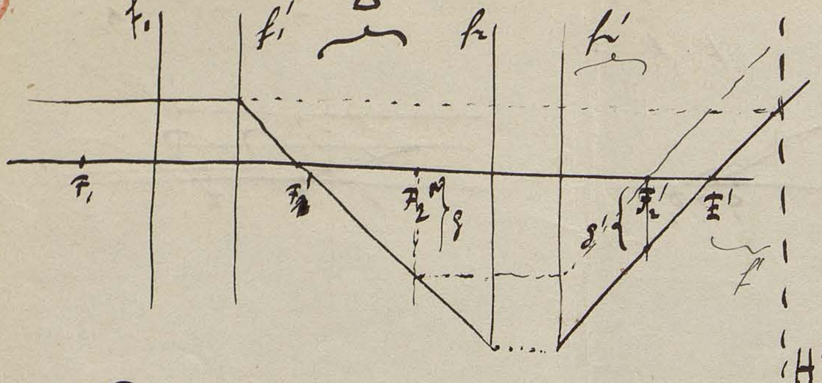
dioptryczne odm.. (przeciwieństwo)

przeciwieństwo katoptrycznym

skupiające ~~H~~ (w kierunku od H ku F)

$-f$ $+f'$ (rozpraszające w kierunku H' ku F')

(10)



$F'H' = f \qquad = f_1'$

$$w = -\frac{tg\,u_2'}{tg\,u_2} = -\frac{\cancel{F_2'F'}}{f_2'} = -\frac{f_2}{F_2'F'} = -\frac{\frac{y}{f'}}{\frac{y}{f_1'}} = -\frac{f_1'}{f'}$$

$$F_2'F' = -\cancel{\frac{\quad}{f_2}} = \cancel{\quad} \; \frac{f_2 f'}{f_1'} = \frac{f_2 f_2'}{\Delta} \qquad -\frac{f_2}{f_2 f_2'}\Delta = \frac{f_1'}{f'}$$

$$f' = \frac{f_1' f_2'}{\Delta} \qquad f' = \frac{f_1' f_2'}{\Delta}$$

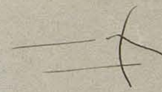
(11) i odpowiednio: $f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}$

Podobnie: $f = (-1)^{k-1}\frac{f_1 f_2 \cdots f_k}{N} \qquad f' = \frac{f_1' f_2' \cdots f_k'}{N}$

$$\frac{f}{f'} = (-1)^{k-1}\frac{f_1 f_2 \cdots f_k}{f_1' f_2' \cdots f_k'}$$

$f' = \frac{y}{tg\,u_2'} =$

I ~~...~~ przełam. na pow. kulist.



$$\frac{1}{e} + \frac{n}{e'} = \frac{n-1}{r}$$

$$f' = \frac{nr}{n-1} \qquad f'' = \frac{r}{n-1}$$

$$f = n f'$$

Stąd $\frac{ee'}{r} > 0$

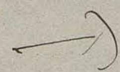
dla $n < 1$

$$\frac{1}{e} + \frac{n}{e'} = -\frac{n-1}{r}$$

jedno z nich e ujemne

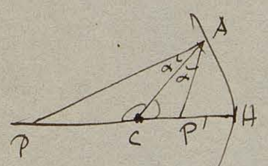
przedstawienie —

II). Odbicie



$n = -1$

$$\cancel{\frac{1}{e} + \frac{1}{(-e')} = \frac{2}{r}}$$



$$\sin\alpha : \sin\varphi = \frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|P'C|}{|P'A|}$$

$$\cancel{\frac{e + (-r)}{e}}$$

$$\frac{e-r}{r-e'} = \frac{e}{e'}$$

$$1 - \frac{r}{e} = \frac{r}{e'} - 1$$

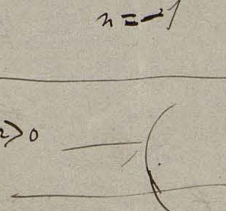
$$\frac{r}{e} + \frac{r}{e'} = 2 \qquad \frac{1}{e} + \frac{1}{e'} = \frac{2}{r}$$

albo uporządkujmy —

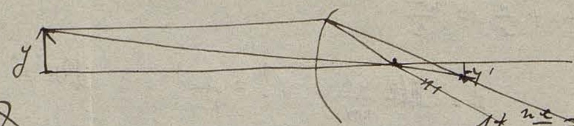
$$\frac{1}{e} - \frac{1}{e'} = -\frac{2}{r} \qquad n = -1$$

przeciwbieżne

dla $r > 0$



Powiększenie



$$1+\frac{ne}{e'} = \frac{e(n-1)}{r}$$

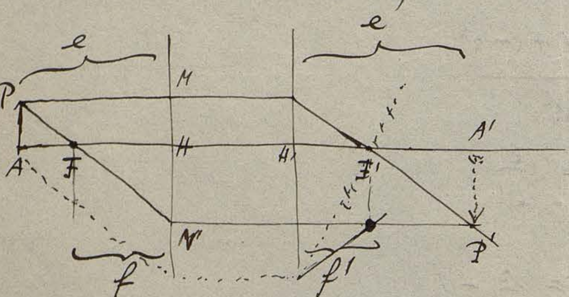
$$\frac{y}{y'} = -\frac{e+r}{e'-r} = -\frac{ne}{e'} = -\left[\frac{e(n-1)}{r}-1\right]$$

$$= 1-\frac{e(n-1)}{r}$$

$$= 1 \text{ dla } e=0$$

~~$\frac{y}{y'}=1$ dla $ne=-e'$~~

Punkty główne i ogniska wystarczą do konstrukcji



$$\frac{PA}{AF} = \frac{MN}{AH}$$

$$\frac{PA}{A'P'} = \frac{MN}{A'H'}$$

$$\frac{AF}{A'F'} = \frac{AH}{A'H'}$$

$$\frac{e-f}{f'} = \frac{e}{e'} \qquad 1-\frac{f}{e} = \frac{f'}{e'}$$

$$\frac{f}{e}+\frac{f'}{e'} = 1$$

$$\frac{e-f}{e} = \frac{f'}{e'}$$

$$\frac{f}{e} = \frac{e'-f'}{e'} \qquad \frac{e-f}{f} = \frac{f'}{e'-f'}$$

$$\overbrace{(e-f)}^{x}\overbrace{(e'-f')}^{x'} = ff'$$

zawiera wszystkie tamte wzory jako szczeg. przypadki

$f' = x x'$

$\cancel{\frac{PA}{P'A'} = \frac{y}{y'}}$

$$= -\frac{x'}{f'} =$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{P'A'}{PA} = -\frac{F'A'}{A'F'} = -\frac{e'-f'}{f'} = v = 1 - \frac{e'}{f'} = \frac{f}{e}$$

$= 1$ jinak éco

podlkem podstatné : $\frac{de'}{de}$ $\quad -\frac{f}{e^2}de - \frac{f'}{e'^2}de' = 0$

$$\frac{de'}{de} = -\frac{f}{f'}\frac{e'^2}{e^2} = \cancel{\ldots}$$

$$(e-f)(e'-f') = ff'$$

$$de(e'-f') + de'(e-f) = 0$$

$$= \cancel{-\frac{e'^2}{f'e}\left[1-\frac{f}{e}\right]}$$

$$\frac{de'}{de} = -\frac{e'-f'}{e-f}$$

$$= \cancel{\ldots}$$

$$= -\frac{e'}{e}\left[\frac{e'}{f'} - 1\right]$$

$$\frac{e'-f'}{e-f} = \frac{fe'^2}{f'e^2}$$

$$\frac{e'f'-f'^2}{e'^2} = \frac{ef-f^2}{e^2}$$

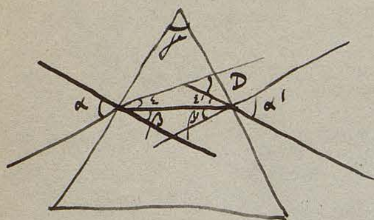
$$\frac{f'}{e'} - \frac{f}{e} = \frac{f'^2}{e'^2} - \frac{f^2}{e^2} = \left(\frac{f'}{e'} - \frac{f}{e}\right)\left(\frac{f'}{e'} + \frac{f}{e}\right)$$

$$\frac{f'}{e'} + \frac{f}{e} = 1$$

$$\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \cancel{-\frac{\frac{Y}{f'}}{\frac{Y}{e}} = -\frac{e}{f'}} - \frac{\frac{y}{f'}}{\frac{Y}{e}} = \frac{-ye}{f'Y} \qquad Y : y = e : e-f$$

$$Y = \frac{ye}{e-f}$$

$$= \frac{-ye(e-f)}{f'ye} = -\frac{e-f}{f'} = -\frac{e}{e'} = \frac{-f}{e'-f'} = -\frac{f}{x'} = -\frac{x}{f'}$$



$D = \varepsilon + \varepsilon'$

$= \alpha - \beta + \alpha' - \beta' = \alpha + \alpha' - \gamma$

$\beta + \beta' = \gamma$

$\sin\alpha = n \sin\beta$

$\sin\alpha' = n \sin\beta'$

$\sin\alpha' = n \sin(\gamma - \beta)$

~~sin D~~

$\sin(D+\gamma) = \sin\alpha \cos\alpha' + \cos\alpha \sin\alpha'$

Minim. $\frac{\partial D}{\partial \alpha} = 0$

$\cos(\alpha+\alpha') \cdot \delta(\alpha+\alpha') = 0$

$\cos\alpha \, \delta\alpha = n \cos\beta \, d\beta$

$\cos\alpha' \delta\alpha' = n \cos\beta' d\beta'$

$\delta\alpha = -\delta\alpha'$

$d\beta = -d\beta'$

$\cos\alpha \, \delta\alpha = -n \cos\beta \, d\beta' =$

$= - \cos\alpha' \, \delta\alpha' \frac{\cos\beta}{\cos\beta'} = -\delta\alpha'$

$\therefore \quad \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} = \frac{\cos\beta}{\cos\beta'}$

$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha'}{\cos\beta'} \quad \Big| \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}$

$$\alpha' = +b\,\mathrm{ctg}\,\alpha \quad \frac{\frac{d\beta}{\cos^2\beta}}{\frac{d\alpha}{\sin^2\alpha}} = b\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta}\,\frac{1}{n\cos\beta}$$

$\sin\alpha = n\sin\beta$

$\cos\alpha\, d\alpha = n\cos\beta\, d\beta$

$$= \frac{b\cos\alpha\sin\alpha}{n\cos^3\beta} = \frac{b}{n}\,\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{\cos^2\beta}{\sin\beta}\,\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}}\cos\beta = \frac{b}{n}\,\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{\mathrm{ctg}^2\beta\;\frac{1}{n^2}}\cos\beta$$

$$= b\,\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\,\mathrm{tg}\,\beta$$

np. $\alpha = 0$ $\qquad \alpha' = 0$

$a = b\,\mathrm{tg}\,\beta$

$b' = a'\,\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{b\cos^2\alpha}{n\cos^3\beta}$ $\quad\Big\|\quad$ $b' = \dfrac{b}{n}$

$a' = \dfrac{a}{n}\,\dfrac{\cos\alpha\sin\alpha}{\cos^3\beta\;\mathrm{tg}\,\beta} = \dfrac{a\,\sin\alpha\cos\alpha}{n\,\sin\beta\cos^2\beta}$

$a' = \dfrac{a\cos\alpha}{\cos^3\beta}$

$\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad a' = \lim \dfrac{b\cos\frac{\pi}{2}}{n\cos^3} = 0$

$b' = 0$

$\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

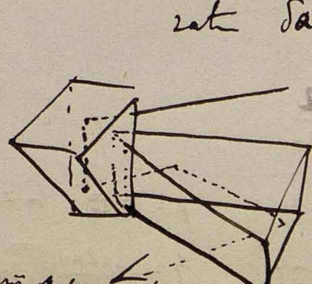
$$\delta a = a' - a = b\left[\frac{\cos\alpha}{\cos^3\beta} - \mathrm{tg}\,\beta\right] = b\left(\frac{\cos\alpha}{\cos^2\beta} - 1\right)\mathrm{tg}\,\beta$$

dla małych α $\qquad \delta a = b\,\mathrm{tg}\,\beta\left[\dfrac{1-\frac{\alpha^2}{2}}{1-\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2} - 1\right]$

$$= b\,\mathrm{tg}\,\beta\,\frac{1-\frac{\alpha^2}{2} - 1 + \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2}{1-\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2} \doteq b\,\mathrm{tg}\,\beta\left[\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{2}\right]$$

zatem δa dodatnie jeśli $n < \sqrt{2}$

Zeiss
podwójne lun.



widzi kierun na skali znaki

F | F F

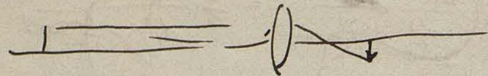
L | L L

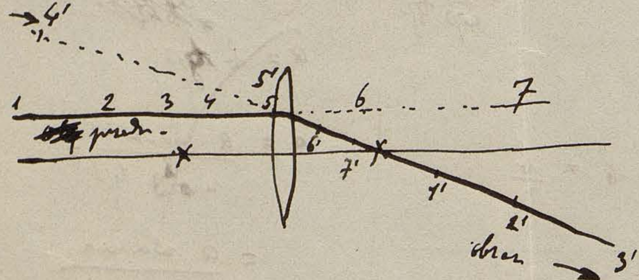
Stereoskopiczne widzenie
Distanzmesser!

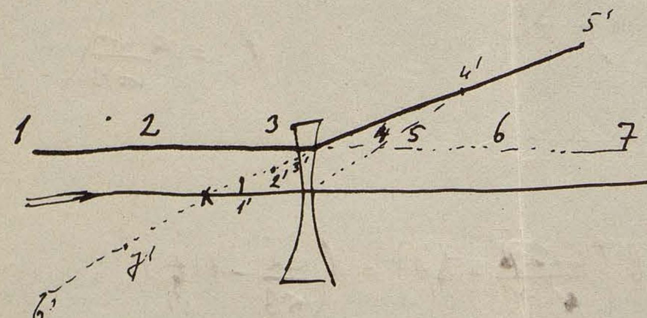
Ćwiczenia

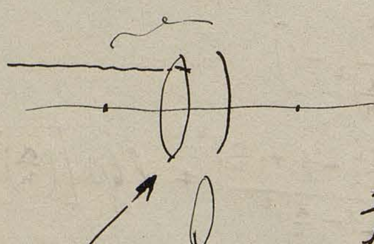
Dyskusja soczewek

Najlepsze urządzenie   przedstawienie skupiające









$$x x' = f^2$$

$$\frac{1}{f_1} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{1}{f_2} = -\frac{2}{r_2}$$

Oprawka obie identyczne

$$\frac{1}{f_2'} = \frac{2}{r_2}$$

$$= \frac{2(n-1)}{r_1} - \frac{2n}{r_2}$$

Jeśli $r_1 = r_2$ $\frac{1}{f} = -\frac{2}{r_1}$ bo 2 ...

$r_1 = -r_2$ $\frac{1}{f} = \frac{2(2n-1)}{r_1} = -\frac{1}{f'}$

$x = f - l$

$x' =$

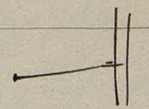
129

$(f-e)\,(f+e') = f^2$ $\qquad$ $\frac{1}{e} - \frac{1}{e'} = -\left[\frac{2(n-1)}{r_1} - \frac{2n}{r_2}\right]$

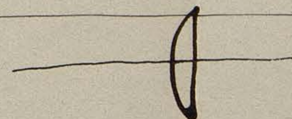
$(-e+e')f - ee' = 0$

$-\frac{1}{e'} + \frac{1}{e} = -\frac{1}{f}$

N.p. $\quad r_1 = r_2 = \infty \qquad e = -e'$

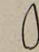


$r_2 = \infty$



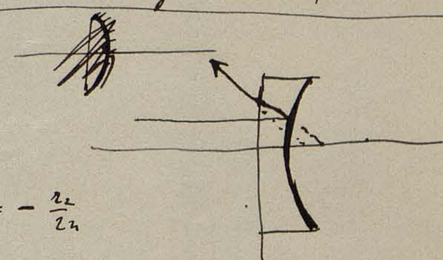
$\frac{1}{e} - \frac{1}{e'} = -\frac{2(n-1)}{r_1}$

~~...~~ tak samo jak przy ...



tylko że z lewej strony

$r_1 = \infty \qquad \frac{1}{e} - \frac{1}{e'} = \frac{2n}{r_2}$

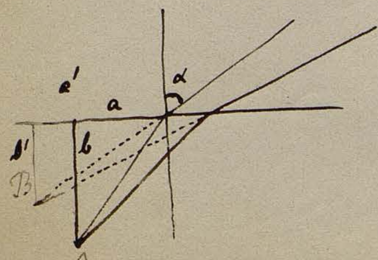


$e = \infty \qquad e' = -\frac{r_2}{2n}$

$r_1 = r_2 \qquad \frac{1}{e} - \frac{1}{e'} = \frac{2}{r}$

$r_2 = -r_1 \qquad \frac{1}{e} - \frac{1}{e'} = -\frac{2(2n-1)}{r_1}$

więc jeszcze silniejsze niż



$y = x \operatorname{ctg}\alpha$

$y = (x-\delta x)\operatorname{ctg}(\alpha-\delta\alpha)$

$\delta x = b\left[\operatorname{tg}(\beta+d\beta) - \operatorname{tg}\beta\right]$

$a' \operatorname{ctg}\alpha = (a'-\delta x)\operatorname{ctg}(\alpha-\delta\alpha)$

$a' = \frac{-\delta x \operatorname{ctg}(\alpha-\delta\alpha)}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}(\alpha-\delta\alpha)}$

$= -b \operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{\operatorname{tg}(\beta+d\beta)-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}(\alpha+\delta\alpha)-\operatorname{ctg}\alpha}$

Cauchy 1829 $n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$

130

Elektrony w przewodn. ruchome

w izolat. koło pozycji równowagi

Suma $\pm$ zero.

$$m_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = e_1 X - \underbrace{\frac{4\pi e_1^2}{\vartheta_1}}_{\alpha} \xi_1 - \underbrace{r_1 e_1^2}_{\beta} \frac{\partial \xi_1}{\partial t}$$

$$m_2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} = e X - \cdots$$

Pozycja równowagi: $X = \frac{4\pi e_1}{\vartheta_1} \xi_1$

Drgania własne: $b_1 = \tau_1^2 = \left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2$

$$u = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t} + e_1 N_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + e_2 N_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial t} + \cancel{\;}$$

$e_1 N_1 + e_2 N_2 = 0$

Jeżeli $X = \cdots \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$

$$\xi_1 = A_1 \sin \cdots + \cos$$
$$= A_1 e^{i \frac{t}{\tau}}$$

$$\xi_2 = A_2 e^{i \frac{t}{\tau}}$$

$$e_1 \xi_1 \left(\frac{4\pi}{\vartheta_1} + r_1 \frac{i}{\tau} - \frac{m_1}{e_1^2 \tau^2} \right) = X$$

$$e_1 \xi_1 = \frac{1}{4\pi} X \frac{\vartheta_1}{1 + \frac{i}{\tau} a_1 - \frac{b_1}{\tau^2}}$$

$a_1 = \frac{r_1 \vartheta_1}{4\pi}$

$b_1 = \frac{m_1 \vartheta_1}{4\pi e_1^2}$

$$u_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t} \underbrace{\left\{ 1 + \frac{\vartheta_1 N_1}{1 + \frac{i}{\tau} a_1 - \frac{b_1}{\tau^2}} + \frac{\vartheta_2 N_2}{\cdots} \right\}}_{K = f_n(\tau)!}$$

$$K_\infty = \cancel{1 + \vartheta_1} \; 1 + \underbrace{\Sigma \vartheta N}$$

$'' n^2 (1 - i\kappa)^2$

$= (\nu + i\kappa)^2$

Spółczynnik z tam strony dyspersja

W wielkiej przezroczystości $a = 0$

$$(K) = 1 + \sum \frac{\vartheta N}{1 - \left(\frac{\tau_h}{\tau}\right)^2}$$

$$\frac{1}{1-\left(\frac{\tau_v}{\tau}\right)^2} = 1 + \left(\frac{\tau_v}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{\tau_v}{\tau}\right)^4 + \cdots$$

$$\frac{1}{1-\left(\frac{\tau_c}{\tau}\right)^2} = -\left(\frac{\tau}{\tau_c}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{\tau}{\tau_c}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_c}\right)^4 + \cdots \right]$$

$$n^2 = 1 + \sum N \vartheta_v + \frac{\sum N_v \vartheta_v T_v^2}{T^2} + \cdots$$

$$- T^2 \sum \frac{N_c \vartheta_c}{T_c^2} - T^4 \sum \cdots$$

$$n^2 = -A' T^2 + A + \frac{B}{T^2} + \frac{C}{T^4}$$

$$A = 1 + \sum N_v \vartheta_v$$

$$K_\infty - A = \sum N_c \vartheta_c$$

Więc zawsze jest dyspersja normalna typu $n^2 = A + \frac{B}{T^2} + \frac{C}{T^4}$

<u>Woda</u> $A' = 0{\cdot}0128 . 10^8 . c^2$

$K_\infty - A = 77$

$\lambda_r = 0{\cdot}08$ mm

Kwarc: $n^2 = \underbrace{1 + \sum \vartheta_h}_{} + \sum \cdots$

$= b^2 + \sum \frac{M_h}{\lambda^2 - \lambda_h^2}$

~~Kw~~ Quarz $b^2 = 4{\cdot}58$

$K_{\text{quarz}} = 4{\cdot}55 - 4{\cdot}73$

$n = 2{\cdot}20$

Flusspat $\delta = 6{\cdot}09$ $K = 6{\cdot}7 - 6{\cdot}9$

NaCl $5{\cdot}18$ $5{\cdot}81 - 6{\cdot}29$

KCl $4{\cdot}55$ $4{\cdot}94$

$$(\nu + i\kappa)^2 = 1 + \Sigma \frac{\vartheta N}{i\frac{a}{\tau}}$$

$$\nu^2 + \kappa^2 = 1$$

$$2\nu\kappa = \Sigma \frac{\vartheta N}{a} \cdot \tau$$

Dla metali uzyć, również uwtorno zupełnie : ~~Absor~~ $a = 0$

$$n^2 = 1 + \Sigma \frac{N\vartheta}{1 - \left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^2} - 4\pi \Sigma \frac{m' N}{r^2 + \left(\frac{m'}{\tau}\right)^2}$$

I Natürlich aktive Körper:

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = e\left[X + f'\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)\right] - \frac{4\pi e^2}{\vartheta}\xi - r e^2 \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$f = \Sigma \frac{\vartheta_1 f_1 N_1}{1 - \left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^2} :$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[K X + f\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)\right] = c^2 \Delta X \quad \text{etc.}$$ } Drehung d. Pol. Ebene

Dyspersya dalej. –

$$\delta = \frac{k}{\lambda^2} f \qquad k = \text{stała}$$

Biot Drehung $\delta = \frac{k_1}{\lambda^2} + \frac{k_2}{\lambda^4} + \dots$

---

anomale Rot. Disp. $\tau \lessgtr \tau_1$

II. Hall Effekt

$$m\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = eX - \frac{4\pi e^2}{\vartheta}\xi - r e^2\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{e}{c}\left[\frac{\partial \eta}{\partial t} N - \frac{\partial \zeta}{\partial t} M\right]$$

1). Dający obrót płaszcz. polar.

2). dyspersyę

3). Macaluso, Corbino: ogromne skręt. gdy blisko absorpcji

4). jedno pasmo absorp. rozpada się w $\frac{2}{3}$ w M (Zeeman)

Metalle w polu magn. przeskakiwanie ...

III Molecularström

1). obrót pł. pol. kołowy : w żelazie rozżarzonym dla światła czerwonego: $\lambda = 0{\cdot}64\,\mu$

1 cm grubości . $\delta = 200\,000°$

2). Kerr pł. pol. w pł. upadania i odbicia!

dla światła żółtego:

	$n = ck$
Ag	0·18
Au	0·37
Pt	2·06
Cu	0·64
stal	2·41
Hg	1·73

Rubens i Hagen R

$\lambda =$	0·45	0·5	0·55	0·6	0·65	0·7
Au	36·8	47·3	73·7	83·6	88·2	92·3
Cu	48·8	53·3	59·5	83·5	89·0	90·7
Pt	55·8	58·4	61·1	64·2	66·3	70·7
Ag	90·6	91·8	92·5	93·0	93·6	94·6

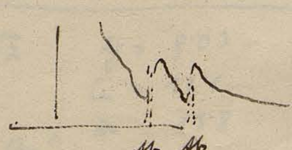
$\lambda = 10\mu$

zwyczajny sposób załamania $ck = \frac{c}{2}\sqrt{\cancel{\lambda\tau}} = c\sqrt{\frac{\tau}{\sigma}} = \cancel{c}\sqrt{\frac{\lambda c}{\sigma}}$

$$\frac{10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{\cancel{3} \cdot 10^{5}} = \sqrt{318} = 17$$

więc dyspersja byłaby:
wszędzie anormalna

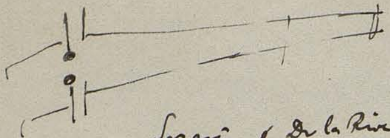
Anormalna dyspersja jodu, fuksyny, etc.



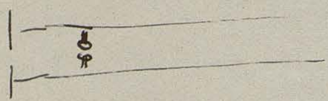
więc związek abs. silnej z dysp. anorm.

Własne drgania elektronów

pole vzdluž drátů



Sarasin & De la Rive



multiple Resonanz

133

Opór właściwy

$$\text{rtęć}\ 0^\circ \left\{ \begin{array}{l} 106{\cdot}0\ cm \\ 1\ mm^2 \end{array} \right. = 1\ \Omega = 10^9\ em = \frac{1}{9}\cdot 10^{-11}\ est$$

0253059
0·9746941
94339

$$w = \frac{\varepsilon}{v}$$

$$1\ cm^3 = \frac{1}{10^4 \cdot 1{\cdot}06}\ \Omega = 0{\cdot}94 \cdot 10^{-4}\ \Omega = \underline{0{\cdot}94 \cdot 10^5\ em} = 0{\cdot}1044 \cdot 10^{-15}$$

$$= 1{\cdot}044 \cdot 10^{-16}$$

$$\lambda_{Hg} = 1{\cdot}06 \cdot 10^{-5}\ em$$

$$= 0{\cdot}954 \cdot 10^{16}\ est$$

$$\tau_{10\mu} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{0{\cdot}001} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-13}$$

$$\lambda\tau_{Hg, 10\mu} = 0{\cdot}318 \cdot 10^3 = 318$$

Electrolity mniej więcej λ rzędu 10_{-5} Hg

$\lambda\tau_{1\mu} =$ 0·00031 i odnośnie wpływu więc dyspersja etc w nich nie można już uwzgl.

$$\lambda\tau_{12\mu} = 318 \cdot 1{\cdot}2 \quad \begin{array}{r} 636 \\ \hline 381{\cdot}6 \end{array}$$

$$\frac{1}{\sqrt{381}} =$$

2·58161
1·2908
0·7092 −2 = 0·0512

dla platyny $\lambda\tau_{12\mu} = 382 \cdot 6{\cdot}5$

2·58161
81 29
3·3945
0·6055 −4
0·3027 −2

0·0201

$$R = 1 - 0{\cdot}0402 = 0{\cdot}96$$

obserw. 0·965

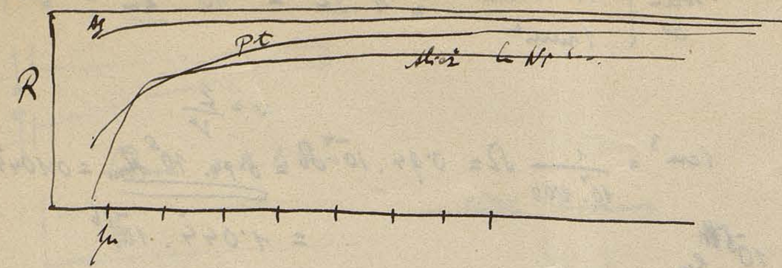
$(100-R)\sqrt{\lambda}$

12μ	Ag	=	9·03
	Cu	=	12·1
	Au	=	13·8
	Pt	=	10·6
	Ni	=	12·0
	Stal	=	11·0
			str.

Albo Ti

100 − R

bab	bez
1·15	1·3
1·6	1·4
2·1	1·6
3·5	3·4
4·1	3·5
4·9	4·6



Druga metoda emisyjna.

Prawo Kirchhoffa

ciała ogrzane przy dł. fali 170°

Flusspat Reststrahlen $\lambda = \cancel{24\mu}\ 25{\cdot}5\mu$

	[illegible] ber.	obs.
Ag	1·15	1·13
Cu	1·27	1·17
Au	1·39	1·56
Zn	2·27	2·27
Pt	2·96	2·82
Sn	3·23	3·27
Hg	7·55	7·66
Bi	~~10·09~~	~~256~~

Tak samo [illegible]

Pt w różnych temperaturach

	[illegible] obl.	[illegible]
t = 170	6·8	6·6
300	14·8	15·7
900	78·9	79·6
1500	191	189·5

N. p. $R_s = E_s \frac{\cancel{\operatorname{tg}}(\beta-\alpha)}{\cancel{\operatorname{tg}}(\beta+\alpha)} = E_s \frac{\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha}{+}$

$$= \cancel{A + iB} = M e^{iN}$$

$a \sin \alpha t$	$a e^{i\alpha t}$
$- a \sin \alpha t = a \sin(\alpha t + \pi)$	
$(-1)^2 a \sin\alpha t = a \sin(\alpha t + 2\pi)$	
$\cdots$	
$(-1)^n a \sin \alpha t = a \sin(\alpha t + n\pi)$	
$(-1)^{\frac{1}{2}} a \sin\alpha t = a \sin(\alpha t + \frac{\pi}{2})$	
$i\, a \sin \alpha t = a \sin(\alpha t + \frac{\pi}{2}) = a \cos\alpha t$	

$\cancel{(A+iB)\sin\alpha t =}$ $\underbrace{M e^{iN}}$ $= M(\cos N + i \sin N)$

$$M e^{iN} \sin\alpha t = M(\cos N \sin\alpha t + \sin N \cos\alpha t) = M \sin(\alpha t + N)$$

więc urojona amplituda formy $M e^{iN}$ oznacza wszystko to drganie z amplitudą M i różnicą fazy N

Jeśli teraz wpada światło takie że $E_s = E_n$, to R_s i R_n będą równe co do ampl. i co do fazy: światło eliptycznie polaryzowane (M + iN)

Dla incydencji prostopadłej: $\frac{R}{E} = \frac{n-1}{n+1} = \frac{c(\nu - ik) - 1}{c(\nu - ik) + 1} = \frac{\cancel{M e^{iN}}}{E}$

$$\cancel{\frac{c(\nu + ik) - 1}{c(\nu + ik) + 1}} = \cancel{\frac{M e^{-iN}}{E}}$$

$$\frac{M^2 + N^2}{E^2} = \frac{(c\nu - 1)^2 + c^2k^2}{(c\nu + 1)^2 + c^2k^2} = \frac{(\sqrt{\lambda\tau} - 1)^2 + \lambda\tau}{(\sqrt{\lambda\tau} + 1)^2 + \lambda\tau} \neq 1$$
$$\neq 1 - \frac{2}{\sqrt{\lambda\tau}}$$

("Metallglanz"
w optycznej części zależności od barwy
złoto, miedź, complement. do przep.)

fur bei $c\nu = c\kappa \gg 1$

$i\frac{1}{v} = \beta$

elastiność tłumienie!

K $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 4\pi\lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = c^2 \nabla^2 \varphi$

$$Y = a\, e^{\alpha(it - \beta x)} \qquad \beta = \kappa + i\nu$$

$$a\, e^{i\alpha(t - \frac{x}{v})}$$

$$Y = a \sin \alpha\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$-\alpha^2 + \alpha i\, 4\pi\lambda = c^2\beta^2\alpha^2$$

$$= c^2\alpha^2(\kappa^2 - \nu^2 + 2i\kappa\nu)$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{\tau}$$

$$c^2(\kappa^2 - \nu^2) = -1$$

$$c^2\kappa\nu = \frac{2\pi\lambda}{\alpha} = \lambda\tau$$

K zachować! Cohn Phys 7 1. 619 (1903)

$$\kappa^2 - \left(\frac{\lambda\tau}{c^2\kappa}\right)^2 = -\frac{1}{c^2}$$

$$\kappa^4 + \frac{\kappa^2}{c^2} = \frac{\lambda^2\tau^2}{c^4}$$

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2c^2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2\tau^2}{c^4} + \frac{1}{4c^4}} = \frac{1}{2c^2}\left[-1 + \sqrt{1 + 4\lambda^2\tau^2}\right]$$

$$\nu^2 = \frac{1}{2c^2}\left[+1 + \sqrt{1 + 4\lambda^2\tau^2}\right]$$

Dla długich λ, tak że $\lambda\tau \gg 1$:

$$\kappa^2 = \nu^2 = \frac{\lambda\tau}{c^2}$$

$$Y = a\, e^{\alpha[i(t - \nu x) - \kappa x]} = a\, e^{-\alpha\kappa x}\, e^{\alpha i (t - \nu x)}$$

$$Y = e^{-\alpha\kappa x} \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} \alpha(t - \nu x)$$

Można użyć dawniejszych wzorów R D = ...

zważywszy że $\sin\varphi = \frac{\sin i}{n} = \cancel{\ldots}$

$$n = \frac{c}{v} = \frac{c}{i}\beta = c\,\frac{\kappa + i\nu}{i} = c(\nu - i\kappa)$$

Otrzyma się amplitudy urojone!

Metalle Mc. Cullagh 1834
Cauchy

$\beta = \frac{1}{v}$

$$\underset{(c^2)}{K}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \nabla^2\varphi$$

$$\varphi = a\,e^{i\alpha(t-\beta x)} \qquad \beta = \kappa + i\nu$$

(K wyraz. rzecz.)

$$-K\alpha^2 + 4\pi\lambda i\alpha = -\alpha^2\beta^2$$

$$= -\alpha^2(\kappa^2 - \nu^2 + 2i\kappa\nu)$$

$$K = \kappa^2 - \nu^2$$

$$\frac{4\pi\lambda}{\alpha} = -2\kappa\nu$$

$$= 2\lambda\tau$$

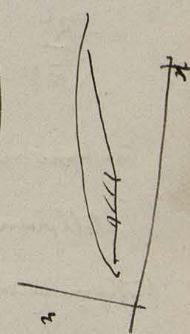
$$\kappa^2 - \left(\frac{\lambda\tau}{\kappa}\right)^2 = K$$

$$\kappa^4 - K\kappa^2 = \lambda^2\tau^2$$

$$\kappa^2 = \frac{K}{2} \pm \sqrt{\lambda^2\tau^2 + \frac{K^2}{4}}$$

$$\kappa^2 = \frac{K}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\lambda^2\tau^2}{K^2}}\right]$$

$$\nu^2 = \frac{K}{2}\left[-1 + \sqrt{}\right]$$



Naturalnie $\kappa \pm$, $\nu \pm$

---

dla długich τ: $\kappa^2 = \nu^2 = \lambda\tau$

$$\varphi = a\,e^{\alpha i[t-(\kappa+i\nu)x]} = a\,e^{i(\alpha t - \kappa x)}\,e^{-\nu\alpha x}$$

$$\varphi = e^{-\alpha\nu x}\,\underset{\cos}{\sin}\,\alpha(t-\kappa x)$$

Rtęć: $\lambda = 1{\cdot}06.10^{-5}$ $\qquad \tau_{10\mu} = \frac{0{\cdot}001}{3.10^{10}} = \frac{1}{3}.10^{-13}$

$$\frac{\lambda\tau c^2}{K} = \frac{\frac{1}{3}.10^{-18}.9.10^{20}}{K} = \frac{3.100}{K}$$

$$n = c\beta = c(\kappa + i\nu)$$

$$\sin\psi = \frac{\sin\varphi}{n} = \frac{\sin\varphi}{c(\kappa+i\nu)} =$$

wszystko spółczynnik Tammanna:

$n = \underline{\underline{c\kappa}}$ zależny silnie od τ

dyspersja

otóż krzywa $n = f(\lambda)$ byłaby: anomalna.

przezroczyste listki Au 10^{-4} mm

Absorpcja $\alpha\nu = \frac{2\pi}{\tau} = \cancel{\frac{2\pi}{6} = 6.10^{-5}}$

$$= \frac{10^{-9}}{\sqrt{3}}.6.3.10^{13} = 10^5$$

t. zn. że już na grubości $x = 1\mu = 10^{-4}$ natężenie spadnie na $\frac{1}{e^{10}}$

Pod kątem ⊥ $\frac{B}{A} = \frac{n-1}{n+1} = \frac{c(K+i\nu)-1}{c(K+i\nu)+1} = \frac{(cK-1)+i\nu c}{(cK+1)+i\nu c} = \frac{B_0 e^{i\delta}}{A}$

$$\frac{B_0^2}{A^2} = \frac{(cK-1)^2+\nu^2c^2}{(cK+1)^2+\nu^2c^2} \neq \frac{1-\frac{1}{cK}}{1+\frac{1}{cK}} = 1-\frac{2}{cK} = 1-\frac{2}{c\sqrt{\lambda\tau}}$$

Rtęć: $\tau_{10\mu}$: $\sqrt{\lambda\tau c} = \sqrt{300}$

$$\frac{R^2}{E^2} = 1-\frac{2}{\sqrt{300}} = 1-\frac{2}{17} = 1-12\%$$

tem lepsze zwierciadło czem dłuższe τ

Metale dobre

Najlepsze zwierc. Ag: $\frac{1}{\sigma} = 5\cdot 8.10^{-4}$ $\quad 1-\frac{2}{3.10^{10}\sqrt{2.10^{-17}}} = 1-\frac{2}{3.\sqrt{20}.10}$

$\tau_{10\mu} = \frac{10^{-13}}{3}$ $\quad = 1-\frac{2}{3.44} = 1-1{,}4\%$

Ogólnie pod kątem

$E_p - E_s$

$$\frac{R_p}{R_s} = -\frac{\cos(\varphi+\chi)}{\cos(\varphi-\chi)} = R_0 e^{i\Delta}$$

$$\sin\chi = \frac{\sin\varphi}{c(K+i\nu)}$$

$$\frac{1+R_0e^{i\Delta}}{1-R_0e^{i\Delta}} = \frac{\sin\varphi\sin\chi}{\cos\varphi\cos\chi} = \frac{\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}}$$

dla $\varphi=0$: $\Delta=0$

$\rho=-1$

$\varphi=\frac{\pi}{2}$: $\Delta=0$ $\quad e^{i\Delta}=i$ $\quad /\varphi=\frac{\pi}{2}/$ dla Hauptinfallwinkel

$\rho=+1$

$\cancel{e}\ \alpha i(t-(\kappa - i\nu)x) \qquad e^{-\nu x}\cos\alpha(t-\kappa x)$

$\frac{\nu^2}{\kappa^2} = \frac{\lambda\tau}{c^2} \qquad n = \frac{c}{v} = c(\kappa - i\nu)$

$$\frac{c(\kappa-i\nu)-1}{c(\kappa-i\nu)+1} = \frac{c\kappa-1-c\nu i}{c\kappa+1-c\nu i} = \frac{(c^2\kappa^2-1)+c^2\nu^2-2c\nu i}{(c\kappa+1)^2+c^2\nu^2}$$

$[(c\kappa-1)-c\nu i][(c\kappa+1)+c\nu i]$

$c^4\kappa^4 - 2c^2\kappa^2 + 1 + c^4\nu^4 + 2c^2\nu^2(c^2\kappa^2-1) + 4c^2\nu^2$

$$\frac{(c^2\kappa^2-1)+c^2\nu^2}{c^2\kappa^2+1+c^2\nu^2+2c\kappa}$$

$$\frac{\cancel{4c^4\kappa^4+}}{\cancel{2c^4\kappa^4+c^4\kappa^4}\ [2c^2\kappa^2+2c\kappa+1]^2} = \frac{\cancel{c^4\kappa^4}}{} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{c\kappa}+\frac{1}{2c^2\kappa^2}\right)^2}$$

$$= 1 - \frac{2}{c\kappa}$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{\lambda\tau}}$$

$a \sin\varphi$

$-a\sin\varphi = a\sin(\varphi+\pi)$

$(-1)^k \sin\varphi = a\sin(\varphi+k\pi)$

$a\, i \sin\varphi = a\sin(\varphi+\frac{\pi}{2}) = a\cos\varphi$

$(M+iN)\sin\varphi = M\sin\varphi + N\cos\varphi = A\sin(\varphi+\delta) = \sqrt{M^2+N^2}\sin(\varphi+\operatorname{arctg}\frac{N}{M})$

$M = A\cos\delta$

$N = A\sin\delta$

$\operatorname{tg}\delta = \frac{N}{M}$

$a^2\alpha^2\lambda = a^2 v \alpha$

$$E_n^2 = E_n'^2 + E_n''^2 \frac{\sin i \cos \beta}{\cos i \sin \beta}$$

$$E_n^2 - E_n'^2 = E_n''^2 \frac{\sin i \cos \beta}{\cos i \sin \beta}$$

Fresnel 1821

$$E_n + E_n' = E_n'' \frac{\sin i}{\sin \beta}$$

$$E_n - E_n' = E_n'' \frac{\cos \beta}{\cos i}$$

$$\cancel{E} = E_n'' \sqrt{\cancel{\frac{\sin i \cos i \cos\beta}{\sin\beta \cos i}}}$$

$$E_n^2 = E_n'^2 + \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{\cos \beta}{\cos i} E_n''^2 \cdot \frac{d}{d'}$$

Neumann:

$$E_n^2 = E_n'^2 + \frac{\sin\beta \cos\beta}{\sin i \cos i} E_n''^2$$

$$E_p + E_p' = E_n' \frac{\cos\beta}{\cos i}$$

$$E_p - E_p' = E_n' \frac{\sin 2\beta \cos i}{\sin 2i \cos\beta} = E_n'' \frac{\sin i}{\sin\beta}$$

$$E_p + E_p' = (E_p - E_p') \frac{\cos\beta}{\cos i} \frac{\sin\beta}{\sin i} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2i}$$

$$E_p' = E_p \sin 2i$$

Warstwy przejściowe z cieczy do pary cieczy!

Grubości ich z teoryi kinetycznej. Zmiana gęstości analogiczna do gęstości atmosfery ziemskiej $e^{-\alpha z}$ ... w związku z stałą włoskowatości? ?

Doświadczalny sposób mierzenia z współczynnika polaryzacyi eliptycznej porówn. Ellipt. Polar. durch Oberflächenschichten Winkeln. p. 702 – 770

Jamin Ann chim phys (1850) 31 p. 165 dla rozmaitych cieczy ale w powietrzu, Rayleigh Phil Mag. 30 p 386 (1890), 33 p. 1 (1892) dla wody.

Ham. Pr.

δ = Var. dla punktów o tem samem t

AC

$$\int (L-U)\,dt$$
$$\underbrace{}_{H}$$

$$\int_{CD} - \int_{AB} H\,dt = H_B \,\Delta t_1 + \int_{t_0}^{t_1} \delta H \, dt \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot p}\right) = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\underbrace{\sum\left(\frac{\partial H}{\partial p}\,\delta p + \frac{\partial H}{\partial \dot p}\,\delta \dot p\right)}$$

$$\cancel{\Delta p_D} = \delta p_D + \dot p_B \,\Delta t_1$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot p}\,\delta p\right)$$

$$= H_B\,\Delta t_1 + \sum \frac{\partial H}{\partial \dot p}\,\delta p \Big|_A^D = H_B\,\Delta t_1 + \cancel{\sum \frac{\partial H}{\partial \dot p}\,\Delta p_B} - \sum \frac{\partial H}{\partial \dot p}\,\dot p_B\,\Delta t_1$$

$$\sum \dot p \frac{\partial H}{\partial \dot p} - H = C$$

$$\int_{CD} - \int_{AB} \Big(\sum \dot p \frac{\partial H}{\partial \dot p}\Big)\,dt = \underbrace{\underbrace{\int_{CD} - \int_{AB} C\,dt}_{C\,\Delta t_1} + \underbrace{\int_{CD} - \int_{AB} H\,dt}_{H_B\,\Delta t_1 - \sum \frac{\partial H}{\partial \dot p}\,\dot p_B\,\Delta t_1}}_{!}$$

(wiąz $\Delta p_B = 0$)

$$= \sum \frac{\partial H}{\partial \dot p}\,\dot p_B\,\Delta t_1 \qquad = 0$$

więc w Ham. czasy wyjścia i przyjścia te same, zwartość δp ; $\delta \dot p$ dowolne

w zas. — " " te same ale nie t_1

$\delta \dot p$ tak dobrane że zas. en. spełniona

N. p. punkt na powierzchni bez sił

$$\delta \int T\,dt = 0 \qquad \delta \int \frac{mc^2}{2}\,dt = 0 \;\underset{c=\text{const}}{=}\; \frac{mc^2}{2}\,\delta\int dt = \frac{mc^2}{2}\,\frac{s_1 - s_2}{c} = \frac{mc}{2}\,\delta\int ds = 0$$

$\int ds$ = Minim. / Max. $\}$ Krzywa geodetyczna N. p. Kula

wszystko kanonicznie wyprowadzić

$$10\,\frac{m}{sec} = 864000\,\frac{m}{d} = 864\,\frac{km}{d} = \frac{2\pi}{7d}$$

1000 km

$$= (10^6)^4 \pi \cdot 10.$$

$$\frac{\dfrac{10^{27}\pi}{7}}{10^{30}\cancel{\pi}\cdot(6\cdot3)^5\cdot\frac{8}{15}\cdot 5\cdot6} = 10^{-3}\cdot\frac{.15}{(6\cdot3)^4\cdot 6^2\cdot 8\cdot\cancel{7}\,4} = 10^{-3}\cdot\frac{1}{\cancel{(40)^2}\ 1600}\,\frac{1}{140}$$

$$= \frac{1}{2}\,10^{-8}$$

Kot

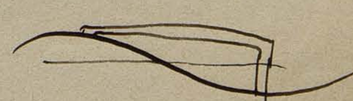
zmiana ogrzewania

zestrzelenie śniegu

$$K\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = R\,a = \frac{K}{a}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$
$$M\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = Mg\sin\varphi - R$$

Chandler 427 — 305 ; 4·5 m ; ...

$h = 5$ km $v = 200$ km



$$q\rho\frac{\lambda}{2}\frac{d^2z}{dt^2} = -\rho g\,x\,q$$

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{\lambda}{2g}}$$

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{1}{\pi}\sqrt{2\lambda g}$$

dla fal długich $v = \sqrt{gh}$

$\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$

million lidí = 10^8 kg

$10,000$ tun = 10^7 kg

1 km² = 10^{10} kg

$(2000 \text{ km})^2 = 4 . 10^{16}$ kg

$(1000 \text{ km})^2$ $\quad 4 . 10^{22}$ kg $. \frac{1}{10}$

~~10^5 ω = 10 . 10^5~~

~~ω = 1~~

10^{21} : $\frac{4}{3}\pi . (6{\cdot}3)^3 . 10^{21} . 5{\cdot}6 . 10^{12}$

10^{-14}

$10 \frac{m}{sec} \cdot 86400 = 10^6$

λ = 35 m $\quad$ τ = 5 sec $\quad$ h = 2 m $\quad$ fale morske

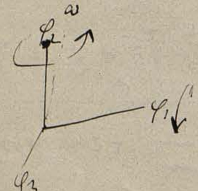
---

I). N = compl. = $8\pi\mu a^3 \omega_0$ $\quad$ μ pocatecni$_{0^0}$ $\quad 0{\cdot}000171$ $\quad$ zachovani rucho obrotowego

(no rok 10^{-17} sec)

$\frac{d}{dt}\left(K_x \frac{d\varphi}{dt}\right) = M_x$

... Ellipsoida



$\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ $\quad \rho^2 = A$

$K_{x_1} \dot\varphi_1 - \cancel{K'_{x_2} \dot\varphi_2} = \int M_x dt$

$K'_y \dot\varphi_2$ = const =

$K_2 \dot\varphi_3$ = 0

$\omega K_{\varphi_1} \sin\varphi = \int M_x dt$ $\quad$ = $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\dot\varphi_1}{\dot\varphi_2} = K\int x\,dt$

ω = $\quad \sin\varphi = \frac{\int M_x dt}{K\,\omega}$

140

$x = a(1 - e^{-\alpha t})$

$y = -ct + b(1 - e^{-\alpha t})$

$t = -\frac{y}{c} + \frac{bx}{ac}$

$\frac{dx}{dt} = a\alpha e^{-\alpha t}$

$\frac{dy}{dt} = -c + b\alpha e^{-\alpha t}$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\alpha^2 e^{-\alpha\left(-\frac{y}{c} + \frac{bx}{ac}\right)}$

$\frac{d^2y}{dt^2} =$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\alpha^2 e^{-\alpha t} = -\alpha \frac{dx}{dt}$

$\frac{d^2y}{dt^2} = -b\alpha^2 e^{-\alpha t} = -\alpha \frac{dy}{dt} - c\alpha$

141

Lebey $\frac{\delta}{\nu} = 0.05 - 0.005$ dla Resonatorów kulistych

Hartmann 0.0007 dla widełek stroikowych

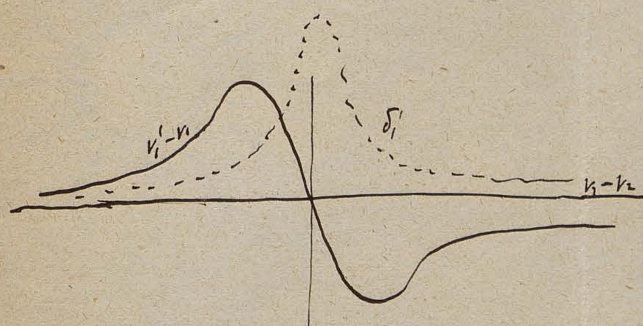
Jeżeli $\vartheta_1 \vartheta_2 \nu^2 < (\delta_1 - \delta_2)^2$

$R = i R'$ więc dwa drgania o jednakowej częstości $\nu' = \nu\sqrt{1 - \frac{\vartheta_1\vartheta_2}{4}}$

ale różnym usuwaniu $\left.\begin{matrix}\delta_1' \\ \delta_2'\end{matrix}\right\} = \frac{\delta_1+\delta_2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\delta_1-\delta_2)^2 - \vartheta_1\vartheta_2\nu^2}$

$\neq \delta_1 - \frac{\vartheta_1\vartheta_2\nu^2}{4(\delta_1-\delta_2)}$

$\delta_2 + \frac{\vartheta_1\vartheta_2\nu^2}{4(\delta_1-\delta_2)}$



$\lim \frac{\delta_1}{\delta_2} = 0$

takie ogólnie ~~...~~ zbocza (?) ... współczynnik usuwania do siebie, ale oddala częstości obydwu systemów

---

W. D. 512 $n_1 =$	[c_1]	Reson. $n_2 =$ ~~...~~ $< \frac{4}{5}$		Hilbertowska dane	podrywanie $\nu_1' = n_1 + \downarrow$
		c_6	$\frac{4}{5}$	80	0·011
		ais		60	0·017
		bo		30	0·033
~~...~~		496		20	0·071
		c_1		10	0
		528		18	−0·071
		cis_1		22	58
		d_1		45	36
		dis_1		70	17

$$y_1 = a_1 \cos\varphi_1$$

$$y_2 = a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2 \qquad x_2 = a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2$$

$$T = \frac{m_1}{2} a_1^2 \dot\varphi_1^2 + \frac{m_2}{2}\left\{\left[a_1 \cos\varphi_1\, \dot\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2\, \dot\varphi_2\right]^2 + \left[a_1 \sin\varphi_1\, \dot\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2\, \dot\varphi_2\right]^2\right\}$$

$$T = \frac{m_1}{2} a_1^2 \dot\varphi_1^2 + \frac{m_2}{2}\left[a_1 \dot\varphi_1 + a_2 \dot\varphi_2\right]^2$$

$$U = m_1 g \frac{a_1 \varphi_1^2}{2} + \frac{m_2 g}{2}\left[a_1 \varphi_1^2 + a_2 \varphi_2^2\right]$$

$$m_1 a_1^2 \ddot\varphi_1 + m_2\left[a_1^2 \ddot\varphi_1 + a_1 a_2 \ddot\varphi_2\right] = g\left[m_1 a_1 \varphi_1 + m_2(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2)\right] + \rho\left[m_1 a_1 \dot\varphi_1 + m_2 a_2 \dot\varphi_2 \dots\right]$$

$$\overset{m_2}{m_1}\, a_2\left[a_1 \ddot\varphi_1 + a_2 \ddot\varphi_2\right] = m_2 g\, a_2 \varphi_2$$

$$\cancel{F = \alpha \frac{m_1}{2} a_1^2 \dot\varphi_1^2}$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 2\delta_1 \frac{dx_1}{dt} + n_1^2 x_1 + n_1^2 \vartheta_1 x_2 = 0$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + 2\delta_2 \frac{dx_2}{dt} + n_2^2 x_2 + n_1^2 \vartheta_2 x_1 = 0$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 2(\delta_1 + \delta_2)\frac{d^3x}{dt^3} + (n_1^2 + n_2^2 + 4\delta_1\delta_2)\frac{d^2x}{dt^2} + 2(\delta_2 n_1^2 + \delta_1 n_2^2)\frac{dx}{dt} + n_1^2 n_2^2 (1 - \vartheta_1\vartheta_2)x = 0$$

$$x = e^{\mu t}$$

posti $n_1 = n_2$:

$$\mu^4 + 2(\delta_1 + \delta_2)\mu^3 + 2(n^2 + 2\delta_1\delta_2)\mu^2 + 2n^2(\delta_1 + \delta_2)\mu + n^4(1 - \vartheta_1\vartheta_2) = 0$$

$$\mu = -\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + \mu'$$

$$\left.\begin{matrix}\mu_1 \\ \mu_2\end{matrix}\right\} = -\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \pm i(\varphi + R) \qquad \varphi = \sqrt{\nu^2 + \left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right)^2 - \frac{\vartheta_1\vartheta_2\nu^4 - \nu^2(\delta_1 - \delta_2)^2}{4\nu^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2}} = \nu\sqrt{1 - \frac{\vartheta_1\vartheta_2}{4}}$$

$$\left.\begin{matrix}\mu_3 \\ \mu_4\end{matrix}\right\} -\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \pm i(\varphi - R) \qquad R = \sqrt{\frac{\vartheta_1\vartheta_2\nu^4 - \nu^2(\delta_1 - \delta_2)^2}{4\nu^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2}} = \sqrt{\frac{\vartheta_1\vartheta_2\nu^2 - (\delta_1 - \delta_2)^2}{4}}$$

$$A' = \frac{-(n_1^2-n_2^2) + \sqrt{(n_1^2-n_2^2)^2 + 4n_1^2n_2^2\vartheta_1\vartheta_2}}{2n_1^2\vartheta_1}\,A$$

$$B' = \frac{-\cdots - \sqrt{}}{\cdots}\,B$$

α). Juil $n_1^2 - n_2^2 > 4n_1^2n_2^2\vartheta_1\vartheta_2$

$$\alpha_1 = -\tfrac{1}{2}(n_1^2+n_2^2)\left\{1 \pm \left[1 - \frac{2n_1^2n_2^2(1-\vartheta_1\vartheta_2)}{(n_1^2+n_2^2)^2}\right]\right\}$$

$$\alpha_1 = n_1\left[1 + \frac{n_2^2\vartheta_1\vartheta_2}{2(n_1^2-n_2^2)}\right] \qquad \alpha_2 = n_2\left[1 - \frac{n_1^2\vartheta_1\vartheta_2}{2(n_1^2-n_2^2)}\right]$$

β). $n_1 = n_2$

$$\alpha_1 = n\sqrt{1+\underbrace{\sqrt{\vartheta_1\vartheta_2}}_{\vartheta}} \qquad \alpha_2 = n\sqrt{1-\underbrace{\sqrt{\vartheta_1\vartheta_2}}_{\vartheta}}$$

$$x_1 = A\sin(nt\sqrt{1+\vartheta}+\varphi) + B\sin(nt\sqrt{1-\vartheta}+\psi)$$

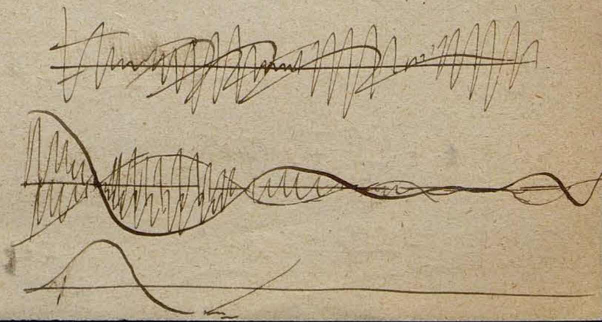
$$x_2 = A\sqrt{\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}}\sin(\qquad) - B\sqrt{\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}}\sin(\qquad)$$

Juil $A = B$ ϑ [illegible]

$$\alpha_1 = n\left(1+\frac{\vartheta}{2}\right) \qquad \alpha_2 = n\left(1-\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$x_1 = 2\cos\left(\frac{nt\vartheta}{2} + \frac{\varphi-\psi}{2}\right)\sin\left(nt + \frac{\varphi+\psi}{2}\right)$$

$$x_2 = -\sin \qquad \cos$$



Gdyby osobno każde drgało

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 2\delta_1\frac{dx_1}{dt} + n_1^2 x_1 = 0$$

$\rho\ \sigma\ \vartheta$ współczynniki powiązania [Koppelungscoeff]

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + 2\delta_2\frac{dx_2}{dt} + n_2^2 x_2 = 0$$

Dwa razy zróżniczkować: 6 równań z których wyrugować x_2 $\dot{x}_2$ $\ddot{x}_2$ $\dddot{x}_2$ $\ddddot{x}_2$

wtedy powstanie liniowe równanie 4 rzędu

$$x = A_1 e^{\mu_1 t} + B e^{\mu_2 t} + C e^{\mu_3 t} + D e^{\mu_4 t}$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = -\delta_1' \pm i\nu_1' \qquad \frac{\mu_3}{\mu_4}$$

$$x_1 = A_1 e^{-\delta_1' t}\sin(\nu_1' t + \varphi_1) + B_1 e^{-\delta_2' t}\sin(\nu_2' t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 e^{-\delta_1' t}\sin(\nu_1' t\ \varphi_2) + B_2 e^{-\delta_2' t}\sin(\nu_2' t + \varphi_2)$$

ale z tych 8 stałych tylko 4 dowolne

D). Tylko związanie siły bez uśmierzenia

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + n_1^2 x_1 + n_1^2\vartheta_1 x_2 = 0$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + n_2^2 x_2 + n_2^2\vartheta_2 x_1 = 0$$

$$x_1 = A e^{i\alpha t}$$

$$x_2 = A' e^{i\alpha t}$$

$x_1 = A\sin(\alpha_1 t + \varphi) + B\sin(\alpha_2 t + \psi)$

$x_2 =$

$$A(n_1^2 - \alpha_1^2) + n_1^2\vartheta_1 A' = 0$$

$$A'(n_2^2 - \alpha_1^2) + n_2^2\vartheta_2 A = 0$$

$$\frac{(n_1^2 - \alpha^2)}{n_1^2\vartheta_1} = \frac{n_2^2\vartheta_2}{n_2^2 - \alpha^2}$$

$$\alpha^4 - \alpha^2(n_1^2 + n_2^2) + n_1^2 n_2^2(1 - \vartheta_1\vartheta_2) = 0$$

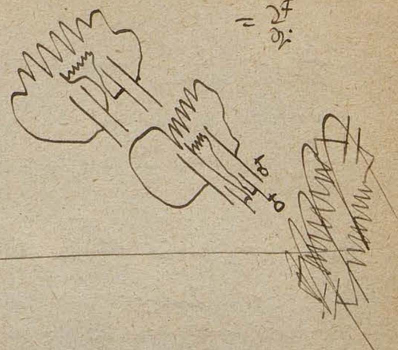
$$\alpha^2 = -\tfrac{1}{2}(n_1^2 + n_2^2) \pm \sqrt{(n_1^2 + n_2^2)^2 - 4n_1^2 n_2^2(1 - \vartheta_1\vartheta_2)}$$

Lagrange równania w razie sił dyssypacyjnych

$$X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}+\dots=\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial p}\dots$$

$$=\frac{\partial F}{\partial p}$$

$$=\sum X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p},$$



$$F=a_{11}\cancel{p}_1'^2+a_{22}p_2'^2+2a_{12}p_1'p_2'+\dots$$

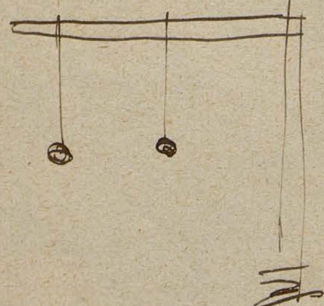
$$\frac{\partial F}{\partial p_1}$$

---

2 stopnie swobody

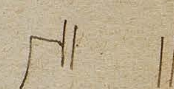
= Powiązanie dynamiczne dwóch systemów o jednym stopniu wolności

N.p.



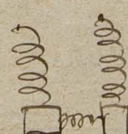
dwa wahadła na tem samem ramieniu

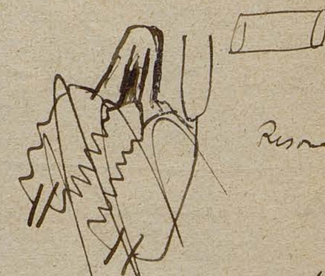
~~powiązanie~~ powiązanie b. słabe



wahadło podwójne

powiązanie silne





Resonator

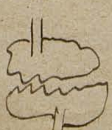
~~Elektr~~ Dynamika elektryczna (Tesla etc.)

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+2\delta_1\frac{dx_1}{dt}+n_1^2x_1+\rho_1\frac{d^2x_2}{dt^2}+2\delta_1\sigma_1\frac{dx_2}{dt}+n_1^2\vartheta_1x_2=0$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}+2\delta_2\frac{dx_2}{dt}+n_2^2x_2+\rho_2\frac{d^2x_1}{dt^2}+2\delta_1\sigma_1\frac{dx_1}{dt}+n_2^2\vartheta_2x_1=0$$

$$i_1v_1=-L_1\frac{di_1}{dt}+M_{12}\frac{di_2}{dt}+\dots \qquad i_1=-C\frac{dV_1}{dt}$$

$$e_1=V_1$$



Ogólnie może też tak być

$i_1=$

$$y_k = \sum_{h=1}^{h=n} A_k \sin \frac{k h \pi}{n+1} \cos(n_h t - \varepsilon_h)$$

$x = ka$.

$$y_x = \sum_{h=1}^{\infty} A_x \sin \frac{x h \pi}{l} \cos(n_h t - \varepsilon_h)$$

$(n+1)\,a = l \qquad a = \frac{l}{n+1}$

$n_h = \cancel{2 \sin \pi k} \quad 2$

$nm = \rho l \qquad m = \frac{\rho l}{n}$

$$= \frac{2}{l} \sqrt{n(n+1) \frac{S}{\rho}} \sin \frac{h\pi}{2(n+1)}$$

$a\, m = \frac{\rho l^2}{n(n+1)}$

$$n = \frac{h\pi}{l} \sqrt{\frac{S}{\rho}}$$

$$\tau = \frac{2l}{h} \sqrt{\frac{\rho}{S}}$$

$$= f(q_1 q_2 \cdots q_n)$$

$$W = W_0 + \sum_{r=1}^{n} q_r \left(\frac{\partial W}{\partial q_r}\right)_0 + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=n} \sum_{s=1}^{s=n} q_r q_s \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_r \partial q_s}\right)_0 + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} \sum \sum c_{rs} q_r q_s$$

$$L = \frac{1}{2} \sum\sum a_{rs} q_r' q_s'$$

$$q_1 = \gamma_{11} \varphi_1 + \gamma_{12} \varphi_2 + \cdots \quad \gamma_{1n} \varphi_n$$

$$q_2 = \gamma_{21} \varphi_1 +$$

$$\vdots$$

$$q_n = \gamma_{n1} \varphi_1 + \gamma_{n2} \varphi_2 + \quad \gamma_{nn} \varphi_n$$

$$W = \frac{1}{2}(c_1 \varphi_1^2 + \cdots \quad c_n \varphi_n^2) \qquad L = \frac{1}{2}(a_1 \varphi_1'^2 + \cdots a_n \varphi_n'^2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{\partial W}{\partial \varphi}$$

$$a \varphi'' = - c \varphi$$

$$\varphi_r = A_r \cos\left(\sqrt{\frac{c_r}{a_r}}\, t - \varepsilon_r\right)$$ współrzędne normalne

$$q_1 = \gamma_{11} \cos \cdots + \quad \cos \cdots + \cdots$$

$$q_2 = \gamma_{21} \cos \cdots$$

normalne degen.

$$T + U = \frac{1}{2}\left(c_1 A_1^2 + \cdots \quad \cdots c_n A_n^2\right)$$

Ruchy (drgania) punktów pod działaniem sił przyciągających

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + b\sin\beta t$$

$$x = a\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{b}{k-m\beta^2}\sin\beta t \qquad \beta = \frac{2\pi}{T} \qquad \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + \cancel{b\sin\beta t} - \gamma\frac{dx}{dt} + b\sin\beta t$$

$$x = a e^{-\varepsilon t} \ldots$$

$$x = a e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\gamma^2}{4m^2}}\right) + c\sin(\beta t+\xi) \quad \therefore \quad b\sin\beta t = (kc-mc\beta^2)\sin(\beta t+\xi) + \gamma c\beta\cos(\beta t+\xi)$$

$$\therefore \begin{cases} b = (kc-mc\beta^2)\cos\xi - \gamma c\beta\sin\xi \\ 0 = (kc-mc\beta^2)\sin\xi + \gamma c\beta\cos\xi \end{cases}$$

$$c = \frac{b}{(k-m\beta^2)\cos\xi - \gamma\beta\sin\xi}$$

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{-\gamma\beta}{k-m\beta^2}$$

$$= \frac{b}{\cos\xi}\,\frac{1}{k-m\beta^2-\gamma\beta\operatorname{tg}\xi} = \frac{b}{\cos\xi}\,\frac{k-m\beta^2}{(k-m\beta^2)^2-\gamma^2\beta^2}$$

$$= \frac{b\sqrt{(k-m\beta^2)^2+\gamma^2\beta^2}}{\cancel{k-m\beta^2}}\,\frac{\cancel{(k-m\beta^2)}}{(k-- -\gamma\beta^2)}$$

$$\int\frac{dx}{\cancel{dt}}$$

$$\frac{d}{\cancel{dt}}T = -dU - \gamma\int\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt + dP$$

$$\frac{d(T+U)}{dt} = \frac{dP}{dt} - \underbrace{\gamma\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}_{\frac{d}{dt}\underbrace{\int\gamma\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt}_{F}}$$

Webster p. 153

$$\cancel{z = z_0 + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + \dots} - - - -$$

$$z \neq \frac{x^2}{2\rho_1} + \frac{y^2}{2\rho_2}$$

$$U = mgz =$$

$$T \neq \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \cancel{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{\rho_1}x = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{g}{\rho_2}y = 0 \qquad 2\pi\sqrt{\frac{\rho_1}{g}} \qquad 2\pi\sqrt{\frac{\rho_2}{g}}$$

$\cancel{I = \frac{\pi}{cy}}$

$\sin$

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} = c^2 \left[y_{k+1} - 2 y_k + y_{k-1} \right]$$

$$y_k = \sum L \cos(p\, t + \omega)$$

$$L_{k+1} - 2L_k + L_k = -\frac{p^2}{c^2} L_k \qquad L_k = A a^k$$

$$a - 2 + \frac{1}{a} = -\left(\frac{p}{c}\right)^2$$

$$\sqrt{\alpha} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{p}{2c}\right)^2} + i \frac{p}{2c} \qquad L_k = A \alpha^k + B \beta^k$$

$\cancel{y_k = A_1 + B_0 k + A}$ $\qquad \frac{p}{2c} = \sin\theta$ [illegible]

$$\cos 2\theta \pm i \sin 2\theta$$

$q_i = \sum \cdots e^{i n_k t}$

Zatem możliwa transformacja $q_k = \sum \alpha p$

$$T = \frac{1}{2}\left[\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2 + \cdots \right]$$

$$U = \frac{1}{2}\left[\mu_1 p_1^2 + \mu_2 p_2^2 + \cdots \right]$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-\mu_1 & 0 & 0 & \\ 0 & \lambda-\mu_2 & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & \\ & & & \lambda-\mu_n \end{vmatrix} = 0$$

więc $n_1, n_2 \ldots = \sqrt{\mu_1}\ \ \mu_2 \ldots$

$$p_k = A_k \cos\left(\sqrt{\mu_k}\, t + \theta_k\right)$$

zawsze można dostać rozwiązanie każdego z osobna więc gdzie jedynie p_k się zmienia.

ogólne $= \sum$ Bernoulli superpozycja itd.

[Jeżeli istnieją ~~[illegible]~~ pozycje równowagi

$\left[\frac{\partial U}{\partial q} = 0 \right.$

$T = m y_1'^2 + m y_2'^2 + \dots + m y_n'^2$

$U = -\frac{P}{2l}\left[y_1^2 + (y_2 - y_1)^2 + \dots (y_n - y_{n-1})^2 + y_n^2 \right]$

$T = f_0(\dot q_1 \dot q_2 \dots q_1 q_2) + f_2[\dot q_1 \dot q_2 \dots q_{10} q_{20} \dots]$

$U = U_0 + \underbrace{q_1 \left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)_0 + \dots}_{=0} \quad \underbrace{\frac{q_1^2}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0}_{>0}$ wtedy miejsce równowagi

$U + T = h$

w razie jeżeli U definit to dla małych h: $T < h$

$\frac{\partial U}{\partial q_1} = a_1 \dot q_1 + a_{12} \dot q_2 + \dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \ddot q_1 + a_{12} \ddot q_2 + \dots \qquad + (b_{11} q_1 + b_{12} q_2 \dots) = 0 \\ a_{21} \ddot q_1 + a_{22} \ddot q_2 \quad \dots \qquad + (b \dots) = 0 \\ \dots \end{array} \right.$$

$q_n = A_n e^{int}$

~~$(a_{11} - n^2 b_{11})$~~ $(b_{11} + a_{11} n^2) A_n + \dots \quad - \quad = 0$

może on tylko jeżeli

$$\begin{vmatrix} b_{11} - a_{11} n^2 & b_{12} - a_{12} n^2 & \dots \\ \vdots & & \\ \dots & & b_{nn} - a_{nn} n^2 \end{vmatrix} = 0$$

stosunki $\frac{A}{A}$ i n

148

$\mathfrak{F}_k = m_k \frac{d^2 r_k}{dt^2}$

$$\mathfrak{M} = \sum V r_k \mathfrak{F}_k = \sum m_k V r_k \frac{d^2 r_k}{dt^2} = = \frac{d}{dt} \sum m_k \left[r_k \frac{dr_k}{dt} \right]$$

$$\left\{ \sum {}_x Y - {}_y X = \cdots \right.$$

$(\mathfrak{M} n) = 0$

$$\frac{d}{dt} \cdot \left(\sum n\, m_k \left[r_k \frac{dr_k}{dt} \right] \right) = 0$$

$$\sum n\, m_k \left[r_k \frac{dr_k}{dt} \right] = \text{const}$$

Ruch planet Słońca: początkowe prędkości v_1 v_2

prędkość środka masy s $v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

$$v_1 = v + \frac{m_2}{m_1+m_2}(v_2 - v_1)$$

$$v_2 = v + \frac{m_1}{m_1+m_2}(v_1 - v_2)$$

Więc jeśli układ spółrzędnych przyjmę w środku masy to początkowe prędkości będą równoległe do siebie

przechodzące płaszczyznę przez łączącą punktów i przez ten kierunek

---

$[r\dot{r}] = \text{const}$ siła równoległa do promienia!

$$\frac{d}{dt}[r\dot{r}] = [r\ddot{r}] = 0$$

$$\ddot{r} = \alpha \frac{\mathfrak{R}}{r^2}$$

$$dt(\dot{r}\ddot{r}) = \alpha\left(\frac{\mathfrak{R}}{r^2} dr\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{r}^2}{2}\right) = \cancel{-\frac{\alpha}{r}}\ d\left(\frac{\alpha}{r}\right)\cancel{\mathfrak{R}^2}$$

$\cancel{2\frac{\alpha\mathfrak{R}}{r}}$ $\cancel{\int \frac{\alpha \mathfrak{R}^2}{r^2} dr}$

$$(\mathfrak{R}\, dr) = (\mathfrak{R}\, d(r\mathfrak{R}))$$

$$= \mathfrak{R}^2 dr + r\underbrace{(\mathfrak{R}\, d\mathfrak{R})}_{=0}$$

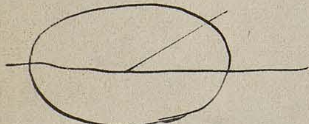
$\cancel{\frac{2\mathfrak{R}\, d\mathfrak{R} - \alpha \mathfrak{R}\,\mathfrak{R}\, dr}{r^2}}$

$$= dr +$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\alpha r \qquad r^2\frac{d\varphi}{dt} = c$$

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} = -\alpha r \qquad \dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}$$

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = -\frac{c^2}{r^2} - \alpha\frac{r^2}{2}$$



$$\frac{r^2\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\varphi}{b^2} = 1$$

$$r^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}}$$

$x = a\cos\alpha t$

$y = b\sin\alpha t$ $\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$r = \sqrt{a^2\cos^2\alpha t + b^2\sin^2\alpha t}$

$r^2 = s$

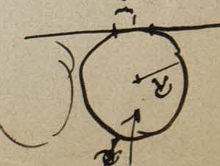
$2r\,dr = ds$

$\frac{dr}{dt} = \frac{ds}{dt}$

$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = ab\alpha$

$\frac{dx}{dt} = -a\alpha\sin\alpha t$ $\qquad a^2\alpha^2\sin^2\alpha t + b^2\alpha^2\cos^2\alpha t$

$\frac{dy}{dt} = b\alpha\cos\alpha t$ $\qquad = \alpha^2 \; A^2$



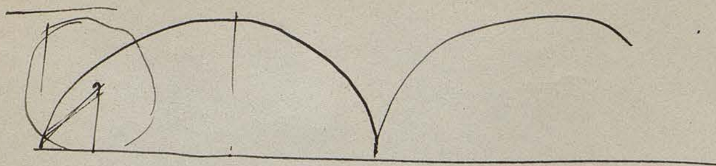
$n = 1.1\sqrt[3]{\frac{PR}{E}}$

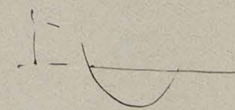
$p = \frac{P}{r}$

$nR^2 = \text{const}$ $\quad p = PR^2 \text{ const}$

$r = 1.1\sqrt[3]{\frac{R^3}{E}} \text{ const } P$

$n r^2 \sim R^2 = \text{const!}$





$y = a(1-\cos\varphi)$

$x = a(\varphi - \sin\varphi)$

$\cancel{\varphi = \pi - \varphi}$

$\varphi' = \varphi - \pi$

$\eta = 2a - y = {}^{2}a\cos\varphi' = -\cancel{a\cos\varphi} = a(1-\cos\varphi')$

$\xi = x - a\pi = -a(\pi - \varphi + \sin\varphi) = a(\varphi' + \sin\varphi')$

$y = a(1-\cos\varphi)$ $\qquad \dot y = a\sin\varphi\,\dot\varphi$ $\qquad \ddot y = a\cos\varphi\,\dot\varphi^2 + a\sin\varphi\,\ddot\varphi$

$x = a(\varphi+\sin\varphi)$ $\qquad \dot x = a(1+\cos\varphi)\,\dot\varphi$ $\qquad \ddot x = a\left[\ddot\varphi(1+\cos\varphi) - \sin\varphi\,\dot\varphi^2\right]$

$(-m\ddot x)\,\delta x + (-mg - m\ddot y)\,\delta y = 0$

$\left[\ddot\varphi(1+\cos\varphi) - \sin\varphi\cdot\dot\varphi^2\right](1+\cos\varphi) + \left[\frac{g}{a} + \cos\varphi\,\dot\varphi^2 + \sin\varphi\,\ddot\varphi\right]\sin\varphi = 0$

$\ddot\varphi\left[(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi\right] + \dot\varphi^2\left[\cancel{\cos\varphi\sin\varphi} - \sin\varphi - \cancel{\sin\varphi\cos\varphi}\right] + g\sin\varphi = 0$

$\ddot\varphi(2+2\cos\varphi) - \dot\varphi^2\sin\varphi + g\sin\varphi = 0$

$\cancel{\ddot\varphi\,4\cos^2\frac{\varphi}{2} - 2\dot\varphi^2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} +}$

$\frac{dy}{dx} = \tan\frac{\varphi}{2}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\frac{d\varphi}{dx}$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}\,a}\frac{1}{1+\cos\varphi}$

$R_{\varphi=0} = 4a$

albo bezpośrednio z zasady energii

$a^2(2+2\cos\varphi)\frac{\dot\varphi^2}{2} = c - ga(1-\cos\varphi)$

$0 = c - ga(1-\cos\varphi_0)$

$c = 2ga\sin^2\frac{\varphi_0}{2}$

$2a^2\dot\varphi^2\cos^2\frac{\varphi}{2} = c - 2ga\sin^2\frac{\varphi}{2}$

$a\frac{d\varphi}{dt}\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{c}{2} - ga\sin^2\frac{\varphi}{2}}$

$\sin\frac{\varphi}{2} = z$

$\frac{2a\,dz}{\sqrt{\frac{c}{2} - ga\,z^2}} = dt = \frac{2a\,dz}{\sqrt{ga}\sqrt{z_0^2 - z^2}} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{g}}\arcsin\left(\frac{z}{z_0}\right)$

$z = z_0\sin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$

$T = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

$\cancel{\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{3} x^3 +}}$

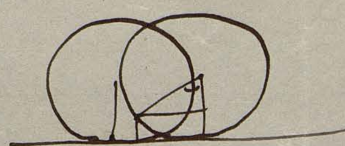
$\ddot{x} = -\frac{1}{x^2}$

$\dot{x}^2 = +\frac{2}{x} + a^2$ $\cancel{\frac{1}{x} = z}$ $\cancel{-\frac{1}{x^2} dx = dz}$ $0 = \frac{2}{l^2} + a^2$

$\dot{x} = \sqrt{a^2 + \frac{2}{x}}$ $\cancel{dx = \frac{dz}{z^2}}$

$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - \frac{2}{x}}} = dt = \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2x^2 - 2x}}$ $\sqrt{\left(ax - \frac{1}{a}\right)^2 -}$

$x = \frac{\sin^2\theta}{a^2}$ $\int \sqrt{\frac{x}{a-x}}\, d$



$x = \cancel{\ldots}$

$x = r\varphi - r\sin\varphi$

$y = r(1 - \cos\varphi)$

$x = \cancel{a}(\alpha t - r\sin\alpha t)$

$y = \cancel{a}(1 - \cos\alpha t)$

$\mathcal{G} = m \frac{d^2 v}{dt^2}$ Dodawanie geometryczne

$\Sigma \mathcal{G} = m \frac{d^2}{dt^2} \Sigma v$

Rozkładamy $m \frac{dv}{dt}$ $m \frac{v^2}{R}$ lub $m \frac{d^2x}{dt^2} = X$

$m \frac{d^2y}{dt^2} = Y$

$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z$

Przykł. prostolinijny ruch

$x = a + bt$

$x = a + bt + ct^2$

$x = \cancel{a} (ct + b)^{2/3}$

$\ddot{x} = f(x)$

$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \frac{dx}{dt}$

$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$

Krzywolinijny Np. ~~x = a ct~~

$x = a[ct - \sin ct]$

$y = a[1 - \cos ct]$

cykloida. $\dot{x} = c[c - c \cos ct]$

$\dot{y} = ac \sin ct$

$\ddot{x} = ac^2 \sin ct$

$\ddot{y} = ac^2 \cos ct$

$\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = ac^2 = \text{const.}$

kierunek $\cancel{\ddot{x}} = \cancel{\ldots}$ $\operatorname{tg} = \operatorname{ctg} ct$

odejmujące $-act$ $x = a \sin ct$ jednost. po obwodzie koła

$-a$ $y = a \cos ct$

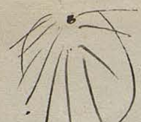
$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2ac^2(1 - \cancel{a}\cos ct) = 4ac^2 \sin^2 \frac{ct}{2}$

$v = 2\sqrt{a}c \sin \frac{ct}{2}$

$\frac{dv}{dt} = 2\sqrt{a}c \cos \frac{ct}{2}$

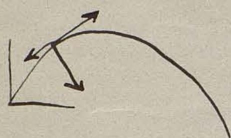
$c \sin\alpha = gt$

Abwurf



2 Tangenten

$$L = \frac{2c^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}$$



!

!

Schwanken der Flugbahn!

$$\ddot{x} = \mu x$$

$$x = x_0 \cosh(t\sqrt{\mu}) + \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\mu}} \sinh(t\sqrt{\mu})$$

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{x^2} \qquad t=0 \quad x = 2a$$

$$\dot{x} = 0$$

$$t = \int_{2a}^{x} \frac{-dx}{\sqrt{\mu \frac{2a-x}{ax}}} \qquad x = 2a\cos^2\theta$$

$$= \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}(2\theta + \sin 2\theta)$$

$$k^2 \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \theta}{\partial \rho}$$

$$\theta = C_1 e^{-\alpha_1 t} f_1(\rho) + \cdots$$

$$-k^2 \alpha_1 = \frac{\partial^2 f_1}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}$$

$$u = \sqrt{2}\left[\sin\frac{\theta}{2}\left(1+\cos^2\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right] = \sin\frac{\theta}{2}\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)\right)\cdot\sqrt{2}$$

$$v = \sqrt{2}\left[\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \sin^3\frac{\theta}{2}\right] = \sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\frac{v}{u}(31) = \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1+\cos^2\frac{\theta}{2}} \quad ?$$

$$\left(\frac{v}{u}\right)(25) = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

$$g(\alpha) = \alpha f'(\alpha) - f(\alpha)$$

$$g(\alpha) = \int\left[\alpha f'(\alpha) - f(\alpha)\right]d\alpha = \alpha f(\alpha) - 2\int f(\alpha)\,d\alpha$$

$$\psi = \frac{1}{i}\Big[\underbrace{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha) + \alpha f(\alpha) - \beta f(\beta)}_{(\alpha-\beta)[f(\beta)+f(\alpha)]} - 2\int_\beta^\alpha f(\alpha) - f(\beta)\Big]$$

$$\psi = 4y\, R f(\alpha) - 4\, I\int f(\alpha)\,d\alpha$$

$$f = \sqrt{\alpha^2-1}$$

$$\int f(\alpha)\,d\alpha = \int\sqrt{\alpha^2-1}\,d\alpha = \alpha\sqrt{\alpha^2-1} - \int\frac{\alpha^2\,d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

$$= \int\frac{\alpha^2\,d\alpha}{\sqrt{}} - \int\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

$$f = \sqrt{\alpha} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\int f(\alpha)\,d\alpha = \frac{2}{3}\sqrt{\alpha^3}$$

$$\psi = 4y\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{8}{3}i\sqrt{2}\cos\frac{3\theta}{2}$$

$$\sin\theta\cos\frac{\theta}{2} - \frac{2}{3}\cos\frac{3\theta}{2} = \text{const}$$

$$- \frac{2}{3}\left(\cos^3\theta\cos\frac{\theta}{2} - \sin^2\theta\sin\frac{\theta}{2}\right) = \text{const}$$

$$\cos\alpha - \cos\alpha\sin^2\alpha$$

$$\sin\alpha\cos^2\alpha - \frac{2}{3}\left(\cancel{} - 3\sin^2\alpha\cos\alpha\right) - \cancel{}) =$$

$$\cancel{\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha - \frac{2}{3}\cos^2\alpha}$$

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1$$

$$\frac{\cos^2\varphi}{A} + \frac{\cos^2\psi}{B} + \frac{\cos^2\chi}{C} = \frac{1}{\rho^2} = K$$

$$K_x = \frac{\cos^2 x A}{A} + \frac{\cos^2 x B}{B} + \frac{\cos^2 x C}{C}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{g\,Ma}}$$

$$K_0 = 2\,\frac{M}{2}\,b^2 = M b^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M(b^2+a^2)}{g\,Ma}}$$

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g a = b^2 + a^2$$

$$a = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g \pm \sqrt{\left[\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g\right]^2 - b^2}$$

$T = 1$ $24{\cdot}81$

$$\begin{array}{r} 9912 \\ \underline{5965} \\ 3947 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4972 \\ 9949 \\ \underline{6021} \end{array}$$

$$\Sigma m \ddot{x}\,\delta x = \Sigma m \ddot{x}\,\frac{\partial x}{\partial p}\,\delta p + \dots$$

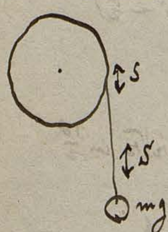
$$\frac{d\dot{x}}{dt}\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial p}\right) - \dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial p}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial p}\dot{p} + \dots = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{p}}\right) - \dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial p}$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{p}} = \frac{\partial x}{\partial p} \qquad = \frac{d}{dt}\frac{\partial\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)}{\partial \dot{p}} - \frac{\partial\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)}{\partial p}$$

---

1).



$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = S a$$

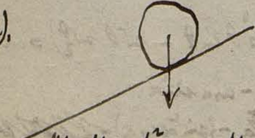
$$m\frac{d^2 y}{dt^2} = mg - S$$

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = m\left(g - \frac{d^2 y}{dt^2}\right)a$$

$$= m\left(g - a\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)a$$

$$(K + ma^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2} = mga$$

3).



$$M\frac{d^2 z}{dt^2} = Mg\,\alpha\gamma - R$$

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = aR$$

---

2).

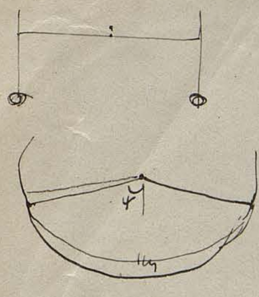
postęp $\frac{a}{2}\omega$ obrót ω

B $\frac{a}{2}\omega + \frac{a}{2}\omega = a\omega$

A $\frac{a}{2}\omega - \frac{a}{2}\omega = 0$

cykloida

Waga



$$L = K\frac{\dot\varphi^2}{2} + 2M\frac{\dot\psi^2}{2} = (K + 2Ml^2)\frac{\dot\varphi^2}{2}$$

$$U = mg\,a\cos\varphi + l\underbrace{[\cos(\psi+\varphi) + \cos(\psi-\varphi)]}_{-2\cos\psi}Mg$$

$$2[\cos\psi\cos\varphi - \cos\psi]$$

$$= [mga + 2l\,Mg\cos\psi]\cos\varphi$$

$$(K + 2Ml^2)\,\ddot\varphi = -(ma + 2lM)\,\varphi\,g$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K + 2Ml^2}{ma + 2Ml}\frac{1}{g}} \qquad K = m\frac{a^2}{3}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ma^2}{3} + 2Ml^2}{ma + 2Ml}\frac{1}{g}} = \cancel{2\pi\sqrt{\frac{\frac{m}{3}+2M}{m+2M}}\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

dla małych ciężarów ~~mas~~ M : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}}$

dużych $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

czułość $\frac{\psi}{p} = \frac{l}{ma} = c\,l$

Ad balansowanie

$a\left\{\right.$ M

$$\int K_2\, a f\, dt = a M v = K_0 \frac{d\varphi}{dt} \qquad v = \frac{K_0}{Ma}\frac{d\varphi}{dt}$$

chodzi o to, żeby $v < a \frac{d\varphi}{dt}$ $\qquad \frac{K_0}{Ma} < a$

$$Ma^2 \gtrsim K_0$$

Dla prętów $K = M\frac{a^2}{3}$

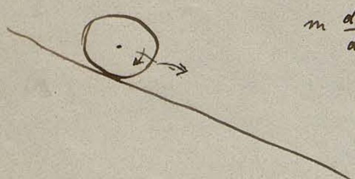
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha x + b\cos\beta t$$

$$x = a \sin\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t + c\cos\beta t$$

$$-cm\beta^2 = -\alpha c + b$$

$$c = \frac{b}{\alpha - m\beta^2} = \frac{1}{m}\frac{b}{\frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{\tau'^2}}$$

$$\cancel{m\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha x + b\cos\beta t - \gamma\frac{dx}{dt}}$$



$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg\sin\gamma - f$$

$$af = K\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\left(ma + \frac{K}{a}\right)\frac{d^2\varphi}{dt^2} = mg\sin\gamma$$

Jeżeli $f < mg\rho\cos\gamma$ bez ślizgania

$$\frac{K}{a}\frac{mg\sin\gamma}{ma + \frac{K}{a}} < mg\rho\cos\gamma$$

$$\operatorname{tg}\gamma < \rho\left(1 + \frac{ma^2}{K}\right)$$

$$1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\operatorname{tg}\gamma < \frac{7}{2}\rho$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha x - \gamma\frac{dx}{dt} \qquad + b\sin\beta t$$

$$\cancel{x = a\sin(\varepsilon t + \delta)}$$

$$x = a e^{-\varepsilon t}$$

$$m\varepsilon^2 = -\alpha + \gamma\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \frac{\alpha}{m}}$$

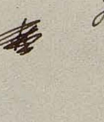
$$x = a e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\sin\left(t\sqrt{\frac{\alpha}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}\right) + c\sin(\beta t + \zeta)$$

$$\cancel{c\sin(\beta t + \zeta)}$$

$$b\sin\beta t = (-mc\beta^2 + \alpha c)\sin(\beta t + \zeta) + \gamma c\beta\cos(\beta t + \zeta)$$

$$(-m\beta^2 + \alpha)\sin\zeta + \gamma c\beta\cos\zeta = 0$$

$$\operatorname{tg}\zeta = \frac{\gamma c\beta}{\alpha - m\beta^2}$$



dodatnia czy ujemna różnica fazy ζ

zależnie czy $\alpha \gtrless m\beta^2$

t.j. czy $\tau_0 \gtrless \tau_\beta$

154

$$\ddot{x}_1 = -g\left[\frac{x_1}{y_1} + \frac{m_2}{m_1}\,\frac{x_2 - x_1\frac{y_2}{y_1}}{y_2 - y_1}\right]$$

$$\ddot{x}_2 = -g\,\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}$$

$x_1 = a\varphi \qquad y_1 = a$

$x_2 = a\varphi + b\psi \qquad y_2 = a + b$

$$\frac{a\varphi + b\psi - a\varphi\frac{a+b}{a}}{b} = (\psi - \varphi)$$

$$\left.\begin{aligned} a\ddot{\varphi} &= -g\left[\varphi + \frac{m_2}{m_1}(\psi - \varphi)\right] \\ a\ddot{\varphi} + b\ddot{\psi} &= -g\,\psi \end{aligned}\right\}$$

$$b\ddot{\psi} = -g\left[\psi - \varphi + \frac{m_2}{m_1}(\psi - \varphi)\right] = -g(\psi - \varphi)\,\frac{m_1 + m_2}{m_1}$$

$\varphi = A_1 \sin\alpha t + B_1 \sin\beta t$

$\psi = A_2 \sin\alpha t + B_2 \sin\beta t$

$$-a(\alpha^2 A_1 + \cancel{\ldots}) = -g\,A_1 + g\frac{m_2}{m_1}(A_2 - A_1)$$

$$-a\beta^2 B_1 = -g\,B_1 + g\frac{m_2}{m_1}(B_2 - B_1)$$

$$-\alpha^2 b A_2 = -g\,(A_2 - A_1)\,\frac{m_1 + m_2}{m_1}$$

$$-\beta^2 b\, B_2 = -g\,(B_2 - B_1)\,\frac{m_1 + m_2}{m_1}$$

$$\frac{a A_1}{b A_2} = \frac{A_1 + \frac{m_2}{m_1}(A_1 - A_2)}{(A_2 - A_1)\frac{m_1 + m_2}{m_1}} = \frac{(m_1 + m_2) A_1 - m_2 A_2}{(m_1 + m_2)(A_2 - A_1)}$$

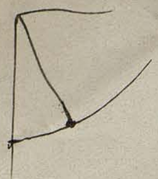
$$\frac{a B_1}{b B_2} = \frac{B_1 + \frac{m_2}{m_1}(B_1 - B_2)}{(B_2 - B_1)\frac{m_1 + m_2}{m_1}} =$$

$$\frac{A_1}{A_2} = x$$

?

$$\frac{a}{b}x = \frac{(m_1 + m_2)x - m_2}{(m_1 + m_2)(x - 1)} \qquad m_1 = m_2 \qquad \frac{a}{b}x = \frac{2x - 1}{2(x - 1)}$$

Punkt po kole z tarciem ([illegible])



$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\varphi + R\mu$$

$$\cancel{\frac{mv^2}{a} = mg\cos\varphi} \quad R = mg\cos\varphi + \frac{mv^2}{a}$$

$$\cancel{m}\, v\frac{dv}{ds} = -\cancel{m}g\sin\varphi + \mu\cancel{m}g\cos\varphi + \mu\frac{\cancel{m}v^2}{a}$$

$$v^2 = z$$

$$\frac{1}{a}\frac{dz}{d\varphi} = 2g(\mu\cos\varphi - \sin\varphi) + \frac{\mu}{a}z$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = \underbrace{\mu z - 2ag[\varphi - \mu]}_{=u}$$

$$du = \mu\, dz - 2ag\, d\varphi$$

$$du + 2ag\, d\varphi = \mu u\, d\varphi$$

$$\frac{du}{d\varphi} = \mu u - 2ag$$

$$\lg(u\mu - 2ag) = \mu\varphi + \text{const}$$

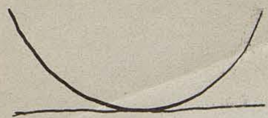
$$u = \frac{2ag}{\mu} + Ae^{\mu\varphi} = \mu z - 2ag(\varphi - \mu)$$

$$z =$$

Równia pochyła z tarciem

$$s = g\frac{t^2}{2}(\sin\varphi - \mu\cos\varphi)$$

155



Parabola $\quad y = \alpha x^2 \qquad \dot y = 2\alpha x \dot x$

$$(\dot y^2 + \dot x^2)\tfrac{1}{2} + g y = c = 2gh$$

$$\dot x^2 (4\alpha^2 x^2 + 1) + 2g\alpha x^2 = c$$

$$dx \sqrt{\frac{1+4\alpha^2x^2}{c-2g\alpha x^2}} = dt$$

$$dx \sqrt{\frac{1+4\alpha^2x^2}{x_0^2-x^2}} = \sqrt{2g\alpha}\, dt$$

$$\cancel{\frac{dx}{\sqrt{1+4\alpha x^2}\sqrt{c}} + 4\alpha \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+4\alpha x^2}\sqrt{\;}}}$$

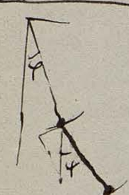
$$1 + 4\alpha^2 x^2 = \cos 2\varphi$$

$$x = \sqrt{\frac{\cos 2\varphi - 1}{4\alpha^2}} = \sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{2\alpha^2}} = \frac{\sin\varphi}{\alpha\sqrt2}$$

$$dx = \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\alpha\sqrt2}$$

$$\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\cancel{\sqrt2}} \sqrt{\frac{\cos 2\varphi}{\sin^2\varphi - \sin^2\varphi_0}} =$$

$$dz \sqrt{\frac{1+z^2}{z_0^2 - z_1^2}}$$



$$-\left(m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + m_2 \ddot x_2\right) +$$

$$\cancel{(m_1 \ddot x_1 + m_2 \ddot x_2)\,\delta x} +$$

$$m_1 \ddot x_1 \delta x_1 + m_2 \ddot x_2 \delta x_2 + m_1(\ddot y_1 + g)\,\delta y_1 + m_2(\ddot y_2 + g)\,\delta y_2 = 0$$

$$x_1 \delta x_1 + \qquad y_1 \delta y_1 \qquad = 0$$

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2$$

$$(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 = b^2$$

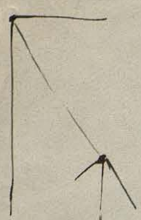
$$(x_2-x_1)(\delta x_2 - \delta x_1) + (y_2-y_1)(\delta y_2 - \delta y_1) = 0$$

$$\delta y_2 = \delta y_1 + \frac{(x_1-x_2)(\delta x_2 - \delta x_1)}{y_2-y_1} = -\frac{x_1\delta x_1}{y_1} + \frac{x_1 - x_2}{}$$

$$m_1 \ddot x_1 - m_1(\ddot y_1 + g)\frac{x_1}{y_1} + m_2(\ddot y_2+g)\frac{x_2 - x_1\frac{y_2}{y_1}}{y_2-y_1} = 0 \quad = \delta x_1 \cdot \left(\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1} - \frac{x_1}{y_1}\right) + \delta x_2 \frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}$$

$$m_2 \ddot x_2 \qquad + m_2(\ddot y_2 + g)\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2} = 0$$

$$\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{y_1(y_2-y_1)}$$



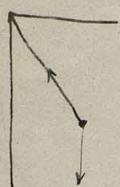
Napięcie nitki!

$$g\sin\varphi = \frac{dv}{dt} \qquad v^2 = -2ga(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$$

$$S = g\cos\varphi + \frac{v^2}{a}$$

$$= g\cos\varphi - 2g(\cos\varphi_0 - \cos\varphi) = g\left[3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0\right]$$

Nitka kauczukowa, albo lepiej sprężyna ciągnąca siłą proporcjon. do r



$$m\ddot{y} = mg - \alpha r\frac{y}{r} = mg - \alpha y$$

$$m\ddot{x} = -\alpha r\frac{x}{r} = -\alpha x$$

$$\begin{cases} x = A\sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t + \varepsilon\right) \\ y = \frac{mg}{\alpha} + B\sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t + \delta\right) \end{cases}$$

nitka o normalnej długości a, układ początek współrzędnych w końcu nitki w normalnej

$$m\ddot{y} = mg - \alpha\Delta r\frac{y}{r} = \cancel{mg - \alpha}$$

$$m\ddot{x} = -\alpha\Delta r\frac{x}{r}$$

$$m\ddot{\eta} = mg - \alpha\eta$$

$$m\ddot{x} = -\alpha\frac{x\eta}{a+\eta}$$

$$\eta = A\sin\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t + \frac{mg}{\alpha}$$

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{\eta}^2) = mg$$

$$m\ddot{x} = -\frac{\alpha A}{a}x\sin\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t - \frac{mg}{a}$$

przybliżenie: $x = B\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{a}} + \delta\right)$

$$\cancel{x = B\sin\beta t \qquad -m\beta^2 B\sin\beta t = -\frac{\alpha A B}{a}\sin\beta t\sin\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t - \frac{mg}{a}}$$

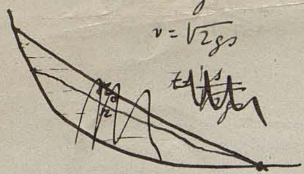
Prędkość z którą z ziemi trzeba wyrzucić ciało aby nie powróciło na ziemię

zamiast schodka

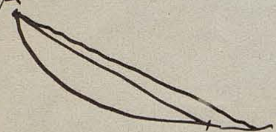
$s = \frac{gt^2}{2}$

$v^2 = 2gs$

$v = \sqrt{2gs}$



A



Krzywa taka że czas ruchu ciała po niej równa się czasowi ruchu po ~~...~~ cięciwie

156

$$t = \int \frac{ds}{v} = \int_{0}^{r_0} \frac{\sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}}{\sqrt{2g(\cancel{\ldots}\, r \sin\varphi)}} = 2\sqrt{\frac{r_0}{2g \sin\varphi}}$$

$$\sqrt{\frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{r \sin\varphi}} = d\left(\sqrt{\frac{r}{\sin\varphi}}\right) = \frac{dr}{2}\sqrt{\frac{\sin\varphi}{r}} - \frac{d\varphi \cos\varphi}{2}\sqrt{\frac{r}{\sin\varphi}}$$

$$dr\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2} = \sqrt{r \sin\varphi}\; d(\sqrt{r \sin\varphi})$$

$$= \frac{d}{2}(r \sin\varphi) = \frac{1}{2}\left[dr \sin\varphi + r \cos\varphi\, d\varphi\right]$$

$$1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[\sin^2\varphi + 2r \sin\varphi \cos\varphi \frac{d\varphi}{dr} + r^2 \cos^2\varphi \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2\right]$$

Routh I p. 118

Euler 1736

$$dr\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2} = \sqrt{r \sin\varphi}\left[\frac{dr}{\sqrt{r \sin\varphi}} - d\varphi \cos\varphi \sqrt{\frac{r}{\sin^3\varphi}}\right]$$

$$= \left[dr - r\, d\varphi \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right]$$

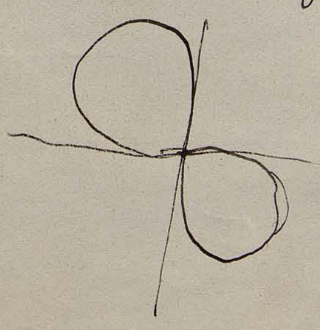
$$\cancel{1} + r^{2}\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 = \cancel{1} - 2r \frac{d\varphi}{dr} \operatorname{ctg}\varphi + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 \operatorname{ctg}^2\varphi$$

$$r\frac{d\varphi}{dr} = -2 \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{1 - \operatorname{ctg}^2\varphi}$$

$$d\varphi \frac{1 - \operatorname{ctg}^2\varphi}{\operatorname{ctg}\varphi} = -2\frac{dr}{r} = +d\varphi \cdot \frac{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}{\sin\varphi \cos\varphi} = -d\varphi \frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}$$

$$\lg r^2 = \lg \sin 2\varphi$$

$$r^2 = A \sin 2\varphi$$



$$\cancel{\frac{d}{dt}}\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) \cancel{+} \frac{\alpha}{(n-1)r^{n-1}} = c =$$

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{2Mk}{\left(1+\frac{m}{M}\right)^2}\frac{1}{r} = \gamma$$

rozwiązanie po obwodzie koła:

$$m\frac{v^2}{r} = m\frac{Mk}{r^2}$$

$$v^2 = \frac{Mk}{r}$$

$$\cancel{v^2 = \frac{2Mk}{r}} \qquad v = \sqrt{\frac{Mk}{r}}$$

$$\cancel{m\frac{v^2}{r} = mM}$$

$$-\int\frac{\alpha}{r^n}dr = \cancel{\frac{\alpha}{(n-1)r^{n-1}}}$$

$$\frac{\alpha}{(n-1)r^{n-1}}$$

$$\gamma = 0$$

$$2\frac{Mk}{r} = v^2$$

$$g = \frac{Mk}{r^2}$$

$$v^2 = 2gr$$

$$v^2 = 2\,10^3 \cdot 6300 \cdot 10^5$$

$$v = \sqrt{12{\cdot}6 \cdot 10^{11}} = 1{\cdot}1 \cdot 10^6 = 11\ \frac{km}{sec}$$

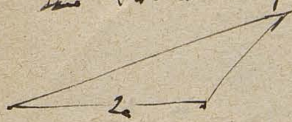
157

$n = 2$ $\quad u = A\cos(k\theta + \alpha)$

also $\cosh(k\theta + \alpha)$ $\quad k^2$ $\quad$ Cotes spiral

$n = -1$

~~The~~ Two centers of gravitation (Euler)



$$U = \frac{-\mu}{r_1} - \frac{\mu'}{r_2}$$

$x = c\cosh\xi\cos\eta \quad =$ $\qquad e^{2h\xi} + 2 + e^{-2h\eta}$

-2

$y = c\sinh\xi\sin\eta$

$$\left(\frac{x}{c\cos\eta}\right)^2 - \left(\frac{y}{c\sin\eta}\right)^2 = 1$$

$$T = \frac{M}{2}\left[\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + R^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] + \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]$$

$MR = mr$

$M\frac{m^2}{M^2}\dot r^2 + m\dot r^2$

$$U = \frac{\alpha}{(R+r)^n}$$

$$T = \frac{m}{2}\left(1+\frac{m}{M}\right)\left[\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\right]$$

$$r_1 = \frac{M}{m+M}r \qquad r_2 = \frac{m\,r}{m+M}$$

$$U = \frac{\alpha}{r^n}\frac{1}{\left(1+\frac{m}{M}\right)^n}$$

$$T = \frac{m_1}{2}\left[\dot r_1^2 + r_1^2\dot\varphi^2\right] + \frac{m_2}{2}\left[\dot r_2^2 + r_2^2\dot\varphi^2\right]$$

$$= \left\{\frac{m M^2}{(m+M)^2} + \frac{m^2 M}{(m+M)^2}\right\}\frac{1}{2}\left[\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\right] = \frac{mM}{m+M}\,\frac{1}{2}\left[\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\right]$$

$$U = \frac{\alpha}{r^n}$$

więc ruch taki sam jak gdyby M nieruchoma, a ~~[illegible]~~ potencjalna energia zwiększona w stosunku $\frac{m+M}{M}$

$$r^2\dot\varphi = h$$

$$\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 + \frac{\beta}{r^n} = \gamma$$

$$\dot r^2 + \frac{h^2}{r^2} + \frac{\beta}{r^n} = \gamma$$

$$\frac{dr}{\sqrt{\gamma - \frac{h^2}{r^2} + \frac{\beta}{r^n}}} = dt$$

$$\frac{+du}{u^2\sqrt{\gamma - h^2u^2 + \beta u^n}} = -dt$$

$\beta =$

$\gamma =$

$\frac{1}{r} = u$

$-\frac{\dot r}{r^2} = \dot u$

$\dot r = -\frac{\dot u}{u^2}$

$$\frac{du}{\sqrt{\gamma - h^2u^2 + \beta u^n}} = -\frac{d\varphi}{h}$$

~~$n = 0\ 1\ 2\ 3\ 4$~~

$$\frac{du}{\sqrt{\gamma + \beta u - h^2u^2}}$$

$$\frac{du}{\sqrt{\gamma + \frac{\beta^2}{4h^2} - \left(\frac{\beta}{2h} + uh\right)^2}} = -\frac{d\varphi}{h}$$

158

$$x^4\,\frac{15}{16}\left[1-\frac{15}{2}+\frac{35}{64}-\frac{42}{64}\right]$$

$$+35-\frac{42}{4}$$

$$\frac{35-42}{64} \qquad \frac{99}{-72} \qquad -\frac{33}{64}$$

$$(x^4+y^4+z^4+2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2)$$

$$-5(x^4+y^4z^4+3\ldots)=$$

$$\alpha\left\{1-\frac{3x^2+y^2+z^2}{2}+\frac{24}{64}\left(5x^4+y^4+z^4+6x^2(y^2+z^2)+2y^2z^2\right)\right.$$

$$-\frac{20}{64}\left(10x^4+15x^2(y^2+z^2)+3(y^4+z^4)+6y^2z^2\right)$$

$$\left.+\frac{35}{64}\left(2x^4+6x^2(y^2+z^2)+y^4+z^4\right)\right\}$$

$$y^2z^2\left[\frac{3}{8}-\frac{15}{8}+\frac{3.35}{32}\right] \qquad \frac{-48+105}{32}=\frac{57}{32}$$

$$(y^2+z^2)x^2\left[\frac{9}{8}-\frac{15.17}{32}+\frac{35.6}{16}-\frac{35.27}{32}\right]$$

$$=\left\{1-x^2\underbrace{\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)}_{\frac{3}{4}}-(y^2+z^2)\underbrace{\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right)}_{\frac{1}{8}}\right.$$

36 +420 456 −1200 744 | 170 85 255 | 700 245 945 255 1200 | $\frac{744}{32}$ =

$$\frac{x^4}{64}\;\begin{matrix}120\\-200\\+70\end{matrix}\;x^4 \quad +(y^4+z^4)\begin{pmatrix}24\\-60\\+35\end{pmatrix} \quad +x^2(y^2+z^2)\begin{pmatrix}354\\-300\\+210\end{pmatrix} \quad y^2z^2\begin{pmatrix}48\\-120\end{pmatrix}$$

$$-10x^4 \quad -(y^4+z^4) \quad +54x^2(y^2+z^2) \quad -72y^2z^2$$

$$\frac{3}{4}y^2z^2-\frac{15}{16}2y^2z^2)$$

$$\frac{12-30}{16}y^2z^2=-\frac{18}{16}$$

$$4\alpha^2\left\{\frac{1}{4}-\frac{3x^2+y^2+z^2}{4}+\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{16}(y^2+z^2)+\frac{3}{16}\left[5x^4+y^4+z^4+6x^2(y^2+z^2)+2y^2z^2\right]\right.$$

$$-\frac{15}{32}\left[2x^2+y^2+z^2\right] \qquad -\frac{15}{32}\left[15x^4+2(y^4+z^4)+17x^2(y^2+z^2)+4y^2z^2\right]$$

$$-\frac{1}{4}+\frac{9}{16}-\frac{15}{32}=\frac{-8+18-15}{32}-\frac{5}{32} \qquad \frac{35}{128}\left[30x^4+7(y^4+z^4)+48x^2(\ldots)+12\ldots\right]$$

$$-\frac{35.9}{4.64}\left[2x^4+y^4+z^4+6x^2(\ldots)\right]$$

$$\frac{24x^2}{16}-\frac{15}{16}x^2$$

$$\frac{9x^2}{16}$$

$-\frac{9}{8} - \frac{21}{8} + \frac{75}{32}$

$\frac{3}{8} + \frac{3}{4}$

$= \frac{9}{8}$

$\frac{15}{16} + \frac{5.15}{16} + \frac{15}{32} + \frac{15}{8} + \cancel{}$

$= \frac{15}{32}\left[2 + 10 + 1 + 4\right]$

$\frac{15.\cancel{87}\ \cancel{77}}{32}$

$\frac{5.7}{64}\left[6 + 3 + \frac{6}{2} + 12\right]$

24

$-\frac{15}{8} x^4 \qquad -\frac{3}{8}(y^4 + z^4)$

$-\frac{10}{16}\left(2x^4 + 6x^2(y^2+z^2) + y^4 + z^4\right)$

$+\frac{30}{16} \qquad +\frac{9}{16}$

$-\frac{18}{8} + \frac{3.15}{16} + \cancel{} - \frac{6.15}{64} \quad x^2(y^2+z^2)$

$-\frac{10}{64} \qquad -\frac{5}{64}$

$\frac{5}{8}\cancel{(-3+3)}$

-29
$+36$
$+7$

-144
-90
-234
$+180$
-54
64

-144
-30
174
$+180$
6

$4\alpha^2\Big\{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}(3x^2+y^2+z^2) - \frac{3}{16}\left[12x^2 + 3(y^2+z^2)\right] - \frac{3}{16}\left[5x^4 + y^4 + z^4 + 6x^2(y^2+z^2) + 2y^2z^2\right]$

$+\frac{9}{32}(2x^2+y^2+z^2) \qquad +\frac{9}{32}\left[15x^4 + 2(y^4+z^4) + 15x^2(y^2+z^2) + 4y^2z^2\right]$

$-\frac{15}{128}\left[30x^4 + 7(\quad) + 48x^2(y^2+z^2) + 12y^2z^2\right]$

$\frac{9}{32}(\cancel{8}+2-\cancel{8}) \qquad \frac{24+9-18}{32} = \frac{15}{32}$

$+\frac{7.15}{256}\left[2x^4 + (y^4+z^4) + 6x^2(\ldots) \qquad \right]$

159

$\frac{9}{4} + 3 = \frac{21}{4}$ $\quad 12 + 12 - 24$

$\frac{21}{4} - 9 = -\frac{45}{4}$

$-\frac{15}{4}x^4 - \frac{3}{8}(y^4 + z^4) + \frac{27}{4}x^2(y^2+z^2) - 12y^2z^2$

$15 - 9$ $\quad \frac{9}{2} + \frac{3}{2} =$ $\quad -\frac{15}{8}$

$6x^2 + 3(y^2+z^2)$ $\quad -\frac{3}{16} - \frac{3}{16}$

$-\frac{27}{8} + \frac{3.27}{8} = \frac{27}{4}$

$+\frac{3}{2} - \frac{3.9}{2} = -12$

$-\frac{21}{8} + \frac{3.57}{8}$

$\frac{9}{2} + \frac{3.9}{4} = \frac{9}{2}\frac{5}{2} = \frac{45}{4}$

$-\frac{9}{32} - \frac{63}{32} = -\frac{72}{32}$ $\quad \frac{9}{4}$

$171 - 21 = \frac{150}{8}$

$75 - 3.45 \quad 135 - \frac{60}{32}$ $\quad -\frac{9}{64} - \frac{51}{64}$

$\frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{2}$

$\frac{15}{4} + 3$

$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

$12\xi^2$

$-10x^4 + 18x^2y^2$

$\frac{3}{4}[10 + 1 + 18 - 8]$

$+\frac{1}{4}[10 + 1 - 54 + 72]$

$\frac{84 + 4 + 40 + 4}{4}$

$\frac{9}{2} \quad \frac{15}{8} \quad \frac{75}{32} \quad -\frac{9}{64} \quad -\frac{9}{32} \quad -\frac{21}{8}$

$\frac{9}{4} \quad -\frac{5}{8} \quad -\frac{45}{32} \quad -\frac{17}{64} \quad -\frac{21}{32} + \frac{57}{8}$

$\left[\frac{7}{2} \quad \frac{9}{2} \quad -\frac{15}{16} \quad -\frac{13}{32} \quad -\frac{15}{16} \quad \frac{15}{4} + \frac{5}{4} + \frac{27}{4}\right] \frac{1}{4}$

$\frac{6\alpha^2}{4}\left\{\frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{\xi^2}{4} + \frac{x^4+y^4+6x^2y^2}{16} + 2(x^2-y^2)\left(\frac{\xi}{2} - \frac{(x-y)^2}{4}\right) + \frac{x^4+y^4-2x^2y^2}{4} - (x^4+3x^2y^2)\right\}$

$\frac{3}{4}\alpha^2\left\{2x^2 + y^2z^2 + \xi^2\right.$

Rambles in Scotland

$$r-1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left[x-y+\alpha x\right] + \frac{\xi}{2} - \cancel{\ldots}$$

$$-\frac{1}{4}\left[x(1+\alpha)-y\right]^2$$

$$6\,\frac{1}{2}(x-y)^2\frac{\alpha^2}{4}$$

$$3(2x^2+y^2+2y)$$

$$+\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\alpha\left[x-y\cancel{\ldots}\right] + \frac{\alpha^2}{8}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) + \frac{\xi}{2} - \frac{x^2-2xy+y^2}{4}$$

$$+\alpha\left\{\cancel{\ldots}x - \frac{2x^2-2xy}{4} + \cancel{\ldots} + \frac{1}{2}\right\} + \frac{\alpha^2}{8}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}(x+y)$$

$$(r-1)^4 =$$

$$\int_0^\infty r^2 e^{-(r^2+\alpha r^4)}\cdot 4\pi r^2\,dr = \frac{4\pi^{3/2}}{2}\left[\frac{3}{4} - \frac{3.5.7}{16}\alpha\right] = \frac{3}{2}\pi^{3/2}\left[1-\frac{5.7}{4}\alpha\right]$$

$$-\frac{21}{8} - \frac{7}{2} - \frac{21}{4} - \frac{7}{4} = \frac{21+42+14+28}{8} = \frac{105}{8} = \frac{5.7.3}{8}$$

$$\frac{3}{2} - \frac{3.5.7}{8} = \frac{3}{2}\left[1-\frac{5.7}{4}\right]$$

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{15}{4}$$

$$2\pi^{3/2}\,\frac{35}{8}$$

$$\frac{3}{2}\left[1-\frac{5.7}{4}+\frac{5}{2}\right]$$

$$\begin{array}{r} -35 \\ +10 \\ \hline \end{array}$$

$$1\ -\frac{25}{4}$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{2\rho_1}\left\{1 - 3\frac{\alpha_1}{\rho_1^2} - \frac{\alpha_3}{\rho_1\rho_2}\right\}$$

$$\overline{y^2+z^2} = \frac{1}{\rho_2}\left\{1 - 3\frac{\alpha_2}{\rho_2^2} - \frac{\alpha_3}{2\rho_1\rho_2} - \frac{\alpha_4}{2\rho_2^2}\right\}$$

$$F_2 = \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_1}{\rho_1^2} - 3\frac{\alpha_2}{\rho_2^2} - \frac{\alpha_3}{\rho_1\rho_2} - \frac{\alpha_4}{2\rho_2^2}\right]$$

$$F_3 = \frac{3}{4}\frac{\alpha_1}{\rho_1^2} + \frac{3}{2}\frac{\alpha_2}{\rho_2^2} + \frac{\alpha_3}{2\rho_1\rho_2} + \frac{\alpha_4}{4\rho_2^2}$$

24 8

-18 $-\frac{15}{2}$

-9 $+\frac{5}{2}$

-3 $+3$

$$\frac{3x^2}{8}\left[\frac{(1+2x^2)}{\sqrt{6}} - \frac{2\sqrt{3}\,x}{\sqrt{6}} + 2\sqrt{3}\right]$$

$$(1+2x^2)\left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}(x^2+y^2) + \dots - \dots\dots - x^2 + x + \dots - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]$$

$$1 + \frac{3}{4}(x^2+y^2) + 2x^2 - 2x^2 + 2 + \frac{\xi}{2} - \frac{x^2+y^2}{2}$$

$$3 + \frac{x^2+y^2}{4} + \frac{\xi}{2}$$

$$6 + \xi + \frac{2x^2+y^2+z^2}{4} = \left[6 + \frac{6x^2+5(y^2+z^2)}{4}\right]\frac{3x^2}{2}$$

$$= 9 + \frac{9x^2}{4} + \frac{15(y^2+z^2)}{8}$$

$\frac{(x-\mu)^2}{8}$

$\left[\overline{(x-\mu)^2}\right.$

$$(r-1)^4 = \left[-\frac{\sqrt2}{2}(x-y) + \cancel{\frac{\xi}{2}} - \cancel{\frac{x^2-2xy+y^2}{4}}\right]^4 + 4\alpha\left\{\frac12\left[-\frac{\sqrt2}{2}(x-y)+\frac{\xi}{2}-\frac{(x-y)^2}{4}\right]^3 + \frac{\frac{\sqrt2}{4}(x+y)}{2\sqrt2}(x-y)^3\right\}$$

$$+ 6\alpha^2\left\{\left[-\frac{\sqrt2}{2}(x-y)+\frac{\xi}{2}-\frac{(x-y)^2}{4}\right]^2\left[\frac12-\frac{\sqrt2}{4}(x+y)-\frac{x^2-xy}{2}\right]^2\right\}$$

$$-\frac{\xi}{4}+\frac{3(x-y)^2}{8}$$

$$+\frac{\alpha^2}{2}\left[-\frac{\sqrt2}{2}(x-y)+\frac{\xi}{2}-\frac{x^2-2xy+y^2}{4}\right]^3$$

$$= \frac14(x^4+y^4+6x^2y^2)$$

$$+4\alpha\left\{\frac12\,\frac32(x-y)^2\left[\frac{\xi}{2}-\frac{(x-y)^2}{4}\right] + \frac{(x^2-y^2)(x-y)^2}{8}\right\}$$

$$+\frac{6\alpha^2}{4}\left\{\left[-\frac{\sqrt2}{2}(x-y)+\frac{\xi}{2}-\frac{(x-y)^2}{4}\right]^2 - \frac{\sqrt2}{4}(x+y)\left[\frac{(x-y)^2}{2} - \sqrt2(x-y)\left(\frac{\xi}{2}-\frac{(x-y)^2}{4}\right)\right]\right.$$

$$\left. + \frac{(x-y)^2}{2}\left[\frac14(x+y)^2 - \frac{x^2-xy}{2}\right] + 4\,\frac{(x-y)^2}{2}\left[-\frac{\xi}{4}+\frac{3(x-y)^2}{8}\right]\right\}$$

$$+\frac{\alpha^2}{2}\left\{\frac32(x-y)^2\left[\frac{\xi}{2}-\frac{x^2-2xy+y^2}{4}\right]\right.$$

$$+\frac{3\alpha^2}{8}\left[\xi(2x^2+y^2+z^2) - \frac{2x^4+y^4+z^4+6x^2(y^2+z^2)}{2}\right]$$

$$\frac{4\alpha}{8}\left\{3\left[(x-y)^2\xi - \frac{(x-y)^4}{2}\right] + (x^2-y^2)(x-y)^2\right\} = \cancel{\frac{4\alpha(x-y)^2}{8}\left\{3\left[\xi-\frac{(x-y)^2}{2}\right]+x^2-y^2\right\}}$$

$$\left\{3x^2\xi + 3y^2\xi - \frac{3(x^4+y^4)}{2} - 9x^2y^2 + x^4 - y^4\right\}$$

$$\cancel{x^4\left(3-\frac32+1\right)+y^4\left(3-\frac32-1\right)}$$

$$3x^2\xi + \cancel{3(y^2+z^2)\xi} - 3x^4 - \frac32(y^4+z^4) - 9x^2(y^2+z^2)$$

$$+3\xi^2 \qquad +2x^4-y^4-z^4$$

$$= \cancel{x^4(6-3+2)+(y^4+z^4)}$$

$$= x^4(3+3-3+2) + (y^4+z^4)\left(3-\frac32-1\right)$$

$$+x^2(y^2+z^2)(\cancel{3+6-9}) + \cdot \qquad = 5x^4 + \frac{y^4+z^4}{2} + 6(y^2+z^2)$$

$$U = \varphi(\theta)\cdot V$$

$$p = \frac{\varphi(\theta)}{3}$$

$$\varphi\, dV + \frac{\varphi}{3}\, dV + V\,d\varphi = T\,dS = \frac43\varphi\, dV + V\,d\varphi$$

$$T\frac{\partial S}{\partial\varphi} = V \qquad T\frac{\partial S}{\partial V} = \frac43\varphi$$

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{V}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac43\frac{\varphi}{T}\right)$$

$$\frac1T = \frac43\frac1T - \frac43\frac{\varphi}{T^2}\frac{\partial T}{\partial\varphi}$$

$$\frac13\varphi = T \qquad \frac{dT}{T} = \frac{d\varphi}{4\varphi} \qquad \varphi = T^4$$

$$\sum_{1,2,9,10} r = 4\left(1+\frac{\delta}{2}\right) + \frac{1+\frac{\delta}{2}}{\sqrt2}(x_1+x_2-x_9-x_{10}) + \frac{1-\frac{\delta}{2}}{\sqrt2}(y_2+y_9-y_1-y_{10}) + \frac{1-\frac{\delta}{2}}{2}\sum\left[(x_0-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\right]$$

$$-\frac{1+\frac{\delta}{2}}{4}\sum(x-x_1)^2 - \frac{1-\frac{3\delta}{2}}{4}\sum(y-y_1)^2 + \frac{1-\frac{\delta}{2}}{2}\Big[x(y_2+y_{10}-y_1-y_9)+y(x_2+x_{10}-x_1-x_9)$$
$$+x_1y_1+x_9y_9-x_2y_2-x_{10}y_{10}\Big]$$

$$\sum_{3,4,11,12} r = 4\left(1+\frac{\delta}{2}\right) + \frac{1+\frac{\delta}{2}}{\sqrt2}(x_3+x_4-x_{11}-x_{12}) + \frac{1-\frac{\delta}{2}}{\sqrt2}(z_4+z_{12}-z_3-z_{11}) + \frac{1-\frac{\delta}{2}}{2}\sum\left[(x-x_3)^2+(y-y_3)^2+(z-z_3)^2\right]$$

$$-\frac{1+\frac{\delta}{2}}{4}\sum(x-x_3)^2 - \frac{1-\frac{3\delta}{2}}{4}\sum(z-z_3)^2 + \frac{1-\frac{\delta}{2}}{2}\Big[x(z_4+z_{11}-z_3-z_{12})+z(x_4+x_{11}-x_3-x_{12})$$
$$+x_3z_3+x_{12}z_{12}-x_4z_4-x_{11}z_{11}\Big]$$

$$\sum_{5,7,6,8} r = 4 + \frac{1}{\sqrt2}(y_6+y_8-y_5-y_7) + \frac{1}{\sqrt2}(z_5+z_6-z_7-z_8) + \frac12\sum\left[(x-x_5)^2+(y-y_5)^2+(z-z_5)^2\right]$$

$$-\frac14\sum(y-y_5)^2 - \frac14\sum(z-z_5)^2 + \frac12\Big[y(z_6+z_7-z_5-z_8)+z(y_6+y_7-y_5-y_8)$$
$$+y_5z_5+y_8z_8-y_6z_6-y_7z_7\Big]$$

$$\sum_{1-12} r = 12+4\delta + \frac{1+\frac{\delta}{2}}{\sqrt2}(x_1+x_2+x_3+x_4-x_9-x_{10}-x_{11}-x_{12}) + \frac{1-\frac{\delta}{2}}{2}(y_2+y_9-y_1-y_{10}+z_4+z_{12}-z_3-z_{11})$$
$$+\frac{1}{\sqrt2}(y_6+y_8-y_5-y_7+z_5+z_6-z_7-z_8)$$

$$\frac{1+\frac{\delta}{2}}{2}\,8(x^2+y^2+z^2) + 12(x^2+y^2+z^2) + \frac{1-\frac{\delta}{2}}{2}\sum_{x,y,z}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_9^2+x_{10}^2+x_{11}^2+x_{12}^2)$$
$$+\frac12\sum_{x,y,z}(x_5^2+x_7^2+x_6^2+x_8^2)$$

$$+\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\Big[x(x_1+x_2+x_9+x_{10}$$

$$(r^4_6) = 1+\frac{\delta}{2} - \frac{x_6-x_4}{\sqrt2}\left(1+\frac{\delta}{2}\right) + \frac{y_6-y_4}{\sqrt2}\left(1-\frac{\delta}{2}\right) + \frac{\left[(x_6-x_4)^2+(y_6-y_4)^2+(z_6-z_4)^2\right]\left(1-\frac{\delta}{2}\right)}{2}$$

$$-\frac{1+\frac{\delta}{2}}{4}(x_6-x_4)^2 - \frac{1-\frac{3\delta}{2}}{4}(y_6-y_4)^2 + \frac{1-\frac{\delta}{2}}{2}\left[(x_6-x_4)(y_6-y_4)\right]$$

$$(r^4_5) = 1+\frac{\delta}{2} - \frac{x_5-x_4}{\sqrt2}\left(1+\frac{\delta}{2}\right) + \frac{y_4-y_5}{\sqrt2}\left(1-\frac{\delta}{2}\right) + \frac{\left[(x_5-x_4)^2+\dots\right.}{2} \;\dots$$

$$-\frac{1+\frac{\delta}{2}}{4}(x_5-x_4)^2 - \frac{1-\frac{3\delta}{2}}{4}(y_5-y_4)^2 + \frac{1-\frac{\delta}{2}}{2}\left[(x_5-x_4)(y_4-y_5)\right]$$

$$(r^6_{12}) = 1+\frac{\delta}{2} - \frac{x_{12}-x_6}{\sqrt2}\left(1+\frac{\delta}{2}\right) + \frac{y_6-y_{12}}{\sqrt2}\left(1-\frac{\delta}{2}\right) + \dots$$

$$-\frac{1+\frac{\delta}{2}}{4}(x_6-x_{12})^2 - \frac{1-\frac{3\delta}{2}}{4}(y_6-y_{12})^2 + \frac{1-\frac{\delta}{2}}{2}\left[(x_{12}-x_6)(y_6-y_{12})\right]$$

$$(r^5_{12}) = 1+\frac{\delta}{2} - \frac{(x_{12}-x_5)\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}{\sqrt2} + \frac{(y_{12}-y_5)}{\sqrt2}\left(1-\frac{\delta}{2}\right) + -$$

$$\text{——— ——— ———}\quad \frac{\left(1-\frac{\delta}{2}\right)}{2}\left[(x_{12}-x_5)(y_{12}-y_5)\right]$$

$$\sum r = 4\left(1+\frac{\delta}{2}\right) - 2\,\frac{1+\frac{\delta}{2}}{\sqrt2}(x_{12}-x_4) + 2\left(\frac{1-\frac{\delta}{2}}{\sqrt2}\right)(y_6-y_5) + \frac{1-\frac{\delta}{2}}{2}\sum_{x,y,z}\sum_{\substack{6,4\\5,4\\6,12\\5,12}}(x_6-x_4)^2 - \frac{1+\frac{\delta}{2}}{4}\sum_{\substack{6,4\\5,4\\6,12\\5,12}}(x_6-x_4)^2 - \frac{1-\frac{3\delta}{2}}{4}\sum(y_6-y_4)^2 \;\vdots$$

$$+\frac{1-\frac{\delta}{2}}{2}\Big[(x_6-x_4)(y_6-y_4)+(x_5-x_4)(y_4-y_5)+(x_{12}-x_6)(y_6-y_{12})+(x_{12}-x_5)(y_{12}-y_5)\Big]$$

$$\sum_{\substack{1-12\\ \frac{1}{2}(13-36)}} r^2 = 24 + 16\delta + (1+\delta)2\sqrt{2}\left[x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_9 - x_{10} - x_{11} - x_{12}\right]$$

$$+2\sqrt{2}\left[y_2 + y_9 + y_6 + y_8 - y_1 - y_{10} - y_5 - y_7\right]$$

$$+2\sqrt{2}\left[z_4 + z_5 + z_6 + z_{12} - z_3 - z_7 - z_8 - z_{11}\right]$$

$$+ 12(x^2+y^2+z^2) - 2\left(x \sum_{12} x + y \sum_{12} y + z \sum_{12} z\right) + 3 \sum_{12}(x^2+y^2+z^2) -$$

$$- \sum \begin{pmatrix} x_4x_5 + x_4x_6 + x_6x_{12} + x_5x_{12} + x_3x_8 + x_3x_7 + x_{11}x_8 + x_{11}x_7 \\ + x_2x_6 + x_2x_8 + x_9x_6 + x_9x_8 + x_1x_5 + x_1x_7 + x_{10}x_5 + x_{10}x_7 \\ + x_2x_1 + x_2x_3 + x_4x_4 + x_1x_3 + x_9x_{12} + x_9x_{11} + x_{10}x_{12} + x_{10}x_{11} \end{pmatrix}$$

$$\sum r = 24 + 8\delta + \frac{2+\delta}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_9 - x_{10} - x_{11} - x_{12}) + \frac{2-\frac{\delta}{2}}{\sqrt{2}}(y_2 + y_9 + y_6 + y_8 - y_1 - y_{10} - y_5 - y_7)$$

$$+ \frac{2-\frac{\delta}{2}}{\sqrt{2}}(z_4 + z_{12} + z_6 + z_5 - z_3 - z_{11} - z_8 - z_7) + \frac{1-\frac{\delta}{2}}{2}\Big[x(y_2 + y_{10} - y_1 - y_9 + z_4 + z_{11} - z_3 - z_{12}) +$$

$$+ y(x_2 + x_{10} - x_1 - x_9) + \cancel{(z_6 + z_7 - z_5 - z_8)} + z(x_4 + x_{11} - x_3 - x_{12}) + \cancel{(y_6 + y_7 - y_5 - y_8)}\Big] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[y(z_6 + z_7 - z_5 - z_8) + z(y_6 + y_7 - y_5 - y_8)\right] +$$

$$+ \frac{1-\frac{\delta}{2}}{2}\left[x_1y_1 + x_9y_9 - x_2y_2 - x_{10}y_{10} + x_3z_3 + x_{12}z_{12} - x_4z_4 - x_{11}z_{11}\right] + \frac{1}{2}\left[y_5z_5 + y_8z_8 - y_6z_6 - y_7z_7\right]$$

$$+ (4-3\delta)x^2 + \left(4-\frac{\delta}{2}\right)(y^2+z^2) - 2x\left\{\frac{\left(1-\frac{3\delta}{2}\right)}{4}\left[x_1 + x_2 + x_9 + x_{10} + x_3 + x_4 + x_{11} + x_{12}\right] + \frac{1}{2}\left[x_5 + x_7 + x_6 + x_8\right]\right\}$$

$$- 2y\left\{\frac{\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}{4}\left[y_2 + y_9 + y_1 + y_{10}\right] + \frac{\left(1-\frac{\delta}{2}\right)}{2}\left[y_3 + y_4 + y_{11} + y_{12}\right] + \frac{1}{4}\left[y_5 + y_7 + y_6 + y_8\right]\right\}$$

$$- 2z\left\{\frac{\left(1-\frac{\delta}{2}\right)}{2}\left[z_1 + z_2 + z_9 + z_{10}\right] + \frac{1}{4}\left[z_5 + z_7 + z_6 + z_8\right] + \frac{\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}{4}\left[z_3 + z_4 + z_{11} + z_{12}\right]\right\}$$

$$+ \frac{\left(1-\frac{3\delta}{2}\right)}{4}\left[x_1^2 + x_2^2 + x_9^2 + x_{10}^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_{11}^2 + x_{12}^2\right] + \frac{1}{2}\left[x_5^2 + x_7^2 + x_6^2 + x_8^2\right] +$$

$$+ \frac{\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}{4}\left[y_2^2 + y_9^2 + y_1^2 + y_{10}^2\right] + \frac{\left(1-\frac{\delta}{2}\right)}{2}\left[y_3^2 + y_4^2 + y_{11}^2 + y_{12}^2\right] + \frac{1}{4}\left[y_5^2 + y_7^2 + y_6^2 + y_8^2\right]$$

$$+ \frac{1-\frac{\delta}{2}}{2}\left[z_1^2 + z_2^2 + z_9^2 + z_{10}^2\right] + \frac{1}{4}\left[z_5^2 + z_7^2 + z_6^2 + z_8^2\right] + \frac{1+\frac{\delta}{2}}{4}\left[z_3^2 + z_4^2 + z_{11}^2 + z_{12}^2\right]$$

$$(8)\sum r\perp z = 8\left(1+\tfrac{\delta}{2}\right) - \frac{2\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}{\sqrt2}(x_{12}+x_{11}-x_4-x_3) + \frac{2\left(1-\frac{\delta}{2}\right)}{\sqrt2}(y_6+y_8-y_5-y_7) +$$

$$+ \cancel{\frac{1-\frac{\delta}{2}}{2}\sum} + \sum_{\substack{6,4 \quad 8,3\\ 5,4 \quad 7,3\\ 6,12 \quad 8,11\\ 5,12 \quad 7,11}} \left\{ \frac{1-\frac{\delta}{2}}{2}\sum_{x,y,z}(x_6-x_4)^2 - \frac{1+\frac{\delta}{2}}{4}(x_6-x_4)^2 - \frac{1-\frac{3\delta}{2}}{4}(y_6-y_4)^2 \right\}$$

$$+ \frac{1-\frac{\delta}{2}}{2}\Big[(x_6-x_4)(y_6-y_4)+(x_5-x_4)(y_4-y_5)+(x_{12}-x_6)(y_6-y_{12})+(x_{12}-x_5)(y_{12}-y_5)$$
$$+(x_8-x_3)(y_8-y_3)+(x_7-x_3)(y_3-y_7)+(x_{11}-x_8)(y_8-y_{11})+(x_{11}-x_7)(y_{11}-y_7)\Big]$$

$$(8)\sum r\perp y = 8\left(1+\tfrac{\delta}{2}\right) - \frac{2\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}{\sqrt2}(x_9+x_{10}-x_1-x_2) + \frac{2\left(1-\frac{\delta}{2}\right)}{\sqrt2}(z_6+z_5-z_8-z_7)$$

$$+ \sum_{\substack{6,2 \quad 5,1\\ 2,8 \quad 1,7\\ 8,9 \quad 7,10\\ 9,6 \quad 10,5}} \left\{ \frac{1-\frac{\delta}{2}}{2}\sum_{x,y,z}(x_6-x_2)^2 - \frac{1+\frac{\delta}{2}}{4}(x_6-x_2)^2 - \frac{1-\frac{3\delta}{2}}{4}(z_6-z_2)^2 \right\}$$

$$+ \frac{1-\frac{\delta}{2}}{2}\Big[(x_6-x_2)(z_6-z_2)+(x_8-x_2)(z_2-z_8)+(x_9-x_6)(z_6-z_9)+(x_9-x_8)(z_9-z_8)$$
$$+(x_5-x_1)(z_5-z_1)+(x_7-x_1)(z_1-z_7)+(x_{10}-x_5)(z_5-z_{10})+(x_{10}-x_7)(z_{10}-z_7)\Big]$$

$$(8)\sum r\perp x = 8 \qquad - \frac{2}{\sqrt2}(y_1+y_{10}-y_2-y_9) + \frac{2}{\sqrt2}(z_4+z_{12}-z_3-z_{11})$$

$$+ \sum_{\substack{4,2 \quad 12,9\\ 2,3 \quad 9,11\\ 3,1 \quad 11,10\\ 1,4 \quad 10,12}} \left\{ \frac12 \sum_{x,y,z}(x_4-x_2)^2 - \frac14(y_4-y_2)^2 - \frac14(z_4-z_2)^2 \right\}$$

$$\sum r = 24 + 8\delta + 2\frac{1+\frac{\delta}{2}}{\sqrt2}(x_1+x_2+x_3+x_4-x_9-x_{10}-x_{11}-x_{12}) + \frac{2-\frac{\delta}{2}}{\sqrt2}(y_2+y_9+y_6+y_8-y_1-y_{10}-y_5-y_7)$$

$$+ \frac{2-\frac{\delta}{2}}{\sqrt2}(z_4+z_{12}+z_6+z_5-z_3-z_{11}-z_8-z_7) + \cancel{\frac{1}{\sqrt2}(y_6+y_8+y_2+y_9-y_5-y_7-y_1-y_{10})}$$

$$\cancel{+\frac{1}{\sqrt2}(z_5+z_6+z_4+z_{12}-z_7-z_8-z_3-z_{11})}$$

$$+ \frac{1-\frac{\delta}{2}}{2}\Big[x(y_2+y_{10}-y_1-y_9+z_4+z_{11}-z_3-z_{12}) + y(x_2+x_{10}-x_1-x_9+z_6+z_7-z_5-z_8)$$
$$+z(x_4+x_{11}-x_3-x_{12}+y_6+y_7-y_5-y_8)\Big]$$

$$-\frac{\delta}{4}+\frac{3\delta}{8}$$

$$+ \frac{1-\frac{3\delta}{2}}{4}\sum_{\substack{k=1,2,9,10\\3,4,11,12}}(x-x_k)^2 + \frac12\sum_{k=5,7,6,8}(x-x_k)^2 + \frac{1+\frac{\delta}{2}}{4}\sum_{k=1,2,9,10}(y-y_k)^2 + \frac14\sum_{k=5,7,6,8}(y-y_k)^2 + \frac{1-\frac{\delta}{2}}{2}\sum_{3,4,11,12}(y-y_k)^2$$

$$+ \frac{1-\frac{\delta}{2}}{2}\sum_{k=1,2,8,10}(z-z_k)^2 + \frac14\sum_{k=5,7,6,8}(z-z_k)^2 + \frac{1+\frac{\delta}{2}}{4}\sum_{k=3,4,11,12}(z-z_k)^2$$

$$+ \frac{1-\frac{\delta}{2}}{2}\left[x_1y_1+x_9y_9-x_2y_2-x_{10}y_{10}+x_3z_3+x_{12}z_{12}-x_4z_4-x_{11}z_{11}\right] + \frac12\left[y_5z_5+y_8z_8-y_6z_6-y_7z_7\right]$$

$$r_a^2 = 1+\delta - (1+\delta)(x-x_a)\sqrt{2} + (y-y_a)\sqrt{2} + (x-x_a)^2 + (y-y_a)^2 + (z-z_a)^2$$

$$r_b^2 = 1+\delta - (1+\delta)(x-x_b)\sqrt{2} - (y-y_b)\sqrt{2} +$$

$$r_i^2 = 1+\delta + (1+\delta)(x-x_i)\sqrt{2} - (y-y_i)\sqrt{2} + \dots$$

$$r_k^2 = 1+\delta + (1+\delta)(x-x_k)\sqrt{2} + (y-y_k)\sqrt{2} + \dots$$

$$\sum_{abik} r^2 = 4(1+\delta) + (1+\delta)\sqrt{2}(x_a+x_b-x_i-x_k) + \sqrt{2}(y_b+y_i-y_a-y_k) + 4(x^2+y^2+z^2)$$
$$-2x(x_a+x_b+x_i+x_k) - 2y(y_a+y_b+y_i+y_k) - 2z(z_a+z_b+z_i+z_k) +$$
$$x_a^2+x_b^2+x_i^2+x_k^2 + y_a^2+y_b^2+y_i^2+y_k^2 + z_a^2+z_b^2+z_i^2+z_k^2$$

$$\sum_{1-12} r^2 = 12+8\delta + (1+\delta)\sqrt{2}\left[x_1+x_2+x_3+x_4-x_9-x_{10}-x_{11}-x_{12}\right]$$
$$+\sqrt{2}\left[y_2+y_9+y_6+y_8-y_1-y_{10}-y_5-y_7\right]$$
$$+\sqrt{2}\left[z_4+z_5+z_6+z_{12}-z_3-z_7-z_8-z_{11}\right]$$
$$+12(x^2+y^2+z^2) - 2(x\Sigma x + y\Sigma y + z\Sigma z) + \Sigma x^2 + \Sigma y^2 + \Sigma z^2$$

$$(r_6^4)^2 = \left[\frac{(1+\delta)\sqrt{2}}{2} + x_4 - x_6\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + y_6 - y_4\right]^2 + (z_4-z_6)^2$$
$$= 1+\delta + \sqrt{2}(1+\delta)(x_4-x_6) + \sqrt{2}(y_6-y_4) + (x_4-x_6)^2 + (y_4-y_6)^2 + (z_4-z_6)^2$$

$$(r_5^4)^2 = 1+\delta + \sqrt{2}(1+\delta)(x_4-x_5) + \sqrt{2}(y_4-y_5) + (x_4-x_5)^2 + (y_4-y_5)^2 + (z_4-z_5)^2$$

$$(r_{12}^6)^2 = 1+\delta + \sqrt{2}(1+\delta)(x_6-x_{12}) + \sqrt{2}(y_6-y_{12}) + (x_6-x_{12})^2 + (y_6-y_{12})^2 + (z_6-z_{12})^2$$

$$(r_{12}^5)^2 = 1+\delta + \sqrt{2}(1+\delta)(x_5-x_{12}) + \sqrt{2}(y_{12}-y_5) + (x_5-x_{12})^2 + (y_5-y_{12})^2 + (z_5-z_{12})^2$$

$$\sum_4 (r_\perp z)^2 = 4(1+\delta) + 2\sqrt{2}(1+\delta)(x_4-x_{12}) + 2\sqrt{2}(y_6-y_5) + 2\sum_{xyz}\left[x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_{12}^2 - x_4x_5 - x_4x_6 - x_6x_{12} - x_5x_{12}\right]$$

$$\sum_{(8)} (r_{\perp z})^2 = 8(1+\delta) + 2\sqrt{2}(1+\delta)(x_4+x_3-x_{11}-x_{12}) + 2\sqrt{2}(y_6+y_8-y_5-y_7)$$
$$+2\sum_{\substack{xyz\\45612\\37118}} x^2 - 2\sum_{xyz}(x_4x_5+x_4x_6+x_6x_{12}+x_5x_{12}+x_3x_8+x_3x_7+x_{11}x_8+x_{11}x_7)$$

$$(r_6^2)^2 = \left(\frac{1+\delta}{\sqrt{2}} + x_2 - x_6\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + z_6 - z_2\right)^2 + (y_6-y_2)^2$$

$$\sum_{(8)} (r_\perp y)^2 = 8(1+\delta) + 2\sqrt{2}(1+\delta)(x_2 + x_1 - x_9 - x_{10})$$
$$+2\sqrt{2}(z_5+z_6-z_7-z_8)$$
$$+2\sum_{xyz} x^2 - 2\sum_{xyz}(x_2x_6+x_2x_8+x_9x_6+x_9x_8+x_1x_5+x_1x_7+x_{10}x_5+x_{10}x_7)$$

$$(r_4^2)^2 = (x_2-x_4)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + y_2 - y_4\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + z_4 - z_2\right)^2$$

$$\sum_{(8)} (r_\perp z)^2 = 8 + 2\sqrt{2}(y_2+y_9-y_1-y_{10}) + 2\sqrt{2}(z_4+z_{12}-z_3-z_{11})$$
$$+2\sum_{xyz} x^2 - 2\sum_{xyz}(x_4x_2+x_2x_3+x_4x_1+x_1x_3+x_{12}x_9+x_9x_{11}+x_{10}x_{12}+x_{10}x_{11})$$

163

cable lost in 1865

1866 within ¼ mile found place

2100 fathoms

Kelvin hydrodyn 1880

Stability of laminar motion 1887 ||

Minimum wave velocity (capillarity) 18 ~~7~~1

Stability

Gravitational oscill. of liquid mass 1863

Stationary waves in flowing water 1886

1887

On Vibr. of electric sphere 1882

Ships waves 1887

Deep water ship waves 1905

Tidal Wave 1871

On an alleged error in Laplace's Th. of Tides 1875

On Forces exp. by solids immersed in liquid 1870

On motion of rigid solids in liquid 1873

Notes on Oscill. of ... Tides 1875

Gravitational oscill. of rotating water 1879

Helmholtz 1858

Theory of vortex atoms 1867

Vibrations of columnar vortex 1880

Simple proof of Helmholtz on Vortex motion 1869

Generalized word. 1867

Against surfaces of discontin. 1894

On Vis viva of liquids in motion 1849

Notes on Hydrodyn. 1848

Initiation of deep sea waves 1906

Fourier etc.
Conduction of Heat. 1841 ||
1842 ||
1843 |||
1844 ||

1847 |

Elektrostatik etc. 1843
1845 ||||
1846 ||
induced magnetism 1846 in crystals 1850 || 1851
etc. 1847 ||||
1848 ||| Absolute Units 1851
1850
1852 ||

Hydrodyn. 1848, 1849

Absol. Thermometric scale 1848

(Influenced by Joule 1847 Oxford)

Equilibrium of vapour at curved liquid surface 1870

Carnot's th. of the motive power of heat 1849

Lowering of freezing point expans. 1850 Alteration of temp. by pressure of fluids 1857

Dynamical Th of Heat 1851, 1853 Fluids in Motion Joule & Th 1852

Thermoelectr. ~~[illegible]~~ 1851, 1854 Thomson Effect etc., Dv'l Le Roux 1867

Dissipation 1852

Experim. Res. in Thermoelectr. 1854

Convective equilibrium of atmosphere 1862

Thomson Regel: Joule 1841
Helmholtz 1847
Thomson 1851
Clausius 1867
G. Galvanism

Helmholtz 1882

There cannot be a greater mistake than that of looking superciliously upon practical applications of science. The life & soul of science is its practical application

in physical science many of the greatest advances that have been made from the beginning of the world to the present time have been made in the earnest desire to turn the knowledge of the properties of matter to some purpose useful to mankind. Pop L I p. 86

Absolute Units Gauss- Weber - Kohlr 1852 1856

~~Thom~~ Th.: began 1851 advocating obtained in 1861 the appointment of BA Committee on Electr Standards

Ω & Sm 2% Internat Congr 1881 Paris endgültig .616

Metrical system I p 312!

II p. 547

Electromagn Th teaches us nothing of the actual motions of matter constituting a magnetic wave

rifle volunteer I p 456

Gradient elektrom. 1855, 1857, 1858, ~~1860~~

Absol. Elm. 1860, 1867 Schutzring

Thomson Brücke für Elc. 1862 [illegible] Kontakt [illegible]

Tropfenkollektor 1860?

Siphon recorder ——→ Dynam d'Arsonval

Sammlung neben [illegible]

Pyrometer 1878?

Stromwage 1881

Spiegelgalvanom.

Vertikalgalvanom. 1885

μ = permeability, magnetisation

Krystallmagnetism. 1851

Oscill. Cond. [illegible] 1853

[illegible] 1890

Absol. [illegible] = [illegible]

v { Weber Kohlr. 1856
Thomson 1869

1901: Kabellänge: 358.148 km

Kompass 30 g. Regulg (Flinders)

165

Reprint of Papers on Elektricität

Nature 71 $\overset{1905}{72}$ $\overset{1906}{73 \quad 74}$ $\overset{1907}{75}$

Poggendorff Biogr. Lit. Handw.

70520 III

Rorhan: Erweiterung einer Th.

d. S. v. Dulong u. Petit

SA a. d. Sitz. Ber. d. Ges. z. Beförd.

d. ges. Naturw. Marburg 1906 p. 187–196

$$Ac_v = 6{,}812 - \frac{N}{J}\frac{\partial \overline{F}_4}{\partial \theta}$$

$$J(c_p - c_v)\frac{\partial v}{\partial p} = -\vartheta\left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta}\right)^2$$

Electrol. 1853

~~Electro~~ Magnetism 1855 |||

Effects of Strain on thermoelectric 1855 etc ||
1856

Effects of Stress on magnetization 1875 ||
1878 ||

Mechanical Energies of Solar System 1854

Elasticity & Heat (Encyclop.) 1878

1854: Sun by meteors, later adopted Helmholtz 1862 1868
On geologic time

Reduction of Underground temper. 1860
1889

Age of Sun's Heat 1862

Secular Cooling of Earth 1862

Rigidity of Earth 1862, 1876
etc

Elastic spherical shells 1863

review of physical evidence on earth 1876

Internal condition of earth 1878

Tidal Retardation of Earth's Rot. 1866

Thermodynam. accel. of Earth's Rot. 1882

Size of atoms (ref) 1870 ~~1883~~ ~~1889~~ Lectures 1862, 64

Molecular Constitution of matter (1889
(Bravais etc)

Gyrostatic constitution of ether 1889, 1890,
etc

Electricity viewed as possibly a mode of motion 1881

Fourier's Heat and Signalling thr Cables 1856 166

Electric Telegraph 1855 |||
1856 ||
1859 |

Velocity of El. 1860 ||
1861 |

Forces Laying Cables 1865

Signalling. 1873

Plans 1856 with use of mirror galvan.
first used in 1858 Atlantic cable
during its few weeks of life
and next in 1866 on the finally
successful Atl. cables of 1865, 1866
From that time til now, all except
that is done by syphon recorder (1867– (1870) Singly-ped
which is used now for – more (1873)
th 2–300 miles

Experimental trip Biscay May 1858
Defectively laid by Atl. Tel. Co from
Valentia to Newfoundland (1670 miles) 1858
failure, electric faults

1865 laid 1200 miles broke
Had been present on Great Eastern

1670 ~~1800~~
1.336
3000 km

Capillarity 1886

Summer's method 1871
influence of straits of Dover on tides 1878
Harmonic analyser 1876, 1878, 1881 Tides 1882
Tide predictor 1876
Convective equilib. atmosph. 1865

Dyn. th. of heat 1852–56
Thermal effects of air 1852 1853–62

Atmosph. electr. 1860

Vortex atoms 1867

Compass 1874 1879 1881
Deep sounding by piano wire 1872 1874
New sounding machine 1882

Adjustable deflector for correcting errors of compass 1878
Standard Comp. adopted by Admiralty 1889
Rate of clock as chronometer 1867
New astronomical clock 1869
Lighthouse characteristics 1881

Dissociation case 1892
Kin. th. of matter 1884, 1889, 1885,

Vortex theory of luminif. ether 1887
Constit. gyrostat. &c. — 1889

Stability of fluid motion 1891
1886
1887

Ship waves 1887

Elasticity of crystals Boscovich 1893
Homog. div. of space 1894

Balances 1888

Experim. dem. of the effect of pressure in lowering freez. point of water 1850

Measure of elec. force produced by Da. battery 1860

Diff. of pot. req. to produce spark 1860

Meas. of elect. resist. 1862

II p. 383
Yacht Lalla Rookh a small sailing schooner of 126 tons 1877
Madeira 1874
Brazil 1872
Madeira 1873
Hooper exped. for Para cable 1873

J J Thomson Vib. of vortex rings
On Vortex motion Adams prize 1882
Motion & action of 2 or more vortex rings 1884 London 1881

Electrif. of air (Salt) Kelvin Maclean 1895, 1898

Sellmeier's th. of lines D, D_2 — (1899)
Dyn. th. of refract. dispersion 1898

Age of Earth Phil Mag. 1899 !

Silvanus Phillips Thompson 1851
technic. Coll. London

J J Th. 1857
1884 Cavend. Prof.

Thomson James sen. 1786 Ballynahinch Down Co Irland
1814 Lehrer an d. Roy. Belfast Acad. Inst.
+ 1849 Glasgow

1832 ~~Mitgl. d. RSE~~ Prof. d. Math. in Glasgow Univ.

Tho. J. 1822 Belfast 1857 Pf. civil engineering Belfast, dann
+ 1892 Glasgow Pf. mechan. Glasgow Univ

Tho. Sir Will. 1824 26/6 Belfast Smith's Preis 1845 second wrangler first: Parkinson

student Univ. 1834 stud. in Glasgow & Camb. u. d. g. in Paris

1846 Prof d Phys. a. d. Univ. Glasgow; Sir seit 1866; 1851 Mitgl. d. R S.
verheirat 1899 . 1877 Paris. Akad.

Nature London 14 (1876)

G. Vapereau Diction. univ. des Contemporains 5 éd. Paris 1880 6 éd. 1893

Sketch of elem. dynamics Edinb. 1863 44 p.

Treatise – Oxford 1867 (2 ed).

Reprint of pap. on electrost. & magn. Lond. 1872

Navigation 1875

James Watt 1901

Elem. of nat. phil. 1873 (2 ed.)

Tafeln Sumner

Elast. & Heat Edinb. 1880 Encyclop. Brit.

Math. phys. pap. 2 vol. 1 – 1841 – 1845 Fourier, Electric. etc. Magn. ind.

Thermoelectricity
1855 submar. telegr. etc. – 1864, 1866,
1854, 1857

Tides: 1878, 1875

Earth 1864 Doctrine of uniformity refuted 1866 Theory of Laplace 1871
Age of sun's heat 1862 1863 Internal fluidity 1872 Internal cond. of earth 1882
Tidal retard. of earth's rot. 1866 Underground temp. 1878
Rigidity of earth 1863

1) $\cancel{\delta v . dp - \frac{\Phi}{T} dT}$

$$\Phi' = M_1' \frac{\partial \varphi'}{\partial M_1'} + M_2' \frac{\partial \varphi'}{\partial M_2'}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial M_1'} = \cancel{\frac{\partial \varphi'}{\partial M_1'}} + M_1' \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial M_1'^2} + M_2' \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial M_1' \partial M_2'}$$

$$\underline{M_1' \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial M_1' \partial M_2'} = \varphi'}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial M_1'^2} = - \frac{M_2'}{M_1'^2} \varphi'$$

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial M_2'^2} = - \frac{\varphi'}{M_2'}$$

$$M_1'' \frac{\partial^2 \Phi''}{\partial M_1'' \partial M_2''} = \varphi''$$

a). $\delta M_1' = - \delta M_1''$ $\qquad \delta M_2' = \delta M_2'' = 0$ $\qquad c' = \frac{M_2'}{M_1'} \quad c'' = \frac{M_2''}{M_1''}$

$$\frac{\delta v}{T} dp - \frac{Q_a}{T} dT - \delta M_1'' (\varphi' dc' - \varphi'' dc'') = 0$$

$$r_a = \frac{Q_a}{\delta M_1''} \qquad \sigma_a = \frac{\delta_a v}{\delta M_1''}$$

$$\left.\begin{aligned} &a). \quad \frac{r_a}{T} dT - \sigma_a\, dp = \varphi' dc' + \varphi'' dc'' \\ &b). \quad \frac{r_b}{T} dT - \sigma_b\, dp = -\varphi' \frac{dc'}{c'} + \varphi'' \frac{dc''}{c''} \end{aligned}\right\}$$

$$dp = \frac{(r_a + c'' r_b)\, dT + \left(1 - \frac{c''}{c'}\right) T \varphi' dc'}{(\sigma_a + c'' \sigma_b)\, T}$$

$$- dc'' = \frac{\left(\frac{1}{\sigma_a} + \frac{1}{c' \sigma_b}\right) \varphi' dc' + \left(\frac{r_a}{\sigma_a} - \frac{r_b}{\sigma_b}\right) \frac{dT}{T}}{\left(\frac{1}{\sigma_a} + \frac{1}{c'' \sigma_b}\right) \varphi''}$$

δ zmiana z masą ale nie z p, T

d 〃 z $p T$ a względnie tyż także M

$\Phi = U - TS + pv$

$\frac{\partial \Phi}{\partial T} = \frac{\partial U}{\partial T} - S - T\frac{\partial S}{\partial T} + p\frac{\partial v}{\partial T}$

$\delta \Phi = 0$

$\delta(\Phi + d\Phi) = 0$

$$d\Phi = \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial p}}_{v} dp + \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial T}}_{= -S} dT + \sum \frac{\partial \Phi'}{\partial M_1'} dM_1' + \frac{\partial \Phi'}{\partial M_2'} dM_2' +$$

$$\delta v\, dp - \delta S\, dT + \sum \delta \frac{\partial \Phi'}{\partial M_1'} dM_1' \cdots = 0$$

$$\underbrace{\cancel{\delta S}}_{\frac{Q}{T}}$$

W razie jednego składnika w dwóch fazach

T między zmiana

$$\delta v\, dp - \frac{Q}{T} dT + \cancel{\delta \frac{\partial \Phi'}{\partial M'} dM' + \delta \frac{\partial \Phi''}{\partial M''} dM''} = 0$$

$Q = r\, \delta M''$

$\delta v = (v'' - v')\, \delta M'' \qquad r = T \frac{dp}{dT} (v'' - v')$

---

dwa składniki

$$\delta \frac{\partial \Phi'}{\partial M_1'} = \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial M_1'^2} \delta M_1' + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial M_1' \partial M_2'} \delta M_2'$$

$$\delta \frac{\partial \Phi'}{\partial M_2'} = \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial M_1' \partial M_2'} \delta M_1' + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial M_2'^2} \delta M_2'$$

Wahadło z sprężyną

Wahadło sferyczne

składowa siły ku punktowi O $\quad mg \sin\varphi \; \cancel{\ } = mg\frac{r}{a} = m \cancel{\ } f$

~~[illegible]~~

przybliżenie jak siła sprężysta

ruch eliptyczny

Ale jak dla większych kątów φ?

Zachowanie energii mechan. i stałość prędkości sektorowej względem ... $\times Z$

$$\left(a\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(a\sin\varphi\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - 2g\cos\varphi = \text{const}$$

$$(a\sin\varphi)^2\frac{d\psi}{dt} = c$$

dla małych φ:

$$\left(a\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(a\varphi\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - 2g\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right) = \text{const}$$

stawiając $a\varphi = r$

To samo co przy dwuwymiarowym ruchu sprężystym

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \text{const} + 2g - g\frac{r^2}{a^2} \\ &r^2\frac{d\psi}{dt} = c \end{aligned}\right.$$

Także tak:
$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -S\frac{x}{a} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= +mg - S\frac{y}{a} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= -S\frac{z}{a} \end{aligned}\right\}$$

$$m\frac{v^2}{2} = mgy - \frac{S}{a}\int \cancel{\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{dt}}^{=0}$$

$$m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = \cancel{\ } \text{const}$$

Także stawiając przy $y = a$ $\quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad S = mg$

Wahadło Blackburna

Figury Lissajous

Zwykłe wahadło takie Teb.

$x = a \sin\varphi$

$y = a \cos\varphi$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -S\sin\varphi = -S\frac{x}{a} \qquad\Big\| \quad y$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - S\cos\varphi = mg - S\frac{y}{a} \qquad\Big\| \quad x$$

$$m\left(y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2}\right) = mg\,x \qquad\Big\| \qquad m\left(x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2}\right) = mg\,y - S$$

uwaga!

$$S = mg\,y - m\left(\quad\right)$$

$$+\frac{a^2}{a^2}\big(\underbrace{\cancel{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}}_{\cos 2\varphi}\big)(\ldots)\;\varphi$$

$\overset{\shortparallel}{1-}$

$\varphi = A\sin\alpha t$

$$mg\cos\varphi + m\frac{A^2\alpha^2 \sin\alpha t}{a}$$

Verf. gab an der Hand einer allgemeinen Formel der statistischen Mechanik eine systematische Übersicht über diejenigen experimentell untersuchten erkennbaren Phänomene, welche darauf beruhen dass ein jedes molekulare System kleine automatische Schwankungen um den Zustand termodynamischen Gleichgewichts herum ausführen muss.

Hiezu gehören insbesondere die Brown'sche Molekularbewegung suspendierter Teilchen in Flüssigkeiten und Gasen, die Verteilung von Emulsionsteilchen im Gravitationsfeld, die von Svedberg untersuchten Unregelmässigkeiten der Verteilung von Teilchen kolloidaler Lösungen, die Opalescenz Erscheinungen in Gasen und Gemischen in der Nähe des kritischen Zustandes, das Blau des Himmels, gewisse an Emulsionen und Dispersionen beobachtete magnetooptische Erscheinungen, u. dgl.

Gleichzeitig machte er auf einige weitere noch näher zu untersuchende Fragen dieser Art aufmerksam und wies schliesslich auf die neueren Messungen von [illegible] über die Bew. von [illegible] hin, welche eine direkte Bestätigung d. [illegible] Gesetzes bilden.

Alle diese Erscheinungen entscheiden den Kampf zwischen Thermodynamik und kinetischer Theorie zu gunsten der letzteren; es folgt daraus, dass der zweite Hauptsatz in der von Clausius, Thomson u. A. angewandten Form nicht richtig ist, da in mikroskopischen Raum-Verhältnissen fortwährend ihm widersprechende Prozesse vor sich gehen, und [illegible] derselbe auf [illegible] in grösserem Maasstabe [illegible] muss. Trotzdem meint der Verfasser annehmen, dass die Construktion eines dauernd Arbeit liefernden Perpetuum mobile zweiter Art aus prinzipiellen Gründen unmöglich ist, und dass die in letzten Jahren aufgetauchten Vorschläge dieser Art prinzipielle Fehler enthalten. Er glaubt also dass sich der zweite Hauptsatz in modifizierter Form aufrecht erhalten lässt, wenn man seine Gültigkeit auf unbegrenzt dauernde Prozesse einschränkt.

Ebenso kann man bei einem gewissen Glücksspiel mit [illegible] [illegible] beliebige Beträge gewinnen, aber ein solches Spiel kann doch keine dauernde Einnahmsquelle bilden.

$$\frac{\alpha}{a-\xi^2} - \frac{\beta}{k_1+k_2\xi} = \frac{\alpha(k_1+k_2\xi)+\beta(a-\xi^2)}{(a-\xi^2)(k_1+k_2\xi)} \qquad k_1\alpha = \beta$$

$$k_1^2 - k_2^2\xi^2 + a - \xi^2$$

$$= \beta(k_1 - k_2\xi)$$

$$= \frac{1}{k_2^2}\left[\frac{k_1-k_2\xi}{a-\xi^2}\right] + \frac{\quad}{k_1+k_2\xi}$$

$$= \frac{\frac{k_1}{k_2^2} - \frac{\xi}{k_2}}{a-\xi^2} - \frac{1}{k_1+k_2\xi} = \frac{\frac{k_1}{k_2^2} - \cancel{\xi^2} - a + \cancel{\xi^2}}{(a-\xi^2)(k_1+k_2\xi)}$$

$$= \left(\frac{k_1}{k_2^2}\xi - a\right) \dots$$

$$\frac{1}{(a-\xi^2)(k_1+k_2\xi)} = \frac{k_2^2}{\frac{k_1^2}{\cancel{\ }} - a k_2^2}\left\{\frac{1}{k_2^2}\,\frac{k_1-k_2\xi}{a-\xi^2} - \frac{1}{k_1+k_2\xi}\right\}$$

$$\frac{k_1^2 - \cancel{k_2^2\xi^2} + a k_2^2 + \cancel{k_2^2\xi^2}}{k_2^2(a-\xi^2)(k_1+k_2\xi)}$$

$$= \frac{k_1-k_2\xi}{(k_1^2-ak_2^2)(a-\xi^2)} - \frac{k_2^2}{(k_1^2-ak_2^2)(k_1+k_2\xi)}$$

$x = \xi^2$

$$\int\frac{dx}{(a-x)(k_1+k_2\sqrt{x})} = \frac{1}{k_1^2-ak_2^2}\underbrace{\int\frac{k_1\xi - k_2\xi^2}{a-\xi^2}\,d\xi}_{J_1} - \frac{k_2^2}{k_1^2-ak_2^2}\int\frac{\xi\,d\xi}{k_1+k_2\xi}$$

$$\cancel{k_2\left[\frac{k_1\xi - \xi^2}{a-\xi^2}\right] = \dots +}$$

$$J_1 = k_1\int\frac{\xi}{a-\xi^2}\,d\xi = -\frac{k_1}{2}\log(a-\xi^2)$$

$$-k_2\int\frac{\xi^2}{a-\xi^2}\,d\xi = -k_2\int\left(\frac{a}{a-\xi^2}-1\right)d\xi = -k_2\left\{\frac{\sqrt{a}}{2}\log\frac{\sqrt{a}+\xi}{\sqrt{a}-\xi} - \xi\right\}$$

$$\int\frac{\xi}{k_1+k_2\xi}\,d\xi = \frac{1}{k_2}\int\left[1-\frac{k_1}{k_1+k_2\xi}\right]d\xi = \frac{\xi}{k_2} - \frac{k_1}{k_2^2}\log(k_1+k_2\xi)$$

$$\frac{-1}{k_1^2-ak_2^2}\left\{\frac{k_1}{2}\log(a-\xi^2) + k_2\frac{\sqrt{a}}{2}\log\frac{\sqrt{a}+\xi}{\sqrt{a}-\xi} - \cancel{\xi k_2}\right\} - \frac{k_2^2}{k_1^2-ak_2^2}\left[\frac{\xi}{k_2} - \frac{k_1}{k_2^2}\log(k_1+k_2\xi)\right]$$

$$= t + \text{const}$$

$$\frac{-1}{(k_1^2-ak_2^2)}\left\{\frac{-\xi k_1}{a-\xi^2} + k_2\frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\xi} - \frac{1}{\sqrt{a}-\xi}\right) - k_2\right\} - \underbrace{\frac{k_2^2}{k_1^2-ak_2^2}\left[\frac{1}{k_2} - \frac{k_1}{\cancel{k_2}}\,\frac{\cancel{k_2}}{k_1+k_2\xi}\right]}_{-\frac{1}{k_1^2-ak_2^2}\frac{k_2^2\xi}{k_1+k_2\xi}}$$

$$\underbrace{+\frac{\cancel{k_2 a} - k_2 a + k_2\xi^2}{a-\xi^2}}$$

$$-\frac{k_1}{2(k_1^2-ak_2^2)}\ \cancel{\frac{k_2\xi^2-2\xi}{a-\xi^2}}$$

$$-t = \frac{k_1}{k_1^2 - a k_2^2} \lg(k_1 + k_2\sqrt{x}) + \frac{1}{2(k_2\sqrt{a} - k_1)} \lg(\sqrt{a} + \sqrt{x}) - \frac{1}{2(k_2\sqrt{a} + k_1)} \lg(\sqrt{a} - \sqrt{x})$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k_1 + k_2\sqrt{x} + \frac{1}{2}\frac{a k_2}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{a}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{a - 2x}{2\sqrt{x}}$$

Elipsoida w różnych orientacjach

Opór gdy oś symetrii pionowo $= A$

$\perp$ do kierunku ruchu $= B$

~~pracujący opór~~ w pozycji pochyłej pod kątem θ:

$$F_a = A(U\cos\theta - V\sin\theta) \qquad F_a\sin\theta = +F_b\cos\theta$$

$$F_b = B(U\sin\theta + V\cos\theta) \qquad F_a\cos\theta + F_b\sin\theta = F$$

$$A(U\sin\theta\cos\theta - V\sin^2\theta) = B(U\sin\theta\cos\theta + V\cos^2\theta)$$

$$(A-B)\,U\sin\theta\cos\theta = (A\sin^2\theta + B\cos^2\theta)\,V$$

$$V = U\,\frac{(A-B)\sin\theta\cos\theta}{A\sin^2\theta + B\cos^2\theta}$$

$$F = U(A\cos^2\theta + B\sin^2\theta) + V(B-A)\sin\theta\cos\theta$$

$$= \cancel{U[A\sin^2\theta + B\cos^2\theta]}$$

$$= U\left\{[A\cos^2\theta + B\sin^2\theta] - \frac{(A-B)^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{A\sin^2\theta + B\cos^2\theta}\right\}$$

$$\frac{F}{U} = \frac{[A + (B-A)\sin^2\theta][B + (A-B)\sin^2\theta] - (A-B)^2\sin^2\theta + (A-B)^2\sin^4\theta}{A\sin^2\theta + B\cos^2\theta}$$

$$= AB + \cancel{[B^2 - 2AB + A^2]\sin^2\theta} - \cancel{(A-B)^2\sin^2\theta}$$

$$= \frac{AB}{A\sin^2\theta + B\cos^2\theta}$$

$$U = F\left[\frac{1}{B}\sin^2\theta + \frac{1}{A}\cos^2\theta\right]$$

przeciętna prędkość: $\bar{U} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} U\sin\theta\,d\theta$

$$= F\left[\frac{1}{B}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta}_{\frac{2}{3}} + \frac{1}{A}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta}_{\frac{1}{3}}\right] \qquad \frac{\cos^3\theta}{3}$$

$$= F\left[\frac{2}{3B} + \frac{1}{3A}\right]$$

$$V = F\,\frac{(A-B)\sin\theta\cos\theta}{AB} = F\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)\sin\theta\cos\theta$$

$\frac{a}{b} = \beta$

$R = \frac{4}{3} [$

Resistance of ellipsoid of revolution $= 6\pi\mu R U$

$$R = \frac{4}{3}\,\frac{1}{(\arccos\frac{a}{b})\,\frac{b^2-2a^2}{(b^2-a^2)^{3/2}} + \frac{a}{b^2-a^2}}$$

$$\arccos\frac{a}{b} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^3 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{x}\right)^7 + -$$

$$\arccos\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a} - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right)^5 - - - -$$

$$= \cancel{\varepsilon \ldots \frac{\varepsilon^5}{5}} \ldots = \frac{\varepsilon b}{a} - \frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon b}{a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\varepsilon b}{a}\right)^5$$

$$\cancel{b^2-a^2=\varepsilon^2} \qquad b^2-a^2 = b^2\varepsilon^2 \qquad b^2-2a^2 = b^2(2\varepsilon^2-1)$$

$$a^2 = b^2(1-\varepsilon^2) \qquad \frac{a}{b^2-a^2} = \frac{b\sqrt{1-\varepsilon^2}}{b^2\varepsilon^2}$$

$$\frac{-\frac{1}{2}\cdot-\frac{3}{2}}{1.2} \qquad \frac{-2\cdot-3}{1.2}$$

$$(1-x)^{-2} = 1+2x+3x^2$$

$$(1+x)^{-1} = 1-x+x^2-$$

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2$$

$$R = \frac{4}{3}\,\frac{b}{\left[\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^3 + \frac{1}{5} - \right]\frac{2\varepsilon^2-1}{\varepsilon^3} + \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon^2}} = \frac{4}{3}\,\frac{b\,\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,\frac{1}{1-(1-2\varepsilon^2)\left[\frac{1}{1-\varepsilon^2} - \frac{1}{3}\frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} + \frac{1}{5}\frac{\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^2)^3}\right]}$$

$$= \frac{4}{3}\,\frac{b\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,\frac{1}{1-(1-2\varepsilon^2)\left[1+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^6 - \frac{\varepsilon^2}{3}(1+2\varepsilon^2+3\varepsilon^4) + \frac{\varepsilon^4}{5}(1+3\varepsilon^2) - \frac{\varepsilon^6}{7}\right]}$$

$$1+\frac{1}{5}-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}+\frac{1}{5} = \frac{8}{15}$$

$$\left.\begin{array}{llll} 1+\varepsilon^2 & +\varepsilon^4 & + & \varepsilon^6 \\ -\frac{\varepsilon^2}{3} & -\frac{2\varepsilon^4}{3} & - & \varepsilon^6 \\ & +\frac{\varepsilon^4}{5} & + & \frac{3}{5} \\ & & - & \frac{1}{7} \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} 1+\frac{2}{3}\varepsilon^2 + \frac{8\varepsilon^4}{15} + \frac{16}{35}\varepsilon^6 \\ \quad -2 \quad -\frac{4}{3} \quad -\frac{16}{15} \\ \hline \left(1-\frac{4}{3}\varepsilon^2 - \frac{4}{5}\varepsilon^4 - \frac{64}{105}\varepsilon^6\right) \end{array}$$

$$\frac{21-5}{35}$$

$$8-20 = \frac{-12}{15} = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{7}-\frac{1}{3} = \frac{-4}{21}\cdot\frac{16}{5}$$

$$\frac{1}{5}\left(\frac{9}{5}-\frac{46}{7}\right)$$

$$\frac{63-80}{5.35} = -\frac{17}{5.35}$$

$$= \frac{4}{3}\,\frac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\frac{4}{3} + \frac{4}{5}\varepsilon^2 + \frac{64}{105}\varepsilon^4\right]^{-1} = \frac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\underbrace{\left[1+\frac{3}{5}\varepsilon^2 + \frac{16}{35}\varepsilon^4\right]^{-1}}$$

$$1-\frac{3}{5}\varepsilon^2 - \frac{16}{35}\varepsilon^4 \qquad = 1-\frac{3\varepsilon^2}{5} - \frac{17}{5.35}\varepsilon^4$$

$$+\frac{9}{25}\varepsilon^4 \qquad +\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{3}{8}\varepsilon^4$$

$$= b\left[1-\frac{\varepsilon^2}{10} + \frac{389}{40.35}\varepsilon^4\right]$$

$$\begin{array}{r} -136 \\ +525 \\ \hline 389 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15.35 \\ 175 \\ \hline 525 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 148 \\ 512 \\ \hline 256 \end{array}$$

$a : b = 3 : 1$

$$\varepsilon = \left(1-\frac{1}{9}\right) = \frac{8}{9} \qquad \frac{a}{b} = \frac{1}{3} \qquad \frac{a}{b^2-a^2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{8} \qquad \frac{b^2-2a^2}{(b^2-a^2)^{3/2}} = \frac{\left(1-\frac{2}{9}\right).27}{8^{3/2}} = \frac{21}{\sqrt{64.8}}$$

$$= \frac{21}{16\sqrt{2}}$$

47712
9·52288

$\frac{70°53}{180}.\pi$

$\begin{array}{r} 8484 \\ 4971 \\ \hline 3455 \\ -2553 \\ \hline 0\cdot0902 \\ 1\cdot3222 \\ \hline \cancel{1}\cdot4124 \\ -1\cdot35465 \\ \hline 0\cdot05775 \end{array}$

$\begin{array}{r} +1142 \\ +0\cdot375 \\ \hline \cancel{0\cdot767} \\ 1\cdot517 \end{array}$

$\cancel{\begin{array}{rr} 8848 & 6021 \\ 4771 & 3619 \\ \hline 3619 & 2402 \end{array}}$

$\underset{\smile}{1\cdot231}$

$\begin{array}{r} 0\cdot9031.\frac{3}{2} \\ 27093 \\ 1\cdot35465 \end{array}$

$\cancel{R = 1\cdot739\,b}$ 7

1407

$\cancel{\begin{array}{r} 0\cdot1810 \\ 1\cdot3220 \\ \hline 1\cdot5030 \\ -1\cdot35465 \\ \hline 0\cdot14835 \end{array}}$

$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \quad 0\cdot66$

$\begin{array}{r} 1810 \\ 4771 \\ \hline 6581 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6021 \\ 6581 \\ \hline 0\cdot9440 \end{array}$

$$\boxed{R = 0\cdot879\;b}$$

I → $a=b \quad c=\frac{a}{3}$

$$R=\frac{4}{3}\,\frac{1}{\frac{2-\frac{1}{9}}{\left(\frac{8}{9}\right)^{3/2}}\arccos\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{3}}{\frac{8}{9}}}=\frac{4}{3}\,\frac{1}{\frac{17}{9}\,\frac{27}{8\sqrt{8}}\arccos\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{3}{8}}=\frac{32}{9}\,\frac{1}{\frac{17}{\sqrt{8}}\arccos\frac{1}{3}+1}$$

$\arccos\frac{1}{3}=1.231$

0.0902	7.3970	~~0.2404~~	~~1.5051~~
1.2304	8.3970	~~9542~~	~~1.1946~~
1.3206		~~1.1946~~	
− 45155	0.9241	1.5051	
0.86905	9542	− 1.8783	
45	1.8783	0.6268 − 1	

$\boxed{R=0.4235\,a}$

W razie $c=0$:

$R=\frac{4}{3\pi}$

0.4971	6021
4771	9742
0.9742	0.6279

$R=0.424$

Czy stale się zmienia?

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}=\varepsilon^2=1-\frac{c^2}{a^2}$$

$$c^2=a^2\left[1-\varepsilon^2\right]$$

$$2a^2-c^2=a^2(1+\varepsilon^2)$$

kładę $\frac{c}{a}=\beta$

$$R=\frac{4a}{3\left[\frac{(1+\varepsilon^2)}{\varepsilon^3}\arccos\sqrt{1-\varepsilon^2}+\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon^2}\right]}=\frac{4a}{3}\,\frac{1}{\frac{2-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}^{\,3}}\arccos\beta+\frac{\beta}{1-\beta^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\qquad\right]=\underbrace{-\frac{2-\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)}^{\,3}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}\;\underbrace{-\frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}^{\,3}}\arccos\beta+\frac{(2-\beta^2)\,3\beta}{(1-\beta^2)^{5/2}}\arccos\beta}+\frac{1}{1-\beta^2}+\frac{2\beta^2}{(1-\beta^2)^2}$$

$$=\cancel{\frac{-2+\beta^2+(1-\beta^2)}{(1-\beta^2)^2}}\;\frac{-1+2\beta^2}{(1-\beta^2)^2}+\underbrace{\frac{6\beta-3\beta^3-2\beta+2\beta^3}{(1-\beta^2)^{5/2}}}_{\frac{4\beta-\beta^3}{(1-\beta^2)^{5/2}}}\arccos\beta$$

$=0$ dla:

$$-1+2\beta^2+\left(\frac{4\beta-\beta^3}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\arccos\beta=0$$

$$-1+2\beta^2+\frac{4-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\beta\arccos\beta=0$$

$$2\beta^2+\frac{4-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\beta\arccos\beta=1$$

to da wartość minimalną $\frac{c}{a}$?

~~Odwrotne zadanie~~

Wieloznaczność rozwiązań. Jeśli tylko jeden ruch dany

$x = ct$

$y = g\frac{t^2}{2}$ możliwe różne prawa działania sił, które w tym specjalnym wypadku byłyby równoważne, ale w innych różne

Chodzi o pole siły [fakt doświadczalny że zarazem siły działające zależą tylko od $x\,y\,z$, $\frac{dx}{dt}\,\frac{dy}{dt}\,\frac{dz}{dt}$]

aby to poznać trzeba robić szereg doświadczeń z zmiennymi warunkami początkowemi

(jak zawsze w fizyce warunki zmieniać)

równania różniczkowe $\left.\begin{matrix}\frac{d^2x}{dt^2}\\ \cdots\end{matrix}\right\} = f\left(xyz, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ bez stałych $a_1\, a_2\, a_3$, $b_1\, b_2$

Jeśli ogólnie skonstatujemy

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 + \beta_1 t \\ y &= \alpha_2 + \beta_2 t \mp g\frac{t^2}{2} \\ z &= \alpha_3 + \beta_3 t \end{aligned}\right\}$$

to wtedy jedyne możliwe prawo siły obejmujące wszystkie te ruchy (zatem nie zawierające $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \beta_1\, \beta_2\, \beta_3$) jest $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$

$Y = -mg$

Tak się poznaje pole siły.

Wymaga to szeregu doświadczeń

Odwrotne zadanie. Czy znamy od jednego do szeregu wypadków siły kolejno można potem już z góry przewidzieć jakie wielkie one będą w pewnych warunkach

$X = f(\ldots \quad xy\ldots \quad = m\frac{d^2x}{dt^2}$

$Y = \ldots \quad \ldots \quad = \ldots$

$Z = \ldots \quad \quad =$

Jak całkować? ~~[illegible]~~ można napisać $m\frac{dx}{dt} = \int X dt$ przy pomocy

$m\frac{dy}{dt} = \int -$

$m\frac{dz}{dt} = \ldots$

ale to zwykle nie prowadzi do korzyści bo nie potrafimy obliczyć

~~[illegible]~~ praca $\int X dx + Y dy$ równa się $m \sum \ddot{x}_i ds = m\frac{v^2}{2}\ldots \quad // U - U_0$

$\dot r = \frac{\varepsilon c}{p}\sin\varphi$

$\dot\varphi = \frac{c}{r^2}$

$$\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 = \frac{\varepsilon^2 c^2}{p^2}\sin^2\varphi + \frac{c^2}{r^2} = \frac{\varepsilon^2 c^2}{p^2}\left[1-\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{p}{r}-1\right)^2\right] + \frac{c^2}{r^2}$$

$$= \frac{\varepsilon^2 c^2}{p^2} - \cancel{\frac{c^2}{r^2}} + \frac{c^2}{p^2}\frac{2p}{r} - \dots$$

druga definicja potencjału

z pracy (jeśli niezależna od drogi) wtedy istotnie $X = \frac{\partial U}{\partial x}$ etc.

więc wyprowadzić z nowo mnogości doświadczeń

Siły centralne (posiadają potencjał) będące funkcją punktu ... zawsze

$X = f(r)\frac{x}{r}$

$Y = \dots$

$\frac{\partial X}{\partial y} = \dots = \frac{\partial Y}{\partial x}$

n.p. grawitacja

$= \alpha - \frac{\beta}{r}$

Jeśli chodzi o siły potencjalne to w razie ruchu ~~...~~ o jednym stopniu swobody to ~~...~~ twierdzenie o zachowaniu wystarcza do wyprowadzenia ruchu

~~...~~ To daje sposobność do rozwiązania wielu szczególnych przykładów gdzie chodzi o ruchy punktu nieswobodnego np.

<u>Wahadło</u>

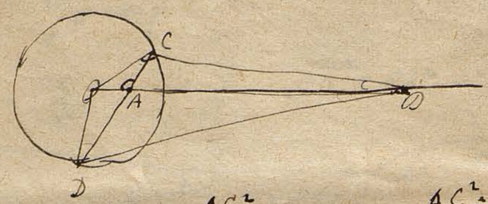
$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = a^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = gl\left(1-\cos\varphi\right)+\dots = gl\,\frac{\varphi^2}{2}+\dots$$

Ogólnie dla systemów punktów

Środek masy

momenty wektorowe

energia



$$\frac{AC^2}{C\omega^2} \qquad AC^2 = OA \cdot C\omega$$

$$= \frac{OA}{C\omega} \qquad \frac{AC}{C\omega} = \frac{OA}{}$$

$$\frac{AC}{OC} = \frac{\cancel{}\,C\omega}{O\omega}$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{OC}{OB}$$

Gray przewodniki i izolatory 1729

Du Fay ± 1733

Symmer 1759 Sk. z dwu dualist.

Franklin plus minus 1747 unitaria

1785 Coulomb waga skręceń

Cavendish

Faraday K

1790 Galvani

Volta zink

1820 Oersted igła magn

Biot Savart

Ampère elektrodynamika

Faraday indukcja 1831

---

prawo Joulea

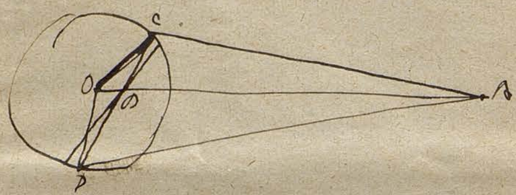
potencjał teorii el galwan

1846 Weber

Maxwell

Hertz 188

μ K



$\frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{CD^2}{CA^2}$ $\frac{1}{\cos\theta} \frac{DD^2}{DA^2}$

$CA : OA = CD : OC$

$\frac{CD}{CA} = = \frac{OC}{OA}$

$\frac{1}{\cos\theta} \left(\frac{OC}{OA}\right)^2 \cdot \cos\theta$

$OD : OC = OC : OA$

$OD = \frac{OD\, OC}{OA}$

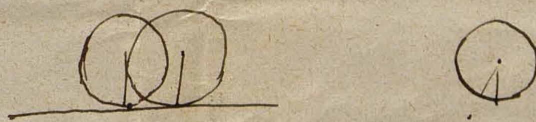
$CAO = = OCD$

1). ~~Udowodnić że p...~~ Ruch po elipsie z jednostajną prędkością wycinkową względem środka elipsy

~~podobnie że siły~~ Znaleźć prawo działania siły (jako funkcję odległości)

Znaleźć potencjał tej siły i sprawdzić zasadę zachowania energii

2). Ruch po cykloidzie



$y = a(1-\cos\alpha t)$

$x = a(\alpha t \mp \sin\alpha t)$

$\underline{X} = m a \alpha^2 \sin\alpha t$

$Y = m a \alpha^2 \cos\alpha t$

jaka prędkość wycinkowa?

gdzie kierunek przyspieszenia i [illegible]

Ogólniej: $y = \cancel{b(1-\cos\alpha t)}\ \cancel{b - a\cos\alpha t} = a(1-\beta\cos\alpha t)$

$x = \cancel{ct - a\sin\alpha t} = a(\alpha t - \beta\sin\alpha t)$

$$r^2 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)}} =$$

$\sin\varphi\cos\varphi$

$\ddot r\, \dot r =$

$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r^2\dot\varphi)$

$2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi$

$\ddot y = +a\alpha^2\beta\cos\alpha t$

$\ddot x = a\alpha^2\beta\sin\alpha t$

$F = a\alpha^2\beta$

Jaka ogólnie krzywa przy sile centralnej stałej? Potencjał αr

$$\left.\begin{aligned} \ddot r - r\dot\varphi^2 &= \alpha \\ r^2\dot\varphi &= c \end{aligned}\right\}$$

$\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 = \alpha r$

$\dot r^2 + \frac{c^2}{r^2} = \alpha r$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\alpha r - \frac{c^2}{r^2}}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \sqrt{\left(\alpha r - \frac{c^2}{r^2}\right)}\,\frac{r^2}{c}$$

$$\frac{r^2 dr}{\sqrt{\left(\alpha r - \frac{c^2}{r^2}\right)}} = d\varphi\sqrt{c}$$

$$= \frac{r^2 dr}{\sqrt{\alpha r^3 - c^2}} =$$

$\frac{1}{r} = u$

$r^2 = \frac{1}{u^2}$

$$\frac{du}{u^3\sqrt{\frac{\alpha}{u} - c^2u^2}} = -d\varphi$$

$$\frac{du}{\alpha - c^2u^3} = -d\varphi$$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{Mgl}}$

$\frac{K_0 + \lambda^2 M}{M\lambda} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g$

$g = 980$

$\lambda^2 - \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g\,\lambda = -\frac{K_0}{M}$

$\lambda = -\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{g}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{g}{2}\right]^2 - \frac{K_0}{M}}$

$\int x^2 dx$

$2\,\frac{l^3}{8 \cdot 3}$ $\frac{l^3}{12}$

$K_0 = M\frac{l^2}{12} + \lambda^2 M$

$\cancel{= \lambda M \frac{l^2}{4}}$

Jeżeli pręt sztywny, jaki długi aby miał służyć jako wahadło sekundowe

odwrócone

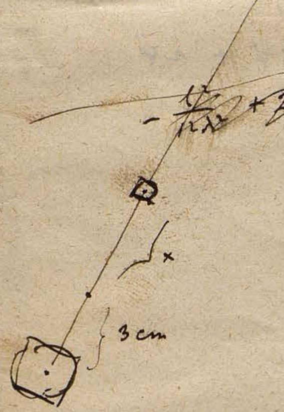
Jaki okres?

$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{\frac{Ml^2}{12} + \lambda^2 M}{Mg\lambda}$

Przyjmując tylko opór ośrodka:
Pewne wahadło fizyczne
przy obciążeniu ciężarkiem 1 kg robi wychylenia
5° Jaki będzie okres przy obciążeniu 2 kg?
Jakie wychylenia

$\frac{\partial}{\partial\lambda} = -\frac{l^2}{12\lambda^2} + 1 \Big|^{l-\lambda} = \frac{11}{12}$

$-\frac{l^2}{12\lambda^2} + 2\lambda = 0$



x

3 cm

różnica energii kinetycznej po każdym

wahnięciu = pokryta przez pracę
ciężarka

zależna od

pręt bez masy

kostka $M : m = 8 : 1$

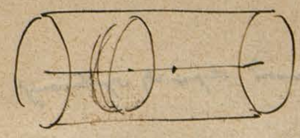
2 razy większa

1 cm³ $\frac{1}{8}$ cm³

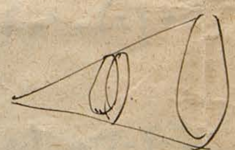
K =

179

1). Siła na punkt osi walca o skończonej długości wypełn. masą



2). Siła na wierzchołek stożka masywnego

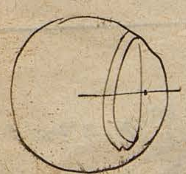


Wiele wynosi poprawka na górę stożkowatą

stożek 300 wysokość 3000 m

gęstość ~~powietrza~~ = $\frac{1}{2}$ prz. ziem.

3). Siła na punkt we wnętrzu kuli



4). Potencyał prostej obłożonej masą, jakie są powierzchnie ekwipot. (elipsoidy!)

gęstość w razie rozkładu równomiernego

6). Energia kuli naładowanej ładunkiem Q

ciśnienie elektr. na powierzchnię (bańka mydlana)

Pojemność kondensatora z Tomsona (promień 1 cm)

5). Kondensator elektryczny składający się z rury szklanej

długości 1m grubości ścian 1mm zostaje naładowany do

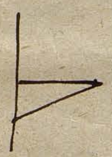
potencyału 12 000 Volt. (iskra 3 mm); jaka energia?

Jeśli rozbrojony przez drucik platynowy ~~gatunku~~ grubości 0.2 mm długości 2 cm

(Pt gęstość 21.5, wysp. ciepło 0.032) Jaka temperatura (1500°)

7). Jaki nabój na ~~...~~ całej powierzchni ziemi biorąc $\frac{dV}{dn} = 300 \frac{Volt}{m}$

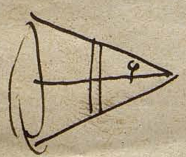
8). Obliczyć przyciąganie [illegible] [illegible]



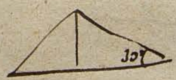
$$\int_0^a \frac{2x\pi\,dx}{\sqrt{r^2+x^2}} = 2\pi\sqrt{r^2+x^2}\Big|_0^a = 2\pi\left(\sqrt{a^2+x^2}-x\right)$$

$$F = -2\pi\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-1\right)$$

$$-\int_0^b 2\pi\rho\,d\xi\left[\frac{\xi}{\sqrt{a^2+\xi^2}}-1\right] = -2\pi\rho\left(\sqrt{a^2+\xi^2}-\xi\right)\Big|_0^b = -2\pi\rho\left[\sqrt{a^2+b^2}-b-a\right]$$



$$-\int_0^b 2\pi\rho\,d\xi(\cos\varphi-1) = -2\pi\rho b(\cos\varphi-1)$$



$$\cos\varphi = \frac{1}{2}$$

$\pi\rho b$ = ½ wartości [illegible]

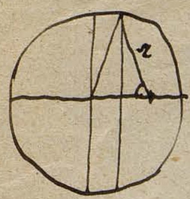
$$g + \frac{\pi\rho_0 b}{2}k \qquad \frac{4}{3}\pi a\rho_0 k = g$$

$$k = \frac{g}{\frac{4}{3}a\pi\rho_0}$$

$$g\left\{1+\frac{b}{2}\,\frac{1}{\frac{4}{3}a}\right\}$$

$$g\left\{1+\frac{3}{8}\,\frac{b}{a}\right\}$$

$$\frac{3}{8}\,\frac{3}{6360} = \frac{1}{5000}$$



180

$$\int_{-a}^{a} 2\pi\, d\xi \left[\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+a^2-\xi^2}} - 1\right]$$

$$\int \frac{x-\xi}{\sqrt{x^2-2x\xi+a^2}}\, d\xi$$

$$\cancel{a^2 = x^2+a^2-2x\xi + (x-\xi)^2 -}$$

$$\frac{x-\xi}{\sqrt{x^2-2x\xi+a^2}} = \cos\varphi$$

$$(x-\xi)^2 = \left[(x-\xi)^2+a^2-\xi^2\right]\cos^2\varphi$$

$$(x-\xi)^2\sin^2\varphi + \xi^2\cos^2\varphi = a^2\cos^2\varphi$$

$$\xi^2 - 2x\xi\sin^2\varphi = a^2\cos^2\varphi - x^2\sin^2\varphi$$

$$\xi = x\sin^2\varphi \pm \sqrt{a^2 - -}$$

$$r\cos\varphi = x-\xi$$

$$\cancel{\cos\varphi = \frac{x-\xi}{r}} \qquad \cancel{r^2 = a^2+(x-\xi)^2 -}$$

$$\cancel{2\pi\, d\xi\left(\frac{x-\xi}{r} - 1\right)}$$

$$\int \frac{x-\xi}{\sqrt{x^2+a^2-2x\xi}}\, d\xi = -\sqrt{x^2+a^2-2x\xi} - \int \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{}}$$

$$\int \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{}} = -\frac{\xi}{x}\sqrt{x^2+a^2-2x\xi} + \frac{1}{x}\int \frac{x^2+a^2-2x\xi}{\sqrt{}}\, d\xi = -\frac{\xi}{x}\sqrt{x^2+a^2-2x\xi} - \frac{a^2+x^2}{x^2}\sqrt{\cdots} - 2J$$

$$J = -\frac{1}{3}\left(\frac{\xi x+a^2+x^2}{x^2}\sqrt{a^2+x^2-2x\xi}\right) \qquad \frac{\partial J}{\partial \xi} = \sqrt{} - \frac{x\xi+a^2+x^2}{\sqrt{}}$$

$$\sqrt{a^2+x^2-2x\xi}\left[\frac{x\xi+a^2-2x^2}{3x^2}\right]_{-a}^{\xi=a} \qquad \cancel{\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\sqrt{a^2+x^2-2x\xi} - \frac{\sqrt{}\,(x\xi+a^2-2x^2)}{x}\right]}$$

$$\sqrt{(a-x)^2}\,\frac{a^2+ax-2x^2}{3x^2} - \sqrt{(a+x)^2}\,\frac{a^2-ax-2x^2}{3x^2}$$

$$\begin{aligned} &a^3 + \cancel{a^2x} - 2ax^2 \\ &-\cancel{a^2x} - ax^2 + \cancel{2x^3} \\ -\{&a^3 - \cancel{a^2x} - 2ax^2 \\ &+\cancel{a^2x} + ax^2 + \cancel{2x^3}\} \end{aligned}$$

$$= -\frac{2ax^2}{3x^2}$$

$$F = \frac{4\pi a}{3} = \frac{\frac{4}{3}a^3\pi}{a^2}$$

Elektryczność i magn.

Najciekawsza i najtrudniejsza

największa różnorodność ; elektryczna nauka

stronnicy przestrzenne   rachunek wektorowy

brak zmysłu elektrycznego ; pojęcia mechaniczne tworzą podstawę

teorya potencyału

mechanika, głównie grawitacya
to jest Newtona dzieło, że przecież dalszej przeciwnie mechaniki tłumaczymy elektryczności i porównamy. Wektory elektryczne

podstawy : $m\frac{d^2x}{dt^2} = X$

pojęcie siły $m\frac{d^2y}{dt^2} = Y$ $\sqrt{X^2+Y^2+\dots}$

$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$

wspólne definicye wzorów danych empirycznych

~~[illegible]~~ które umożliwiają

Newton Philos. nat. principia math. 1686

wsp... ?

o ile jednostajna!

prędkość bezwzględna obojętna, stosunek przyspieszeń

przyczyna podwójna
|| ~~[illegible]~~
ciężar i ...

I). definicya masy

pojęcie „przyspieszenie" ... naszej zmienności

II). $m\frac{d^2s}{dt^2} = F$ z tej definicyi wynika że siła jest wielkością kierunkową

co do siły i kier.

~~siły~~ działanie równe oddziaływaniu a przeciwzwrotne

III). Każda siła działa niezależnie od innych ~~[illegible]~~ ; zasada superpozycyi   lub niezależności ruchów lub

$m\frac{d^2x}{dt^2} = X$

~~z tego wynika ... jest jedna ... [illegible] sposób ...~~

rozwiązanie równań. dopiero wtedy ~~[illegible]~~ wszystkie ... X Y Z zależą od zmiennych --

najprostszy przykład.
1). $x = ct$ bezwładność
$X = 0$

2). ~~[illegible]~~ $y = g\frac{t^2}{2}$ wszystkie ciała w próżni tak samo

~~najprostszy~~

masa a ciężar   ... najprostszy sposób mierzenia mas ważenie

$Y = mg$

3). na drążek przez ... - - -

To już widzimy przy każdym ruchu składowe 2 stałe dowolne

2 warunki początkowe

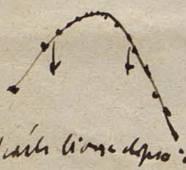
wszystkie 6

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}$

$y=\frac{b}{a}x$



widzimy że przysp. nie na kierunku drogi!

siła ciągle w dół!

można też rozkładać w kierunku drogi i

kierunek $\perp$

Inne przykłady tego rodzaju

$X = -\alpha x$ || $X = a\cos\alpha t$ $\quad y = b\cos\alpha t$

$X = \frac{\beta}{x^2}$

Wszystkie ruchy centralne

Przykład w wielkim stylu: ruch planet

$\frac{d^2x}{dt^2} = \mp\frac{x}{r}$ $\qquad y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 0$

$\frac{d^2y}{dt^2} = \mp\frac{y}{r}$ $\qquad y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = 0$

$r\frac{dr}{dt}$

$\frac{d^2z}{dt^2} = \mp\frac{z}{r}$

$F_r = X\cos\varphi + Y\sin\varphi$

$F_\perp = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi$

$X = m\frac{d^2}{dt^2}(r\cos\varphi)$

$Y = ..$

$\frac{dx}{dt} = v\cos\alpha$ $\qquad \frac{d^2x}{dt^2}$ ..

$\frac{dy}{dt} = v\sin\alpha$ $\qquad \frac{d^2y}{dt^2}$ ..

Keppler skąd odległość? ! rachunkowo wytłomaczenie

$\frac{4m\pi^2R}{T^2} : gm = \frac{k}{R^2} : \frac{k}{a^2}$

$\frac{g}{R^2} = \frac{4\pi^2R}{a^2T^2}$

$g = \frac{4\pi^2}{a^2T^2}R^3$

$\frac{384446}{6356.5} = 60.5$

$\frac{2\pi}{T}\frac{R}{a}$

wyraźnie równe

$T = 27^d\,7^h\,43^m\,11.5^s$

27.24
54
108
648
655.60
39343.60
2360580 11.5

0.3010
0.4942
1.7818
2.5800
6.3730
0.2070 − 4
0.4140 − 8
10.5848
2.9988

= 997 cm

podczas gdy g na biegunie 983 bo środek ...

$\boxed{2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi = 0}$

$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$

$\dot r = +\frac{\varepsilon \sin\varphi\,\dot\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}\cdot p = +\frac{\varepsilon r^2}{p}\dot\varphi\sin\varphi$

$= +\frac{\varepsilon c}{p}\sin\varphi$

$\ddot r = +\frac{\varepsilon c}{p}\cos\varphi\,\dot\varphi = +\frac{\varepsilon c^2}{p}\frac{\cos\varphi}{r^2} =$

$\ddot r - r\dot\varphi^2 =$

$= +\frac{c^2}{pr^2}\left(\frac{p}{r}-1\right) - \frac{c^2}{r^3} = -\frac{c^2}{pr^2}$

mogłoby równie dobrze wyrazić $F_r = -\frac{c^2}{p^3}(1+\varepsilon\cos\varphi)^2$

Chodzi właśnie o to że siły X Y Z są same funkcjami miejsca (lub pochodnych $\frac{dx}{dt}$ ...)

~~ale~~

Bezpośrednio otrzymuje się (przez różniczkowanie jeśli ruch jest dany) $x\,y\,z$ ... X Y Z jako funkcje czasu t

więc potem dopiero przez eliminację otrzymujemy je jako funkcje x y z

ale tę eliminację można przeprowadzić w nieskończenie wielu sposobów np. $X = \varphi_1(x,t) = \varphi_1(y) = \varphi(x,y)$, $Y = \varphi_2(x,t) = \varphi_2(y)$, $Z = \varphi_3(x,t) = \varphi_3(y)$

Dla danego ruchu to obojętne ale nie dla innych ruchów z tymi samymi siłami a innemi warunkami początkowymi!

Pole siły poznać nie można z jednego ruchu. Jak wogóle poznać?

Podobnie jest z ciałem rzuconym w kierunku X:

$x = \alpha t$ $\quad X = 0$

$y = -g\frac{t^2}{2}$ $\quad Y = -gm$

mogłoby równie dobrze wynikać: $X = \left(y + \frac{g}{2\alpha^2}x^2\right)m$, $Y = -\frac{g}{2\alpha^2}x^2 m$

to by nie były wcale siły potencjalne!

B). Dobierając tak prędkości początkowe iżby tor przechodził przez dane 2 punkty

można w ogóle wiele sposobów

$r^2\dot\varphi$

$r\sin\varphi\,\dot\varphi + \dot r\cos\varphi$ $\quad 2r$

$\ddot r\sin\varphi\,\dot\varphi + 2\dot r\cos\varphi\,\dot\varphi + r\ddot\varphi$

Można żądać aby prawo działania sił X Y Z nie zawierało żadnych wielkości związanych

z przyporządkowaniem (dowolnemi) danemi (t.j. stałemi całkowania) odnośnie do punktu wyjścia i prędkości

początkowej. Czy wtedy już eliminacya jednoznaczna?

razy $x = f_1(t, \alpha_1, \alpha_2)$ otrzymujemy $X = F_1(t) = F_1(x, y, z, \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2)$

$y = f_2(t, \beta_1, \beta_2)$ $Y = F_2(t) =$

$z = f_3(t, \gamma_1, \gamma_2)$ $Z = F_3(t) =$

o ile są dane w postaci: $x = f_1(t) + \alpha_1 t + \alpha_2$

$y = f_2(t) + \beta_1 t + \beta_2$?

$z = f_3(t) + \gamma_1 t + \gamma_2$

$X = F_1(t)$

ale nawet już w najprostszym wypadku: ruchu planet nie dają się przedstawić w takiej formie wyraźnej!

W ogóle tylko w wyjątkowych razach taka eliminacya byłaby możliwa!

Ale właściwie: $\Phi_1(t, x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2) = 0$

$\Phi_2(\quad) = 0$

$\Phi_3(\quad) = 0$

} równania ruchu obserwowanego

$F_1(X, Y, Z, t, x y z \dots) = 0$

$F_2(\quad) = 0$

$F_3(\quad) = 0$

} równania wynikłe z różniczkowania dwukrotnego

~~tylko wypadkowo udaje się wyeliminować tak aby tylko~~ wyd δ X

eliminując tedy wszystkie stałe całkowania musimy otrzymać całkiem jednoznacznie myśl. [illegible]

system 3 równań różniczk. drugiego rzędu $f(\frac{d^2x}{dt^2}, \dots \frac{dz}{dt} \dots) = 0$ nie zawierających już stałych ...

zatem istotnie przyjęty warunek całkowicie wystarczy ~~jeśli w ogóle da~~

eliminacya jednoznaczna

Czy zawsze da się wytworzyć równ. różn. ??