

ВѢСТНИКЪ МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ.

№ 12 и 13.

СОДЕРЖАНИЕ.—I. Разысканіе первыхъ, приближенныхъ величинъ корней алгебраическихъ уравненій. (Теорія выдѣленія корней) *П. Ромера.* Доказательство одной теоремы дифференціального вычисления. *Е. Сабинина.* II. Библиографическій указатель.—III. Опыты надъ прохожденіемъ гальваническаго тока чрезъ порошкообразные проводники, *Чедовига.* Извѣст. изъ період. изданій: 1. Теорема *Сильвестра* относительно *Бернуллиевыхъ* чиселъ. 2. Краткія извѣстія.

Разысканіе первыхъ, приближенныхъ величинъ корней алгебраическихъ уравненій.

(Теорія выдѣленія корней.)

Однимъ изъ мемуаровъ *Коши*, представленнымъ Туринской Академіи въ 1831 году, начался небольшой рядъ чрезвычайно замѣчательныхъ изслѣдованій въ теоріи рѣшенія уравненій. Эти изслѣдованія, основанныя на особомъ, вычисленіи индексовъ функций, привели не только къ точному методу для опредѣленія первыхъ, приближенныхъ величинъ корней мнимыхъ, но и дали общія начала, изъ которыхъ вытекаютъ, какъ частные случаи, извѣстѣйшіе способы выдѣленія действительныхъ корней; между тѣмъ прежде эти способы существовали въ видѣ отдѣльныхъ, самостоятельныхъ теоремъ, имѣющихъ между собою очень мало взаимной зависимости. На это послѣднее обстоятельство обращалъ вниманіе еще *Лагранжъ* и выводилъ (Note VIII, Resolut. des équat. numer. 3-me édit.) теоремы, употребительныя въ его время, изъ однихъ и тѣхъ же аналитическихъ истинъ.

Помощью результатовъ, достигаемыхъ вычисленіемъ индексовъ, разысканіе первыхъ, приближенныхъ величинъ корней развивается въ строгую и послѣдовательно-проводимую теорію. Мы постараемся по возможности выказать это въ нашемъ изложеніи.

Вычисленіе интегральныхъ индексовъ, или эксцессовъ функций.

§ 1.

Если въ рациональной функціи $\frac{fx}{Fx}$ переменное количество x измѣняется, переходя отъ величины $x=x_0$ до величины $x=X$, то, при некоторыхъ, действительныхъ значеніяхъ: $x=a$, $x=b$,..., промежуточныхъ между x_0 и X и удовлетворяющихъ уравненію $Fx=0$, самая функція $\frac{fx}{Fx}$ будетъ переходить черезъ бесконечно-большую

Т. I.

величину отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ и отъ положительныхъ къ отрицательнымъ. Называя m и n два числа, изъ которыхъ первое показываетъ сколько разъ $\frac{fx}{Fx}$ переходитъ между предѣлами x_0 и X отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ черезъ бесконечно-большую величину, а второе сколько разъ въ тѣхъ же условіяхъ $\frac{fx}{Fx}$ переходитъ отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ, разность $m-n$ будетъ называться интегральнымъ индексомъ (*) или эксцессомъ (**) отношенія $\frac{fx}{Fx}$ между предѣлами x_0 и X . Этотъ эксцессъ мы будемъ обозначать такъ:

$$J_{x_0}^X \frac{fx}{Fx}$$

и напишемъ равенство

$$J_{x_0}^X \frac{fx}{Fx} = m - n.$$

Если мы положимъ здѣсь $x_0 = -\infty$ и $X = \infty$, то

$$J_{-\infty}^{+\infty} \frac{fx}{Fx}$$

будетъ означать весь эксцессъ отношенія $\frac{fx}{Fx}$ и мы его для простоты будемъ писать

(*) Это названіе *Коши*. Вычисленіе интегральныхъ индексовъ, первоначально выведенное имъ изъ теоріи опредѣленныхъ интеграловъ, изложено въ мемуарѣ, представленномъ Турин. Акад. въ 1831 и напечатанномъ въ 1833 году. Въсѣдствіи въ „Journal de l'Ecole Polytechnique“ 1837 это вычисленіе было имъ основано на весьма простыхъ истинахъ.

(**) Названіе *Штурма* и *Лувилля*.

$$J \frac{fx}{Fx}$$

Изъ такого опредѣленія, даннаго эксцессу или интегральному индексу, мы можемъ непосредственно заключить:

а) Если количество n переходовъ отъ положительныхъ значений къ отрицательнымъ функции $\frac{fx}{Fx}$ между предѣлами x_0 и X равно нулю

$$n=0, \text{ то } J_{x_0}^X \frac{fx}{Fx} = m,$$

если же

$$m=0, \text{ то } J_{x_0}^X \frac{fx}{Fx} = -n.$$

б) Когда знаменатель въ $\frac{fx}{Fx}$ ни для какой дѣйствительной величины x между x_0 и X не обращается въ нуль, или когда онъ дѣлитъ нацѣло числителя, то

$$J_{x_0}^X \frac{fx}{Fx} = 0.$$

в) Эксцессы отношеній $\frac{fx}{Fx}$ и $-\frac{fx}{Fx}$ будутъ находиться между собою въ слѣдующей зависимости:

$$J_{x_0}^X \frac{fx}{Fx} = -J_{x_0}^X \left(-\frac{fx}{Fx}\right).$$

д) Эксцессы функции $\frac{fx}{Fx}$, взятые между предѣлами x_0 и X и между предѣлами X и x_0 , дадутъ слѣдующее равенство:

$$J_{x_0}^X \frac{fx}{Fx} = -J_X^{x_0} \frac{fx}{Fx}.$$

е) Если возьмемъ нѣсколько промежуточныхъ значений между x_0 и X , именно: $x_1, x_2, \dots, x_\delta$, составляющихъ рядъ

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_\delta < X,$$

то

$$J_{x_0}^X \frac{fx}{Fx} = J_{x_0}^{x_1} \frac{fx}{Fx} + J_{x_1}^{x_2} \frac{fx}{Fx} + \dots + J_{x_\delta}^X \frac{fx}{Fx},$$

лишь бы отношеніе $\frac{fx}{Fx}$ не мѣняло знака при одной изъ промежуточныхъ величинъ.

§ 2.

Функции fx и Fx могутъ обращаться въ нули при одной и той же дѣйствительной величинѣ $x=a$ и отношеніе

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{fa}{Fa} = 0;$$

какова тогда будетъ величина эксцесса между предѣ-

лами $a-\delta$ и $a+\delta$, въ которыхъ δ величина чрезвычайна малая? Чтобы изслѣдовать этотъ случай, положимъ что Fx и fx имѣютъ m и n корней равныхъ a ; они примутъ видъ:

$$Fx = (x-a)^m F_1x, \quad fx = (x-a)^n f_1x.$$

Пусть $m-n$ равно четному $2k$, или отрицательному $-k$ количеству, тогда

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{(x-a)^n \cdot f_1x}{(x-a)^m \cdot F_1x} = \frac{f_1x}{(x-a)^{2k} \cdot F_1x}, \text{ или } = \frac{(x-a)^k f_1x}{F_1x}.$$

Изъ самаго опредѣленія эксцесса вытекаетъ, что

$$J_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{fx}{Fx} = J_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{f_1x}{(x-a)^{2k} F_1x} \quad \text{и} \quad J_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{(x-a)^k f_1x}{F_1x} \\ \text{будутъ равны нулямъ.}$$

Если же $m-n$ равно нечетному и положительному количеству, отношеніе

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{f_1x}{(x-a)^{m-n} \cdot F_1x}$$

$$\text{и} \quad J_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{fx}{Fx} = J_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{f_1x}{(x-a)^{m-n} \cdot F_1x} = \pm 1.$$

$+1$ получится, когда $\frac{f_1a}{F_1a}$ дастъ $(+)$, -1 $(-)$.

Но очевидно, что $f_1a = \frac{f^{(n)}a}{p}$, а $F_1a = \frac{F^{(m)}a}{q}$, гдѣ p и q извѣстныя положительныя числа; слѣдственно знакъ $\frac{f_1a}{F_1a}$ тотъ же, что и $\frac{f^{(n)}a}{F^{(m)}a}$.

Полученный выводъ останется справедливымъ, если возьмемъ вмѣсто $a-\delta$ и $a+\delta$ какіе нибудь предѣлы, лишь бы между ними не было другихъ корней кромѣ a .

Итакъ мы пришли къ слѣдующей теоремѣ: если функции Fx и fx между предѣлами $a-\delta$ и $a+\delta$ имѣютъ m и n корней равныхъ a , то

$$J_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{fx}{Fx}$$

при возрастаніи x отъ $a-\delta$ до $a+\delta$ будетъ равенъ нулю, когда $m-n$ есть четное или отрицательное количество, и равенъ ± 1 , когда $m-n$ нечетное и положительное количество. Знакъ при единицѣ $(+)$ или $(-)$ будетъ совпадать при этомъ съ знакомъ

$$\frac{f^{(n)}a}{F^{(m)}a}.$$

Въ видѣ следствія этой общей теоремы выходитъ, что если $fx=1$, а Fx имѣетъ одинъ корень равный a , т. е., $m=1$, $n=0$, то

$$J_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{1}{Fx} = \pm 1,$$

гдѣ (+) должны соответствовать знаку выражения $\frac{1}{F'x}$ или просто знаку $F'x$ при $x=a$.

Полагая $Fx = \frac{\varphi x}{\psi x}$,

$$\int_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{1}{\frac{\varphi x}{\psi x}} = \int_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{\psi x}{\varphi x} = \pm 1.$$

Изъ знаковъ (+) надо выбирать тотъ, который будетъ принадлежать

$$\frac{d\left(\frac{\varphi x}{\psi x}\right)}{dx} = \frac{\psi x \frac{d\varphi x}{dx} - \varphi x \frac{d\psi x}{dx}}{(\psi x)^2}$$

или выражению

$$\psi x \frac{d\varphi x}{dx} - \varphi x \frac{d\psi x}{dx}$$

при $x=a$.

§ 3.

Возьмемъ два отношенія $\frac{\varphi x}{\varphi_1 x}$ и $\frac{\psi x}{\psi_1 x}$, въ которыхъ $\varphi_1 x$ и $\psi_1 x$ не имѣютъ общихъ корней, и положимъ сумму ихъ равной $\frac{fx}{Fx}$:

$$\frac{\varphi x}{\varphi_1 x} + \frac{\psi x}{\psi_1 x} = \frac{fx}{Fx}.$$

Когда, мѣняя знакъ, $\frac{fx}{Fx}$ переходитъ черезъ ∞ , то и одно изъ отношеній $\frac{\varphi x}{\varphi_1 x}$ или $\frac{\psi x}{\psi_1 x}$ должно переходить ∞ съ такою же самою переменною знака; отсюда становится совершенно яснымъ, что

$$\int_{x_0}^X \frac{fx}{Fx} = \int_{x_0}^X \left(\frac{\varphi x}{\varphi_1 x} + \frac{\psi x}{\psi_1 x} \right) = \int_{x_0}^X \frac{\varphi x}{\varphi_1 x} + \int_{x_0}^X \frac{\psi x}{\psi_1 x},$$

т. е., эксцессъ суммы функций равенъ суммѣ эксцессовъ функций.

Очевидно, что

$$\int_{x_0}^X \frac{1}{\varphi x} = p,$$

(функция φx есть цѣлая и рациональная)

гдѣ $p = 0$, если φx_0 и φX съ одинаковыми знаками,

$p = 1$, если φx_0 имѣетъ отрицательное значеніе, а φX положительное,

$p = -1$, если φx_0 имѣетъ положительное значеніе, а φX отрицательное.

Полагая

$$\varphi x = Fx \cdot fx, \quad (a)$$

$$\int_{x_0}^X \frac{1}{\varphi x} = \int_{x_0}^X \frac{1}{Fx \cdot fx} = p.$$

Умножаемъ $\frac{1}{Fx \cdot fx}$ на $(Fx)^2 + (fx)^2$; это не будетъ имѣть никакого вліянія на переходъ знаковъ, а следовательно и на эксцессъ функций $\frac{1}{Fx \cdot fx}$.

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^X \frac{1}{\varphi x} &= \int_{x_0}^X \frac{(Fx)^2 + (fx)^2}{Fx \cdot fx} = \int_{x_0}^X \left(\frac{Fx}{fx} + \frac{fx}{Fx} \right) = \\ &= \int_{x_0}^X \frac{fx}{Fx} + \int_{x_0}^X \frac{Fx}{fx} = p. \end{aligned}$$

И такъ

$$\int_{x_0}^X \frac{fx}{Fx} + \int_{x_0}^X \frac{Fx}{fx} = p.$$

Здѣсь $p=0$, если φx_0 и φX съ одинаковыми знаками, а следовательно (по ур. (a)) fx_0 , Fx_0 и fx , Fx попарно съ одинаковыми знаками, т. е., пара fx_0 , Fx_0 представляетъ переменную или повтореніе знаковъ и пара fx , Fx тоже.

$p=1$, если φx_0 имѣетъ знакъ (—), а φX (+), или если fx_0 , Fx_0 съ разными знаками, т. е., представляютъ переменную, а fx , Fx съ одинаковыми знаками представляютъ повтореніе знаковъ. При этомъ переменная переходитъ въ повтореніе и теряется.

$p=-1$, если fx_0 , Fx_0 представляютъ повтореніе, а fx , Fx переменную знаковъ: переменная выигрывается. (*)

§ 4.

Положимъ степень fx болѣе степени Fx , то

$$\frac{fx}{Fx} = Q + \frac{\varphi x}{Fx},$$

гдѣ Q , частное, есть цѣлая функция, а φx остатокъ дѣленія.

(*) Теорема, заключающаяся въ формулѣ

$$\int_{x_0}^X \frac{fx}{Fx} + \int_{x_0}^X \frac{Fx}{fx} = p,$$

можетъ быть доказана и болѣе прямыми образами. Пусть

$$\int_{x_0}^X \frac{fx}{Fx} = k, \quad \int_{x_0}^X \frac{Fx}{fx} = k',$$

k' показывается для отношенія $\frac{Fx}{fx}$ разность чиселъ переходовъ черезъ ∞ отъ отрицат. значеній къ положительнымъ и отъ положительныхъ къ отрицат. между предѣлами x_0 и X , а слѣд. показывается для $\frac{fx}{Fx}$ разность тѣхъ же чиселъ переходовъ черезъ нуль.

Сумма $k+k'$ будетъ представлять разность количествъ переменныхъ отрицательныхъ значеній въ положительныхъ и обратно при обращеніи $\frac{fx}{Fx}$ въ 0 и ∞ . Такимъ образомъ ясно

$$k+k'=p$$

и p , какъ это легко показать, имѣетъ найденное прежде для него значеніе.

$$\int_{x_0}^X \frac{fx}{Fx} = \int_{x_0}^X Q + \int_{x_0}^X \frac{\varphi_1 x}{Fx},$$

$$\int_{x_0}^X Q = 0,$$

какъ эксцессъ цѣлой функціи, слѣдственно

$$\int_{x_0}^X \frac{fx}{Fx} = \int_{x_0}^X \frac{\varphi_1 x}{Fx},$$

т. е., эксцессъ отъ отношенія, въ которомъ степень числителя болѣе степени знаменателя, можетъ быть всегда сведенъ къ разысканію эксцесса другаго отношенія съ степенью числителя меньшей знаменателя.

§ 5.

Пусть теперь степень fx менѣе степени Fx въ отношеніи $\frac{fx}{Fx}$ (мы это всегда можемъ предположить на основаніи предъидущаго параграфа); обозначимъ:

$$\int_{x_0}^X \frac{fx}{Fx} = E, \quad \int_{x_0}^X \frac{Fx}{fx} = E',$$

$$\frac{Fx}{fx} = Q_1 - \frac{\varphi_1 x}{fx}, \quad \frac{fx}{\varphi_1 x} = Q_2 - \frac{\varphi_2 x}{\varphi_1 x}, \quad \frac{\varphi_1 x}{\varphi_2 x} = Q_3 - \frac{\varphi_3 x}{\varphi_2 x}, \dots, \frac{\varphi_{m-1} x}{\varphi_m x} = Q_{m+1} - \frac{\varphi_{m+1} x}{\varphi_m x},$$

$$\frac{\varphi_m x}{\varphi_{m+1} x} = Q_{m+2} - \frac{\varphi_{m+2} x}{\varphi_{m+1} x}, \dots, \frac{\varphi_{n-2} x}{\varphi_{n-1} x} = Q_n - \frac{\varphi_n x}{\varphi_{n-1} x}, \quad \frac{\varphi_{n-1} x}{\varphi_n x} = Q_{n+1}.$$

$\varphi_n x$ будетъ функціею или постояннымъ количествомъ, смотря потому, имѣютъ ли Fx и fx общаго дѣлителя или нѣтъ.

Называя эксцессы функцій:

$$\frac{\varphi_1 x}{fx}, \frac{\varphi_2 x}{\varphi_1 x}, \frac{\varphi_3 x}{\varphi_2 x}, \dots, \frac{\varphi_{m+1} x}{\varphi_m x}, \frac{\varphi_{m+2} x}{\varphi_{m+1} x}, \dots, \frac{\varphi_n x}{\varphi_{n-1} x}, \frac{\varphi_{n+1} x}{\varphi_n x}$$

черезъ $E_1, E_2, E_3, \dots, E_{m+1}, E_{m+2}, \dots, E_n, E_{n+1},$

получимъ на основаніи уравненій (b) и (a):

$$E = E_1 + p, E_1 = E_2 + p_1, E_2 = E_3 + p_2, \dots, E_m = E_{m+1} + p_m, \dots, E_{n-1} = E_n + p_{n-1}, E_n = -E_{n+1} + p_n,$$

гдѣ $p, p_1, p_2, \dots$ имѣютъ значенія подобныя предъидущимъ.

Складывая послѣднія уравненія,

$$E = p + p_1 + p_2 + \dots + p_m + \dots + p_{n-1} + p_n - E_{n+1}.$$

Эксцессъ E_{n+1} отношенія $\frac{\varphi_{n-1} x}{\varphi_n x}$ равенъ нулю, потому что $\varphi_n x$ дѣлится на цѣло $\varphi_{n-1} x$.

$$E = p + p_1 + p_2 + \dots + p_m + \dots + p_{n-1} + p_n.$$

Чтобы опредѣлить сумму $p + p_1 + p_2 + \dots + p_n$, напомнимъ два ряда:

$$Fx_0, fx_0, \varphi_1 x_0, \varphi_2 x_0, \dots, \varphi_{m-1} x_0, \varphi_m x_0, \varphi_{m+1} x_0, \dots, \varphi_{n-1} x_0, \varphi_n x_0,$$

$$FX, fX, \varphi_1 X, \varphi_2 X, \dots, \varphi_{m-1} X, \varphi_m X, \varphi_{m+1} X, \dots, \varphi_{n-1} X, \varphi_n X,$$

и рассмотримъ чему равняется напримѣръ p_m : оно опредѣляется уравненіемъ

$$E_m = E_{m+1} + p_m$$

$$\int_{x_0}^X \frac{\varphi_m x}{\varphi_{m-1} x} + \int_{x_0}^X \frac{\varphi_{m-1} x}{\varphi_m x} = p_m.$$

$$\int_{x_0}^X \frac{fx}{Fx} + \int_{x_0}^X \frac{Fx}{fx} = E + E' = p, \quad (a)$$

гдѣ p имѣетъ прежнѣе значеніе.

Произведемъ дѣйствительное дѣленіе Fx на fx , называя частное Q_1 , а остатокъ, съ знаками перемѣненными на противные, $\varphi_1 x$,

$$\frac{Fx}{fx} = Q_1 - \frac{\varphi_1 x}{fx},$$

$$\int_{x_0}^X \frac{Fx}{fx} = \int_{x_0}^X Q - \int_{x_0}^X \frac{\varphi_1 x}{fx},$$

или

$$\int_{x_0}^X \frac{Fx}{fx} = - \int_{x_0}^X \frac{\varphi_1 x}{fx}.$$

Означая

$$\int_{x_0}^X \frac{\varphi_1 x}{fx} = E_1, \quad E_1 = -E'.$$

Соединяя это съ уравн. (a)

$$E = E_1 + p \dots \dots \dots (b)$$

Производя надъ Fx и fx операціи общаго наибольшаго дѣлителя и мѣня въ всѣхъ остаткахъ знаки на противные, напомнимъ рядъ уравненій:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Fx}{fx} &= Q_1 - \frac{\varphi_1 x}{fx}, \quad \frac{fx}{\varphi_1 x} = Q_2 - \frac{\varphi_2 x}{\varphi_1 x}, \quad \frac{\varphi_1 x}{\varphi_2 x} = Q_3 - \frac{\varphi_3 x}{\varphi_2 x}, \dots, \frac{\varphi_{m-1} x}{\varphi_m x} = Q_{m+1} - \frac{\varphi_{m+1} x}{\varphi_m x}, \\ \frac{\varphi_m x}{\varphi_{m+1} x} &= Q_{m+2} - \frac{\varphi_{m+2} x}{\varphi_{m+1} x}, \dots, \frac{\varphi_{n-2} x}{\varphi_{n-1} x} = Q_n - \frac{\varphi_n x}{\varphi_{n-1} x}, \quad \frac{\varphi_{n-1} x}{\varphi_n x} = Q_{n+1}. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

смотря потому, имѣютъ ли Fx и fx общаго дѣлителя

Здѣсь $p_m = 0$, если $\varphi_m x_0, \varphi_{m-1} x_0$, и $\varphi_m X, \varphi_{m-1} X$ представляютъ попарно переменны или повторенія знаковъ;

$p_m = 1$, если $\varphi_m x_0, \varphi_{m-1} x_0$ даютъ переменну, а $\varphi_m X, \varphi_{m-1} X$ повтореніе знаковъ,
 $p_m = 1$, если $\varphi_m x_0, \varphi_{m-1} x_0$ даютъ повтореніе, а $\varphi_m X, \varphi_{m-1} X$ переменну знаковъ.

То же самое можно сказать о всѣхъ: $p, p_1, p_2, \dots$.
 Теперь очевидно, что, назвавъ V_p число переменнъ 1-го ряда, которыя обращаются въ повторенія для 2-го, и P_p число повтореній 1-го ряда, переходящихъ въ переменны для 2-го, получимъ

$$E = V_p - P_p.$$

Обозначая число переменнъ 1-го ряда черезъ V_1 , а второго черезъ V_2 , будетъ

$$V_p - P_p = V_1 - V_2, \text{ или}$$

$$E = V_1 - V_2.$$

Отсюда вытекаетъ общая теорема: чтобы найти эксцессъ отношенія $\frac{fx}{Fx}$ между предѣлами x_0 и X , надо надъ функциями fx и Fx произвести операцію общаго наибольшаго дѣлителя, переменныя въ остаткахъ знаки на противныя, и написать два ряда:

$$Fx_0, fx_0, \varphi_1 x_0, \varphi_2 x_0, \dots, \varphi_n x_0, \dots (f)$$

$$FX, fX, \varphi_1 X, \varphi_2 X, \dots, \varphi_n X, \dots (g)$$

сосчитать число V_1 переменнъ 1-го ряда и число V_2 переменнъ 2-го ряда, тогда разность

$$V_1 - V_2$$

опредѣлитъ величину искомага эксцесса.

Къ этой теоремѣ можно прибавить нѣкоторыя замѣчанія:

а) Въ операціи общаго наибольшаго дѣлителя при послѣдовательныхъ дѣленіяхъ можно избѣгать дробныхъ частныхъ, умножая дѣлимые величины на прилично выбранныя положительныя количества, потому что отъ этого знакъ каждой величины измѣнится не можетъ, а въ этомъ заключается всё необходимое.

б) Можно остановить операцію общаго наибольшаго дѣлителя на остаткѣ $\varphi_m x$, если онъ не имѣетъ действительныхъ корней между предѣлами x_0 и X , ибо тогда

$$\int_{x_0}^X \frac{\varphi_{m+1} x}{\varphi_m x} = E_{m+1} = 0.$$

в) Если какая либо изъ среднихъ функций рядовъ (f) или (g) обращается въ нуль, напр. $\varphi_m x_0 = 0$, то надо считать переменны, не обращая на это никакого вниманія, потому что при $\varphi_m x_0 = 0$ смежныя съ нею функции $\varphi_{m-1} x_0$ и $\varphi_{m+1} x_0$ будутъ съ противными знаками. Двѣ же функции сряду напр. $\varphi_{m-1} x_0$ и $\varphi_m x_0$, обратясь въ нули не могутъ; въ противномъ случаѣ изъ уравненій (с) видно, что и $fx_0 = 0$, $Fx_0 = 0$, чего, вообще говоря, быть не можетъ, ибо мы всегда можемъ, выбрать предѣлы x_0 и X такими, чтобы они не были корнями уравненій

$$fx = 0 \text{ и } Fx = 0.$$

Теорія выдѣленія корней.

§ 1.

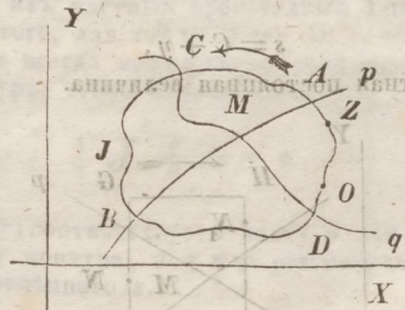
Пусть даны два совместно-существующія, действительныя относительно переменныхъ x и y уравненія

$$p = F(xy) = 0, \quad q = f(xy) = 0. \quad (1)$$

Ихъ можно всегда выразить въ видѣ кривыхъ, отнесенныхъ къ прямоугольнымъ осямъ координатъ. При этомъ они будутъ имѣть столько удовлетворяющихъ имъ обобщенъ или общихъ паръ корней, сколько будетъ точекъ пересѣченія для представляемыхъ ими кривыхъ. Точки касанія разсматриваются здѣсь какъ точки кратнаго пересѣченія. — Начертимъ какой либо произвольный, замкнутый контуръ; въ немъ можетъ заключаться нѣсколько такихъ точекъ пересѣченія. Определеніе этого числа точекъ для даннаго контура составляетъ существенный вопросъ, который можетъ быть положенъ въ основаніе теоріи выдѣленія корней.

Мы начнемъ его изслѣдованіе съ самаго простѣйшаго случая, предположивъ, что внутри произвольнаго контура OZJ , функций $F(xy)$ и $f(xy)$ для разныхъ точекъ непрерывны и кривыя, выражаемыя ими, представляются каждая въ видѣ одной вѣтви и пересѣкаются въ одной только точкѣ M . Такимъ образомъ вѣтвь кривой p пересѣчетъ контуръ въ двухъ точкахъ A и B , а вѣтвь кривой q въ C и D .

Замѣтимъ предварительно, что, означивъ l — длину всего контура OZJ и s — длину различныхъ дугъ, отсчитываемыхъ на немъ отъ какой либо постоянной точки O всегда въ одномъ направленіи, мы, вообще говоря, можемъ выражать координаты x, y , а слѣдственно и $F(xy), f(xy)$ въ видѣ функций $F_1 s$ и $f_1 s$ отъ одного переменнаго количества s .



Выразивъ такимъ образомъ отношеніе $\frac{f(xy)}{F(xy)}$ въ видѣ $\frac{f_1 s}{F_1 s}$, это последнее будетъ получать извѣстные знаки, когда мы будемъ въ него подставлять величины s для разныхъ точекъ контура. Мѣнять же знаки $\frac{f_1 s}{F_1 s}$ можетъ только, переходя черезъ точки A, B и обращаясь при этомъ въ ∞ , или черезъ точки C, D , обращаясь въ нуль, при дугахъ s , соответствующихъ этимъ точкамъ.

Если конечная точка Z дуги $OZ = s$ движется по направленію OAC , то при величинѣ s , которую она получаетъ, не доходя до A , отношеніе $\frac{f_1 s}{F_1 s}$ бу-

доть имѣть известный знакъ. При переходѣ s черезъ A количество $\frac{f_1 s}{F_1 s}$ переходитъ ∞ и мѣняется знакъ на противный. Въ точкѣ C , обращаясь въ нуль, $\frac{f_1 s}{F_1 s}$ возвращается къ прежнему знаку, который въ B опять мѣняется на противный съ переходомъ черезъ ∞ . При дальнѣйшемъ движеніи отъ B до A дуги s отношеніе $\frac{f_1 s}{F_1 s}$ не обращается болѣе въ бесконечно-большую величину.

Изъ сказаннаго вытекаетъ, что, взявъ эксцессъ отъ $\frac{f_1 s}{F_1 s}$ относительно всего контура, получимъ

$$\int \frac{f_1 s}{F_1 s} = \pm 2.$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{f_1 s}{F_1 s} = \frac{1}{2} \int \frac{q}{p} = \pm 1 \quad (2)$$

Изъ двухъ знаковъ ($\pm$) надо брать, какъ это видно изъ слѣдствія теоремы § 2, тотъ, который будетъ имѣть выраженіе

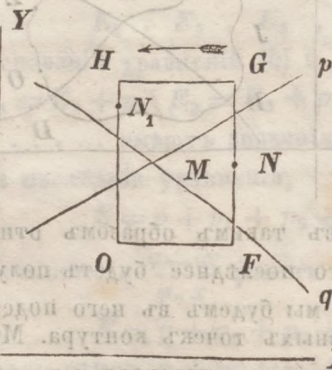
$$q \frac{dp}{ds} - p \frac{dq}{ds} \quad (3)$$

для координатъ точекъ A или B .

Допустимъ теперь, что контуръ OZJ всё болѣе и болѣе уменьшается въ размѣрахъ; иначе, стягивается около точки M и принимаетъ форму прямоугольника $OFGH$, стороны котораго параллельны осямъ координатъ. Въ такомъ случаѣ выраженіе (3) приметъ иной видъ для точекъ, лежащихъ на прямыхъ, составляющихъ прямоугольникъ. Для какой нибудь точки N , лежащей на FG , считая s отъ постоянной точки O , найдемъ

$$s = C + y,$$

гдѣ C известная постоянная величина.



При этомъ значеніи s

$$q \frac{dp}{ds} - p \frac{dq}{ds} = q \frac{dp}{dy} - p \frac{dq}{dy}.$$

Называя x абсциссу точки N , а a — точки M , значеніе $x - a$ положительное, а потому знакъ

$$\frac{q}{x-a} \frac{dp}{dy} - \frac{p}{x-a} \frac{dq}{dy} \quad \text{тотъ же, что и } q \frac{dp}{dy} - p \frac{dq}{dy}$$

Положимъ теперь, что контуръ всё уменьшается и, дѣлаясь бесконечно-малымъ, достигаетъ своего предѣла точки M ; при этомъ $x - a$, p , q обращаются въ нули и истинныя значенія $\frac{p}{x-a}$, $\frac{q}{x-a}$ будутъ $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dx}$.

Вслѣдствіе этого знакъ выраженія (3) будетъ совпадать съ знакомъ

$$\frac{dq}{dx} \frac{dp}{dy} - \frac{dp}{dx} \frac{dq}{dy} = \mu$$

для точки M .

Для какихъ либо другихъ точки N_1 и линіи ON легко показать тоже самое. Тутъ

$$s = C_1 - y$$

$$\text{и } q \frac{dp}{ds} - p \frac{dq}{ds} = - \left(q \frac{dp}{dy} - p \frac{dq}{dy} \right).$$

Означая x абсциссу N_1 , $x - a$ величина отрицательная сдѣлаетъ знакъ

$$\frac{q}{x-a} \frac{dp}{dy} - \frac{p}{x-a} \frac{dq}{dy}$$

одинаковымъ съ знакомъ (3). Полагая, какъ и прежде, что контуръ обращается въ бесконечно малый, выраженіе

$$\frac{q}{x-a} \frac{dp}{dy} - \frac{p}{x-a} \frac{dq}{dy} = \frac{dq}{dx} \frac{dp}{dy} - \frac{dp}{dx} \frac{dq}{dy}$$

Легко можно распространить сдѣланные выводы на всякую точку, лежащую на прямыхъ OF , HG . Преобразуя координаты x , y въ полярныя и принимая M за полюсъ, мы получимъ тождественный результатъ, допустивъ, что контуръ обращается въ кругъ.

И такъ вообще, если контуръ стягивается до бесконечно-малой величины около точки M и принимаетъ видъ круга или прямоугольника, то знакъ выраженія (3) для каждой точки контура будетъ совпадать съ знакомъ μ для точки M ; слѣдовательно въ формулѣ (2) надо брать знакъ, соответствующій этому знаку μ .

Но что будетъ въ томъ случаѣ, если μ для координатъ a , b точки M обращается въ нуль и знакъ его дѣлается неопредѣленнымъ?

$$\mu = \frac{dq}{dx} \frac{dp}{dy} - \frac{dp}{dx} \frac{dq}{dy} = 0 \quad \text{при } x=a, y=b \text{ даетъ :}$$

$$A) \quad \frac{\frac{dq}{dx}}{\frac{dq}{dy}} = \frac{\frac{dp}{dx}}{\frac{dp}{dy}} \quad (a)$$

Взявъ дифференціалы отъ $p=0$, $q=0$

$$\frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy = 0, \quad \frac{dq}{dx} dx + \frac{dq}{dy} dy = 0,$$

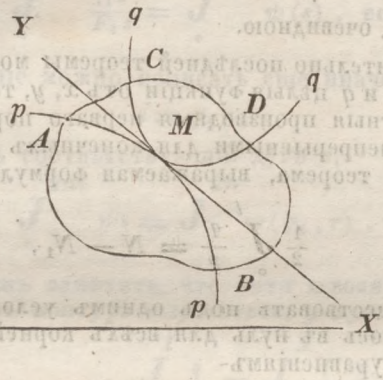
опредѣлимъ изъ этихъ уравненій $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{dq}{dx}}{\frac{dq}{dy}}, \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{dp}{dx}}{\frac{dp}{dy}}.$$

По ур. (а) эти выражения равны для координат точки M ; значитъ въ этой точкѣ кривыя имѣютъ общую касательную и сами касаются другъ друга (*). И такъ предположенное въ теоремѣ пересѣченіе кривыхъ въ одной точкѣ не выполняется. Въ этомъ случаѣ точки A, B, C, D расположатся, напримѣръ, какъ это показано на чертѣжѣ; тогда $\frac{q}{p}$, переходя черезъ A и B и дѣлаясь безконечно-большимъ, перейдетъ разъ отъ $(-)$ къ $(+)$, другой разъ отъ $(+)$ къ $(-)$, или наоборотъ и

$$J \int \frac{q}{p} = 0$$

не показываетъ присутствія общихъ корней.



В) Предполагая непрерывность частныхъ производныхъ отъ p и q внутри контура, выражение

$$\frac{dq}{dx} \frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dy} \frac{dp}{dx}$$

при $x=a, y=b$ будетъ тоже равно нулю, если

$$\frac{dp}{dx} = 0, \frac{dq}{dx} = 0; \frac{dp}{dy} = 0, \frac{dq}{dy} = 0; \dots (b)$$

$$\frac{dp}{dx} = 0, \frac{dp}{dy} = 0; \frac{dq}{dx} = 0, \frac{dq}{dy} = 0 \dots (c)$$

для тѣхъ же коорд. a и b .

Уравненія (b) относятся, очевидно, къ случаю общихъ касательныхъ горизонтальной и перпендикулярной къ оси X -овъ.

Уравненія (c), вообще говоря, показываютъ въ точкѣ M : *maximum* или *minimum* функций p и q , измѣняющихся по плоскости контура, *особенную* (*singulier*) точку, или присутствіе *равныхъ* корней. Здѣсь опять условія теоремы не выполняются: мы не можемъ уже сказать, что отношеніе $\frac{q}{p}$ мѣняетъ знакъ при переходѣ черезъ точки пересѣченія кривыхъ p и q съ контуромъ (**) и что самыя кривыя пересѣкаются

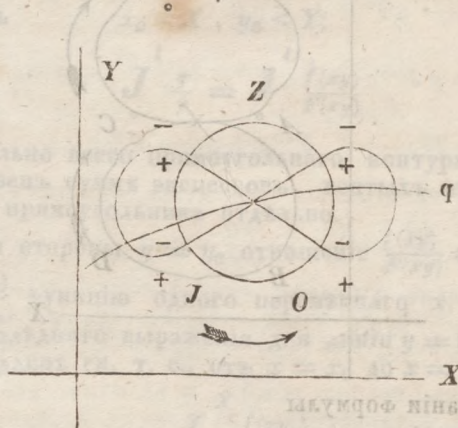
(*) Здѣсь возможно соприкосновеніе высшаго порядка; разбирать этотъ случай считаю лишнимъ.

(**) Какая либо кривая, подобная $p=0$, дѣлитъ контуръ на двѣ части, такъ что въ одной изъ этихъ частей p положительно, а въ другой отрицательно. Въ случаѣ же *maximum* или *minimum* для точекъ кривой, по обѣ стороны этихъ точекъ p имѣетъ одинаковые знаки.

въ точкѣ M ; каждая въ видѣ одной вѣтви. При этомъ формула (2) несправедлива; это легко показать.

Пусть напримѣръ $p=0$ будетъ лемниската, а $q=0$ эллипсъ; тогда очевидно изъ самаго рисунка

$$J \int \frac{q}{p} = 0.$$



И такъ при существованіи уравн. $\mu=0$ въ общемъ случаѣ выходитъ, что кривыя пересѣкаются не въ одной точкѣ, или пересѣкаются не въ видѣ одной вѣтви каждая, или наконецъ функции p и q , переходя черезъ точки пересѣченія кривыхъ съ контуромъ, не мѣняютъ знака; однимъ словомъ условія теоремы не выполняются. Если же μ не равно нулю, эти условія необходимо выполнены.

Изъ всего прежде сказаннаго вытекаетъ слѣдующее заключеніе: если двѣ функции, $p=F(xy)$, $q=f(xy)$, обращающіяся въ нуль для данной точки M , остаются для этой точки и смежныхъ съ нею непрерывными, равно какъ ихъ частныя производныя 1-го порядка и если кромѣ того, для той же точки M , μ не обращается въ нуль, то всегда можно около этой точки провести такой контуръ, чтобы относительно его

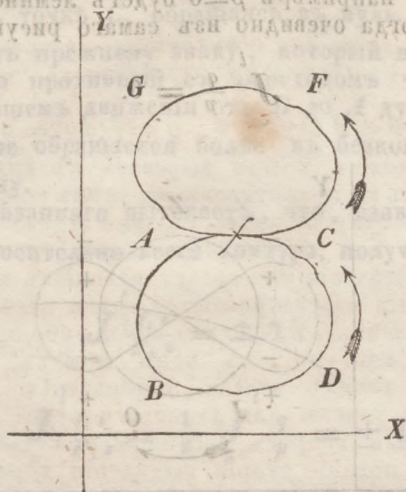
$$\frac{1}{2} J \int \frac{q}{p} = \pm 1,$$

гдѣ знакъ $(\pm)$ соответствуетъ знаку μ для M , l означаетъ длину контура, а q и p разсматриваются какъ функции переменнаго s .

§ 2.

Положимъ даны въ плоскости XY -овъ два смежные контура $ABDC$ и $ACFGA$, имѣющіе общую часть AfC ; если мы выбросимъ эту общую часть, то получимъ одинъ контуръ $ABDCFGA$. Означимъ эксцессы функций $\frac{f(xy)}{F(xy)}$ относительно всего контура $ABDC$ черезъ P , а относительно частей его $ABDC$ и CfA черезъ A и C . Соответствующія величины для контура $ACFGA$ и частей его AfC и $CFGA$ будутъ Q, D, B . Эксцессы берутся въ томъ предположеніи, что точка (x, y) всегда движется по контурамъ въ одномъ и томъ же направленіи. При этомъ будетъ

$$P = A + C, \quad Q = B + D, \\ P + Q = A + B + C + D,$$



На основаніи формулы

$$\int_{x_0}^x \frac{f(x)}{F(x)} dx = - \int_x^{x_0} \frac{f(x)}{F(x)} dx$$

получимъ $C = -D$, $C + D = 0$,
и $P + Q = A + B$.

а $A + B$ есть ничто иное, какъ эксцессъ функций $f(xy)$ относительно контура $ABDCFGA$.

И такъ сумма эксцессовъ двухъ смежныхъ контуровъ равна эксцессу одного контура, составляющагося изъ смежныхъ отбрасываніемъ ихъ общихъ частей.

Последней теоремъ можно дать болѣе широкое значеніе. Возьмемъ какой либо контуръ A и подраздѣлимъ его на другіе, то, предполагая точку (x, y) движущуюся по контурамъ всегда въ одномъ и томъ же направленіи, эксцессъ относительно A всегда равенъ суммѣ эксцессовъ контуровъ составляющихъ A .

§ 3.

Допустимъ, что для кривыхъ: $p = F(xy) = 0$, $q = f(xy) = 0$ существуютъ все условія, выраженные въ теоремѣ, заканчивающей § 1, съ тою только разницею, что эти условія относятся не къ одной точкѣ M , но къ нѣсколькимъ точкамъ пересѣченія кривыхъ внутри произвольнаго контура. Изъ числа этихъ точекъ пусть будетъ N , для которыхъ μ положительно и N_1 , для которыхъ μ отрицательно; въ такомъ случаѣ найдемъ

$$\frac{1}{2} \int \frac{q}{p} = N - N_1.$$

Около каждой изъ точекъ пересѣченія кривыхъ p и q мы можемъ очертить бесконечно-малый контуръ и по-

ловина эксцесса относительно его будетъ равна $+1$ или -1 , смотря по знаку μ . Все пространство въ произвольномъ контурѣ, за исключеніемъ занятого контурами бесконечно-малыми, раздѣлимъ на части такія, чтобы черезъ нихъ проходила одна только изъ кривыхъ p и q , или ни одна изъ кривыхъ; понятно, что для каждой изъ этихъ послѣднихъ частей

$$\int \frac{q}{p} = 0.$$

Принимая при этомъ во вниманіе конечный выводъ § 2, справедливость теоремы, (*) заключающейся въ выраженіи

$$\frac{1}{2} \int \frac{q}{p} = N - N_1$$

становится очевидною.

Относительно послѣдней теоремы можно замѣтить, что если p и q цѣлыя функціи отъ x, y , то они, а равно и ихъ частныя производныя перваго порядка остаются всегда непрерывными для конечныхъ значеній x, y . При этомъ теорема, выражаемая формулою

$$\frac{1}{2} \int \frac{q}{p} = N - N_1,$$

будетъ существовать подъ однимъ условіемъ, чтобы μ не обращалось въ нуль для всехъ корней общихъ совместныхъ уравненій

$$p = 0, \quad q = 0.$$

Если въ послѣдней теоремѣ число N_1 точекъ, для которыхъ μ отрицательно, равно нулю, то

$$\int \frac{q}{p} = N.$$

т. е., половина эксцесса отъ всего контура равна числу заключающихся въ контурѣ корней совместныхъ уравненій.

§ 4.

Теоремы, выведенныя для распознаванія присутствія общихъ корней въ уравненіяхъ съ двумя переменными, предполагаютъ необходимость, для того чтобы можно было ими пользоваться, уметь выразить p и q въ видѣ функций отъ одного переменнаго s дуги контура. Это удобно можно сдѣлать въ двухъ случаяхъ: когда контуръ обращается въ кругъ или прямоугольникъ.

Пусть нашъ контуръ будетъ кругъ, описанный радіусомъ r ; центръ его опредѣляется координатами

(*) Коши въ мемуарѣ 1833 года далъ теорему для выдѣленія корней уравненія съ двумя переменными и доказывалъ ее геометрически въ „Comptes Rendus“ (1837, 8. Май). Штурмъ и Ливиль, показавъ неполную точность теоремы Коши, замѣнили ее приведенной здѣсь, но бездоказательно (Comptes Rendus, 1837, 15. Май). Въ Journal de l'Ecole Polytechnique 1837 Коши доказываетъ эту послѣднюю теорему и выводитъ изъ нея свою предѣльную, но уже въ исправленномъ выраженіи.

α и β . Полярныя координаты точки (x, y) круга будут r и φ :

$$x = \alpha + r \cos \varphi, \quad y = \beta + r \sin \varphi.$$

Полагая дугу круга

$$s = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

$$x = \alpha + \frac{r(1-s^2)}{1+s^2}, \quad y = \beta + \frac{2rs}{1+s^2}.$$

Подставляя эти x и y въ p и q , они выразятся въ видѣ функций отъ одного s , и эксцессъ отъ $\frac{q}{p}$ для всего контура будетъ

$$\int_0^l \frac{f(xy)}{F(xy)} = \int_0^{2\pi r} \frac{f_1 s}{F_1 s} = \int_0^{2\pi r} \psi(s), \text{ если } \frac{f_1 s}{F_1 s} = \psi s.$$

Это выраженіе можно написать еще иначе: полагая

$$s = \varphi_1 r,$$

гдѣ φ_1 уголъ соответствующій дугѣ s ,

$$\int_0^{2\pi r} \psi s = \int_0^{2\pi} \psi(\varphi_1, r).$$

Надо однакожь замѣтить, что хотя и возможно всегда при круговомъ контурѣ выразить x, y функциями одно-

$$\int_0^l \frac{q}{p} = \int_{x_0}^X \frac{f(xy_0)}{F(xy_0)} + \int_{y_0}^Y \frac{f(Xy)}{F(Xy)} + \int_X^{x_0} \frac{f(xY)}{F(xY)} + \int_Y^{y_0} \frac{f(x_0 y)}{F(x_0 y)}.$$

Помощью формулы

$$\int_{x_0}^X \frac{fx}{Fx} = - \int_X^{x_0} \frac{fx}{Fx},$$

последнее равенство можно представить въ такомъ видѣ:

$$\int_0^l \frac{q}{p} = \int_{x_0}^X \frac{f(xy_0)}{F(xy_0)} - \int_{x_0}^X \frac{f(xY)}{F(xY)} + \int_{y_0}^Y \frac{f(Xy)}{F(Xy)} - \int_{y_0}^Y \frac{f(x_0 y)}{F(x_0 y)}.$$

§ 5.

Заключенія, до которыхъ мы достигли, относительно выдѣленія корней уравненій съ двумя переменными, по самому содержанию своему и по тѣмъ условіямъ, при которыхъ они существуютъ, имѣютъ весьма мало практическаго значенія для дѣйствительнаго вычисленія корней. Теоретическое ихъ значеніе тѣмъ не менѣе однакожь остается очень важнымъ въ томъ смыслѣ, что на нихъ можетъ быть основана вся теорія выдѣленія корней въ уравненіяхъ съ одною переменною, которая будетъ находиться къ нимъ въ отношеніяхъ

$$F(x + y\sqrt{-1}) = Fx - \frac{y^2}{2} F''x + \frac{y^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} F^{IV}x - \dots + \sqrt{-1} (y F^I x - \frac{y^3}{2 \cdot 3} F'''x + \frac{y^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} F^V x - \dots) = 0$$

и непосредственно распадется на два съ двумя переменными:

$$\left. \begin{aligned} Q &= Fx - \frac{y^2}{2} F''x + \frac{y^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} F^{IV}x - \dots = 0, \\ P &= y F^I x - \frac{y^3}{2 \cdot 3} F'''x + \frac{y^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} F^V x - \dots = 0. \end{aligned} \right\} (4)$$

Т. I.

го переменнаго количества, но вычисленіе эксцесса такимъ путемъ менѣе удобно, чѣмъ въ томъ случаѣ, когда контуръ обращается въ прямоугольникъ, котораго стороны параллельны осямъ координатъ.

Пусть уравненіе этихъ сторонъ

$$x = x_0, \quad x = X, \quad y = y_0, \quad y = Y,$$

при чемъ

$$x_0 < X, \quad y_0 < Y;$$

эксцессъ

$$\int_0^l \frac{q}{p} = \int_0^l \frac{f(xy)}{F(xy)}$$

относительно всего прямоугольнаго контура долженъ быть равенъ суммѣ эксцессовъ, всѣхъ отъ каждой стороны прямоугольника отдѣльно.

Для стороны $y = y_0$ отношеніе $\frac{f(xy)}{F(xy)}$ обращается въ $\frac{f(xy_0)}{F(xy_0)}$ функцию одного переменнаго x . Эксцессъ этого послѣдняго выраженія для линіи $y = y_0$, взятый по всей длинѣ ея, т. е., отъ $x = x_0$ до $x = X$, будетъ

$$\int_{x_0}^X \frac{f(xy_0)}{F(xy_0)}.$$

Совершенно подобныя выраженія найдемъ для прочихъ сторонъ прямоугольника и получимъ:

частнаго вопроса къ общему.

Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая въ уравненіи съ одною переменною

$$Fz = 0$$

мнимые корни, какъ состоящіе изъ двухъ искомыхъ величинъ, неизвѣстной дѣйствительной и неизвѣстной мнимой, мы полагаемъ

$$z = x + y\sqrt{-1},$$

отчего уравненіе $Fz = 0$ напишется:

Такимъ образомъ разысканіе мнимыхъ корней уравненія съ однимъ переменнымъ сводится къ двумъ уравненіямъ съ двумя переменными, къ которымъ прямо могутъ быть примѣнены изложенныя передъ этимъ теоремы. Посмотримъ прежде всего, каково будетъ

для ур. (4).

$$\frac{dQ}{dx} = F^1 x - \frac{y^2}{2} F^{111} x + \frac{y^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} F^{1V} x - \dots$$

$$\frac{dQ}{dy} = -y F^{11} x + \frac{y^3}{2 \cdot 3} F^{1V} x - \dots$$

$$\frac{dP}{dx} = y F^{11} x - \frac{y^3}{2 \cdot 3} F^{1V} x + \frac{y^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} F^{VI} x - \dots$$

$$\frac{dP}{dy} = F^1 x - \frac{y^2}{2} F^{111} x + \frac{y^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} F^{1V} x - \dots$$

Сравнивая написанные выражения, находим:

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{dP}{dy}, \quad \frac{dQ}{dy} = -\frac{dP}{dx}$$

следовательно μ будетъ

$$\mu = \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2 = \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dy}\right)^2. (*)$$

И такъ, вообще говоря, μ величина всегда положительная, следовательно въ нашемъ случаѣ къ ур. (4) прилагается теорема, выраженная формулою

$$\frac{1}{2} \int \frac{Q}{P} = N, \dots (5)$$

т. е., половина эксцесса отъ $\frac{Q}{P}$ относительно известнаго контура равна числу точекъ пересѣченій кривыхъ (4) въ этомъ контурѣ и каждая такая точка соответствуетъ мнимому корню.

Если контуръ принимаетъ видъ прямоугольника, образованного 4 линиями

$$x = x_0, \quad x = X, \quad y = y_0, \quad y = Y,$$

то выраженіе (5) напишется

$$\frac{1}{2} \left\{ \int_{x_0}^X \frac{Q_{y_0}}{P_{y_0}} - \int_{x_0}^X \frac{Q_Y}{P_Y} + \int_{y_0}^Y \frac{Q_{x_0}}{P_{x_0}} - \int_{y_0}^Y \frac{Q_X}{P_X} \right\} = N; (6) (**)$$

здесь Q_{y_0} показываетъ что въ Q вмѣсто y подставлено y_0 ; прочія символическія величины имѣютъ подобное же значеніе.

По формулѣ (6) мы всегда найдемъ число мнимыхъ корней, заключающихся въ данномъ прямоугольномъ контурѣ, для которыхъ действительныя части заключаются между предѣлами x_0 и X , а коэффициенты ображаемыхъ частей между y_0 и Y .

Необходимо замѣтить при этомъ, что отдѣленіе мнимыхъ корней при помощи (6) формулы будетъ производиться тѣмъ же процессомъ, какъ и выдѣленіе действительныхъ по теоремѣ Штурма, съ тою только разницею, что смотря по виду прямоугольнаго контура, придется самый процессъ повторять 2, 3 или 4 раза. Значитъ можно сказать, что теорема Коши для мни-

(*) Результатъ этотъ легко было предвидѣть, ибо здѣсь функція должна быть монотоническою (monogène), и получить прямыхъ дифференцированіемъ $F(x+y+\sqrt{-1}) = Q + P\sqrt{-1}$.

(**) Теорема Коши.

мыхъ корней въ 2, 3, 4 раза затруднительнѣе въ примѣненіи теоремы Штурма. Вообще эти двѣ теоремы совершенно аналогичны относительно недостатковъ своихъ въ практическомъ вычисленіи; на примѣръ, та и другая требуютъ огромной механической работы, прилагаясь къ уравненіямъ сколько нибудь высокой степени.

Формула (5) найдена въ предположеніи, что μ всегда положительно, и не можетъ быть примѣняема, если $\mu = 0$. Этотъ послѣдній случай влечетъ за собою

$$\frac{dP}{dx} = 0, \quad \frac{dQ}{dx} = 0, \quad \frac{dP}{dy} = 0, \quad \frac{dQ}{dy} = 0,$$

уравненія, смыслъ которыхъ мы разсмотрѣли еще прежде. Существованіе этихъ уравненій обусловливаетъ

$$F^1(x+y\sqrt{-1}) = F^1 z = 0$$

и указывать на присутствіе равныхъ корней въ уравненіи.

$$Fz = 0.$$

Изъ этого мы видимъ, что, когда ур. $Fz = 0$ не заключаетъ равныхъ корней, всегда можно выдѣлить въ немъ мнимые корни и найти приближенные величины для количествъ x , y этихъ корней, отъ которыхъ легко перейти къ точнымъ величинамъ x , y известными способами приближенія, на примѣръ линейнымъ приближеніемъ, распространеннымъ на уравненія съ двумя неизвестными.

§ 6.

Штурмъ и Ліувилль (*) показали, что теорема, выражающаяся формулами (5) или (6) для мнимыхъ корней, справедлива и въ томъ случаѣ, когда уравненіе $Fz = 0$ имѣетъ равные корни. Въ нашемъ предъидущемъ выводѣ мы не достигли такой общности результата, потому что онъ вышелъ изъ теоремы, по самому существу своему недопускающей равныхъ корней.

Мы приведемъ здѣсь доказательство Штурма.

Въ уравненіи $Fz = 0$

полагаемъ $z = x + y\sqrt{-1}$;

тогда $F(x+y\sqrt{-1}) = Q + P\sqrt{-1} = 0$.

Отсюда непосредственно

$$P = 0, \quad Q = 0, \dots (7)$$

P и Q , какъ функціи двухъ переменныхъ x , y , могутъ быть всегда выражаемы въ видѣ двухъ кривыхъ, отнесенныхъ къ прямоугольнымъ осямъ. Сколько эти кривыя будутъ имѣть точекъ пересѣченія, столько общихъ корней будутъ имѣть уравненія (7) и столько же корней будетъ имѣть уравненіе $Fz = 0$.

Пусть координаты точекъ пересѣченія $A, A_1, A_2, \dots$ кривыхъ $P = 0, Q = 0$ будутъ

$$(a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$$

(*) Штурмъ и Ліувилль въ „Journal de Mathématiques“ Ліувилля (1836, Août) дали нѣсколько очень простыхъ доказательствъ теоремы Коши, заключающейся въ формулахъ (5) и (6).

то корни $Fz=0$ напишутся:

$$a + b\sqrt{-1}, a_1 + b_1\sqrt{-1}, a_2 + b_2\sqrt{-1}, \dots$$

и $F(x + y\sqrt{-1})$ примет вид:

$$F(x + y\sqrt{-1}) = \{x - a + (y - b)\sqrt{-1}\} \{x - a_1 + (y - b_1)\sqrt{-1}\} \dots = 0$$

Между координатами $(a, b), (a_1, b_1), \dots$ или корнями $a + b\sqrt{-1}, a_1 + b_1\sqrt{-1}, \dots$ могут быть и равные

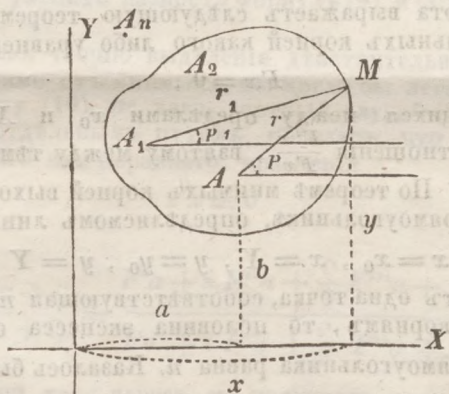
$$F(x + y\sqrt{-1}) = Q + P\sqrt{-1} = r \cdot r_1 \cdot r_2 \dots (\cos p + \sin p\sqrt{-1}) (\cos p_1 + \sin p_1\sqrt{-1}) (\cos p_2 + \sin p_2\sqrt{-1}) \dots$$

$$= r \cdot r_1 \cdot r_2 \dots \{ \cos(p + p_1 + p_2 + \dots) + \sin(p + p_1 + p_2 + \dots)\sqrt{-1} \} = 0$$

$$Q = r \cdot r_1 \cdot r_2 \dots \cos(p + p_1 + p_2 + \dots), \quad P = r \cdot r_1 \cdot r_2 \dots \sin(p + p_1 + p_2 + \dots)$$

$$\frac{Q}{P} = \cotg(p + p_1 + p_2 + \dots)$$

Положим теперь точка (x, y) или M начинает двигаться по контуру, совершая свое движение всегда в одну и ту же сторону. При этом, когда точка M сдвигается полный оборот и возвратится в первоначальное положение, для каждой точки: $A, A_1, A_2, \dots$, лежащей внутри контура, угол p или p_1 или p_2 и т. д. обратится в $p + 2\pi, p_1 + 2\pi, p_2 + 2\pi, \dots$, а для точки A_n пересечения кривых с контуром угол p_n возвратится к прежней величине. И так сумма $p + p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = \alpha$ обратится в $p + p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots + 2m\pi = \alpha + 2m\pi$, если M совершит свой путь по всему контуру.



Что же будет в это время с отношением

$$\frac{Q}{P} = \cotg(p + p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots) ?$$

$\cotg(p + p_1 + p_2 + \dots)$ будет переходить через ∞ от отрицательных значений к положительным всякий раз, когда $p + p_1 + p_2 + \dots$ перейдет, увеличиваясь, через величину $n\pi$, в которой

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Напротив того $\cotg$ перейдет от положительного значения к отрицательному при переходе через ту же величину $n\pi$ суммы $p + p_1 + p_2 + \dots$, когда она уменьшается.

Положив $\alpha = \beta + q\pi$, где $\beta < \pi$, все углы $n\pi$, заключающиеся между $\beta + q\pi$ и $\beta + (q + 2m)\pi$, получим, придавая n значения:

Начертим произвольный контур, положим в нем заключается m точек пересечения кривых $P=0, Q=0$ и переведем $x=a, x=a_1, \dots, y=b, y=b_1, \dots$ в полярные координаты:

$$x-a=r \cos p, x-a_1=r_1 \cos p_1, x-a_2=r_2 \cos p_2, \dots$$

$$y-b=r \sin p, y-b_1=r_1 \sin p_1, y-b_2=r_2 \sin p_2, \dots$$

$$q+1, q+2, \dots, q+2m.$$

Всех этих углов будет $2m$.

Очевидно теперь, что, когда точка M , передвигаясь, обойдет весь контур и сумма $p + p_1 + p_2 + \dots$ из α обратится в $\alpha + 2m\pi$,

$$\frac{Q}{P} = \cotg(p + p_1 + p_2 + \dots)$$

перейдет через ∞ $2m$ раз более от отрицательных значений к положительным, чем от положительных к отрицательным, потому что если бы сумма $p + p_1 + p_2 + \dots$ получила некоторые из значений $n\pi$ не заключающихся в ряду:

$$(q+1)\pi, (q+2)\pi, \dots, (q+2m)\pi,$$

то перешла бы через них столько же раз увеличиваясь сколько уменьшаясь, при чем $\cotg(p + p_1 + p_2 + \dots)$ перешел бы столько же раз от положительных значений к отрицательным сколько и наоборот.

И так если уравнение какой либо n -ой степени

$$Fz = F(x + y\sqrt{-1}) = Q + P\sqrt{-1} = 0$$

имеет m корней: $a + b\sqrt{-1}, a_1 + b_1\sqrt{-1}, \dots$ между которыми могут быть и равные, и величины $(a, b), (a_1, b_1), \dots$ для этих корней определяют как координаты m точек, лежащих внутри произвольного начерченного контура длины l , то половина эксцесса относительно всего контура функции $\frac{Q}{P}$ будет равна m .

$$\frac{1}{2} \int_0^l \frac{Q}{P} = m$$

Это теорема Коши, только распространенная на равные корни; формулу, её выражающую, можно представить несколько иначе,

$$\int_0^l \frac{Q}{P} + \int_0^l \frac{P}{Q} = p = 0$$

p здесь равно нулю, потому что при предѣлах 0 и l функция $\frac{P}{Q}$ сохраняет один и тот же знак.

Соединяя последнее равенство с предыдущим, найдем

$$\frac{1}{2} \int_0^l \frac{P}{Q} = -m \quad (8)$$

§ 7.

Мы знаемъ, что всякій мнимый корень $a + b\sqrt{-1}$ перейдетъ въ дѣйствительный, если $b = 0$, или иначе, дѣйствительный корень можетъ быть разсматриваемъ, какъ частный случай мнимаго. Это дѣлаетъ яснымъ, что изъ теоремы выдѣленія мнимыхъ корней, выражаемой формулою (8) для произвольнаго контура, можно вывести совершенно подобную же теорему для дѣйствительныхъ корней.

Въ самомъ дѣлѣ станемъ искать число мнимыхъ корней: $a + b\sqrt{-1}, a_1 + b_1\sqrt{-1}, \dots$

уравненія

$$Fz = 0,$$

которыхъ дѣйствительныя части $a, a_1, \dots$ заключаются между x_0 и X , а коэффициенты мнимыхъ частей: $b, b_1, \dots$ между $-\Delta y$ и $+\Delta y$, гдѣ Δy такъ мало, какъ это угодно, или, иначе говоря, станемъ искать

$$\frac{1}{2} \left\{ \int_{x_0}^X \frac{P - \Delta y}{Q - \Delta y} - \int_{x_0}^X \frac{P + \Delta y}{Q + \Delta y} + \int_{-\Delta y}^{+\Delta y} \frac{P_x}{Q_x} - \int_{-\Delta y}^{+\Delta y} \frac{P_{x_0}}{Q_{x_0}} \right\} = -m. \quad (9)$$

$$P = y F^1 x - \frac{y^3}{2 \cdot 3} F^{111} x + \frac{y^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} F^{11111} x - \dots$$

$$Q = F x - \frac{y^3}{2} F^{11} x + \frac{y^5}{2 \cdot 3 \cdot 4} F^{111} x - \dots$$

$P - \Delta y$ при Δy такъ маломъ, какъ угодно; будетъ просто $-\Delta y F^1 x$.

$Q - \Delta y$ при тѣхъ же условіяхъ будетъ равно Fx

$$\int_{x_0}^X \frac{P - \Delta y}{Q - \Delta y} = \int_{x_0}^X \frac{-\Delta y F^1 x}{Fx} = - \int_{x_0}^X \frac{\Delta y F^1 x}{Fx}.$$

Δy количество постоянное и никакого вліянія на эксцессъ имѣть не можетъ, потому

$$\int_{x_0}^X \frac{P - \Delta y}{Q - \Delta y} = - \int_{x_0}^X \frac{F^1 x}{Fx}.$$

Точно также

$$\int_{x_0}^X \frac{P + \Delta y}{Q + \Delta y} = \int_{x_0}^X \frac{F^1 x}{Fx}.$$

Эксцессы

$$\int_{-\Delta y}^{+\Delta y} \frac{P_x}{Q_x} \quad \text{и} \quad \int_{-\Delta y}^{+\Delta y} \frac{P_{x_0}}{Q_{x_0}}$$

равны нулю, потому что между предѣлами $-\Delta y$ и $+\Delta y$ функции Q_{x_0} и Q_x корней не имѣютъ и отношенія

$$\frac{P_x}{Q_x}, \frac{P_{x_0}}{Q_{x_0}}$$

перейти черезъ ∞ не могутъ.

И такъ формула (9) даетъ

$$\frac{1}{2} \left\{ - \int_{x_0}^X \frac{F^1 x}{Fx} - \int_{x_0}^X \frac{F^1 x}{Fx} \right\} = -m$$

корни, заключающіеся въ прямоугольномъ контурѣ, опредѣляемомъ линіями:

$$x = x_0, x = X, y = -\Delta y, y = +\Delta y.$$

Понятно, что при этихъ условіяхъ въ корняхъ:

$$a + b\sqrt{-1}, a_1 + b_1\sqrt{-1}, \dots$$

величины $b, b_1, \dots$ нули и самые корни будутъ дѣйствительныя:

$$a, a_1, \dots$$

Принимая, что формула

$$\frac{1}{2} \int_0^l \frac{P}{Q} = -m$$

относится къ прямоугольнику, она для настоящаго случая, подобно формулѣ (6), напишется:

$$\text{или} \quad \int_{x_0}^X \frac{F^1 x}{Fx} = m. \quad (10)$$

Формула эта выражаетъ слѣдующую теорему: число дѣйствительныхъ корней какого либо уравненія

$$Fx = 0,$$

заключающихся между предѣлами x_0 и X , равно эксцессу отношенія $\frac{F^1 x}{Fx}$, взятому между тѣми же предѣлами (*). По теоремѣ мнимыхъ корней выходитъ, что если въ прямоугольникѣ, опредѣляемомъ линіями:

$$x = x_0, x = X, y = y_0, y = Y$$

существуетъ одна точка, соответствующая n равнымъ мнимымъ корнямъ, то половина эксцесса отношенія $\frac{Q}{P}$ для прямоугольника равна n . Казалось бы что выраженіе (10), какъ частный случай (6), должно имѣть подобный же смыслъ, т. е., эксцессъ функции $\frac{F^1 x}{Fx}$ между предѣлами x_0 и X долженъ бы быть равенъ n , если между тѣми же предѣлами уравненіе $Fx = 0$ имѣетъ n равныхъ корней. Сдѣлавъ такое заключеніе мы однакожь впали-бы въ ошибку. Припомнимъ себѣ теорему, найденную въ § 2 вычисленія эксцессовъ, для дѣйствительныхъ корней; она намъ укажетъ на совер-

(*) Теорема эта доказывалась обыкновенно отдѣльно и самостоятельно; предлагаемый здѣсь выводъ ея, какъ частнаго случая теоремы мнимыхъ корней, имѣетъ ту выгодную сторону, что даетъ возможность съ большою последовательностью и связью развить теорію выдѣленія корней уравненій съ однимъ переменнымъ. Это же, должно быть, имѣлъ въ виду и Муанъ, говоря въ „Journal de Mathématiques“ Ливуилля (р. 94, 1840, Мартъ) въ статьѣ о выдѣленіи корней помощью начала эксцессовъ: ce théorème (для мним. кор.) renferme comme cas particulier, toutes les propositions sur le nombre des racines réelles des équations algébriques. Je pourrai, dans une autre circonstance entrer à ce sujet dans quelques détails.

шенно противное. По теоремѣ этой, если между предѣлами x_0 и X для $f'x$ существуетъ n , а для $F'x$ m действительныхъ равныхъ корней и если притомъ $m-n$ число положительное и нечетное, то

$$\int_{x_0}^X \frac{f'x}{F'x} = \pm 1.$$

Для теоремы (10) $f'x = F'x$, следовательно $n = m - 1$, $m - n = 1$, количеству нечетному и положительному, потому сколько бы для $F'x$, между предѣлами x_0 и X , не существовало равныхъ корней, эксцессъ, отыскиваемый по (10), всегда равенъ единицѣ для этихъ равныхъ корней. И такъ значеніе выраженія (10) можно теперь формулировать точнѣе прежняго: Число действительныхъ и неравныхъ корней уравненія $F'x = 0$ между предѣлами x_0 и X равно эксцессу отношенія $\frac{F'x}{F'x}$ между тѣми же предѣлами.

Теорема § 2 къ эксцессамъ, вычисляемымъ по формуламъ (6) или (9), приложения не имѣтъ: возьмемъ напр. уравненіе

$$(z-1)^3 = 0,$$

имѣющее 3 корня равныхъ единицъ, и станемъ выдѣлять эти корни по формулѣ (9), принимая ихъ за 3 равные, мнимые вида:

$$1 + 0\sqrt{-1}, \quad 1 + 0\sqrt{-1}, \quad 1 + 0\sqrt{-1},$$

то получимъ, половина эксцесса = 3.

Далѣе уяснить разность формулъ (9) и (10) считаю излишнимъ.

Развивая теорію выдѣленія действительныхъ корней независимо отъ мнимыхъ, мы могли бы легко отыскать теорему (10), не какъ частный случай (9), но совершенно отдѣльнымъ путемъ, показавъ, что для корня a , равнаго или неравнаго, уравненія

$$F'x = 0$$

отношеніе

$$\frac{F'x}{F'x} = \frac{F'(a+i)}{F'(a+i)} = \frac{F'a + iF''a + \frac{i^2}{2}F'''a + \dots}{Fa + iF'a + \frac{i^2}{2}F''a + \dots},$$

переходя при $x=a$ черезъ ∞ , получаетъ эксцессъ равный единицѣ съ возрастаніемъ x отъ $a-i$ до $a+i$.

§ 8.

Теорема (10) въ выдѣленіи действительныхъ корней основная; она можетъ служить исходною точкою для вывода важнѣйшихъ, извѣстныхъ теоремъ, дающихъ первую, приближенную величину корня. Соединяя её съ правиломъ § 5 вычисленія эксцессовъ или интегральныхъ индексовъ, непосредственно получаемъ теорему Штурма.

Въ самомъ дѣлѣ число корней между предѣлами x_0 и X уравненія

$$F'x = 0$$

равно

$$\int_{x_0}^X \frac{F'x}{F'x}.$$

Для отысканія величины $\int_{x_0}^X \frac{F'x}{F'x}$ мы производимъ

операцию общаго наибольшаго дѣлителя между $F'x$ и $F'x$ и, означая послѣдовательные остатки съ противными знаками $F_1x, F_2x, \dots, F_nx$, получаемъ подстановкою x_0 и X два ряда:

$$F'x_0, F'x_0, F_1x_0, F_2x_0, \dots, F_nx_0, \\ F'X, F'X, F_1X, F_2X, \dots, F_nX.$$

Сосчитавъ число переменъ верхняго ряда и число переменъ нижняго, разность дастъ величину эксцесса

$$\int_{x_0}^X \frac{F'x}{F'x}$$

и следовательно число корней уравненія

$$F'x = 0$$

между предѣлами x_0 и X .

Пользуясь замѣчаніями (a), (b), (c) § 5-го, относящимися къ производству операции общаго наибольшаго дѣлителя и счёту переменъ, мы приходимъ къ тѣмъ облегченіямъ въ практическомъ вычисленіи, на которыя указалъ Штурмъ въ своей теоремѣ для извѣстныхъ случаевъ.

§ 9.

Полагая для $F'x$ m корней между x_0 и X , имѣемъ

$$\int_{x_0}^X \frac{F'x}{F'x} = m;$$

если всѣ эти корни равны a ,

$$\int_{x_0}^X \frac{F'x}{F'x} = \int_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{F'x}{F'x} = 1,$$

гдѣ δ какое либо малое количество.

Послѣднее равенство показываетъ, что отношеніе $\frac{F'x}{F'x}$ между предѣлами $a-\delta$ и $a+\delta$ переходитъ при $x=a$ черезъ ∞ отъ отрицательнаго значенія къ положительному, следовательно $F'(a-\delta)$, $F'(a-\delta)$ должны давать перемѣну, а $F'(a+\delta)$, $F'(a+\delta)$ повтореніе знаковъ, или иначе, до перехода черезъ корень, функции начальная и производная съ противными, а послѣ перехода, — съ одинаковыми знаками. Тоже самое будетъ, если $m=1$ и между $a-\delta$ и $a+\delta$ заключается одинъ только корень a для $F'x$. Изъ этого начала сейчасъ же получается теорема Ролля.

Пусть a и b два действительные корня уравненія

$$F'x = 0;$$

кромѣ того $a < b$ и между ними нѣтъ никакихъ другихъ корней. Въ такомъ случаѣ

$$F'(a+\delta) \text{ и } F'(a+\delta) \text{ съ одинаковыми знаками,} \\ F'(b-\delta) \text{ и } F'(b-\delta) \text{ съ разными.}$$

Между a и b нѣтъ корней и

$F(a+\delta)$, $F(b-\delta)$ будутъ тоже съ одинаковыми, а слѣдственно

$F'(a+\delta)$, $F'(b-\delta)$ съ разными знаками.

Отсюда видно, что $F'x$ имѣетъ между $a+\delta$ и $b-\delta$, или между a и b по крайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный корень.

Теорема Ролля легко доказывается и другимъ путемъ.

$$\int_{x_0}^X \frac{F'x}{F'x} + \int_{x_0}^X \frac{F'x}{F'x} = p,$$

или

$$\int_{x_0}^X \frac{F'x}{F'x} = - \int_{x_0}^X \frac{F'x}{F'x} + p.$$

Допуская для уравненія $F'x=0$ существованіе q дѣйствительныхъ корней между предѣлами x_0 и X

$$\int_{x_0}^X \frac{F'x}{F'x} = q,$$

— $\int_{x_0}^X \frac{F'x}{F'x}$ никогда не можетъ превзойти числа q_1 , показывающаго сколько разъ $\frac{F'x}{F'x}$ переходитъ ∞ , или числа корней $F'x$ между предѣлами x_0 и X , слѣдовательно

$$q \leq q_1 + p.$$

Наибольшая, возможная величина для p единица, потому

$$q \leq q_1 + 1,$$

т. е., число корней уравненія $F'x=0$ между предѣлами x_0 и X никогда не превзойдетъ болѣе чѣмъ единицу число корней $F'x=0$ между тѣми же предѣлами. Это опять теорема Ролля. Изъ нея непосредственно слѣдуетъ: если $b, b_1, b_2, \dots, b_m$ корни $F'x=0$, то уравн. $F'x=0$ можетъ имѣть одинъ только корень меньшій b , одинъ между b и b_1 , одинъ между b_1 и b_2 , и т. д., наконецъ одинъ большій b_m . И такъ корни $F'x=0$ служатъ предѣлами для корней $F'x=0$.

§ 10.

Заключеніе, сдѣланное въ началѣ § 9 относительно знаковъ $F'x$ и $F'x$ до перехода и послѣ перехода черезъ корень, совершенно общее и вполне справедливо для какой либо m -ой производной $F^m x$ и ея первой производной $F^{m+1}x$. Прилагая это заключеніе къ уравненію

$$F'x=0$$

n -ой степени, легко находимъ, что если въ ряду

$$F^n x, F^{n-1}x, F^{n-2}x, \dots, F'x, F'x, F'x \dots (A)$$

при $x=a$, i функций сразу отъ праваго края обращаются въ нули (ур. $F'x=0$ имѣетъ i равн. кор.), то самый рядъ теряетъ i переменъ.

$$\begin{array}{cccccccc} F^n x, & \dots & F^{i+1}x, & F^i x, & F^{i-1}x, & F^{i-2}x, & \dots & F'x, F'x, F'x \\ x=a-\delta & \dots & \pm & \mp & \pm & \dots & \pm & \mp & \pm \\ x=a & \dots & \pm & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ x=a+\delta & \dots & \pm & \pm & \pm & \dots & \pm & \pm & \pm \end{array}$$

Если $i=1$, то теряется одна переменъ.

Совершенно подобнымъ образомъ можно показать, что при обращеніи въ нуль одной или нѣсколькихъ среднихъ функций ряда (A) не теряется совершенно переменъ, или теряется ихъ четное число.

Соединяя два послѣдніе вывода, видимъ, что число дѣйствительныхъ корней уравненія $F'x=0$ между количествами f и g никогда не можетъ превосходить разности суммъ переменъ знаковъ рядовъ:

$$F^n(f), F^{n-1}(f), \dots, F'(f), F(f),$$

$$F^n(g), F^{n-1}(g), \dots, F'(g), F(g),$$

или иначе, съ возрастаніемъ x въ ряду (A) число переменъ возрастать не можетъ.

Это послѣднее заключеніе можетъ быть впрочемъ доказано совершенно независимо.

Пусть соответственно $q, q_1, q_2, \dots, q_n$ означаютъ число корней между предѣлами x_0 и X для каждой функціи ряда (A); по теоремѣ Ролля:

$$q \leq q_1 + p_1, q_1 \leq q_2 + p_2, q_2 \leq q_3 + p_3, \dots, q_{n-1} \leq q_n + p_n$$

Складывая написанныя уравненія и неравенства

$$q + q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1} \leq q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1} + q_1 + p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

$$\text{или } q \leq q_n + p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

$F^n x$ количество постоянное; число корней ея $q_n=0$.

$$q \leq p_1 + p_2 + \dots + p_n.$$

Подобно тому, какъ въ § 5 вычисленія эксцессовъ, можемъ показать, что сумма

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

равна числу переменъ знаковъ V_{x_0} ряда:

$$F^n x_0, F^{n-1}x_0, \dots, F'x_0, F'x_0, F'x_0 \dots (a)$$

безъ числа переменъ V_X ряда

$$F^n X, F^{n-1}X, \dots, F'X, F'X, F'X \dots (b)$$

т. е.,

$$q \leq V_{x_0} - V_X,$$

число дѣйствительныхъ корней $F'x$ между предѣлами x_0 и X равно или менѣе числа переменъ знаковъ ряда (a) безъ числа переменъ ряда (b).

Подставляемъ въ рядъ (A) какія либо очень большія числа $-a$ и $+a$. Отъ первой подстановки въ рядъ получаются однѣ переменъ, а отъ второй однѣ повторенія знаковъ. При этомъ когда въ ряду (A) x перейдетъ отъ $-a$ до $+a$, рядъ теряетъ n переменъ, число равное числу корней

$$F'x=0.$$

Принимая это послѣднее обстоятельство во вниманіе выветъ со вѣтъ прежде сказаннымъ, становится яснымъ, что когда рядъ (A) теряетъ разомъ четное

число переменъ при уничтоженіи или обращеніи въ нуль среднихъ функций, то число потерянныхъ такимъ образомъ переменъ указываетъ на присутствіе равнаго числа мнимыхъ корней въ уравненіи

$$Fx = 0.$$

Мы представили здѣсь начала, составляющія главную сущность теоремы Фурье; изъ нихъ легко уже развиваются всѣ остальные ея подробности.

Мимоходомъ замѣтимъ слѣдствіе, выходящее изъ этой теоремы. Подставляя въ рядъ (A) числа l и l' , если первое дастъ одинъ переменъ, а второе одинъ повторенія знаковъ, значитъ между ними заключаются всѣ корни уравненія $Fx = 0$ и l' будетъ высшій а l

высшій предѣлъ. Это известная характеристика предѣловъ, найденная впервые Ньютономъ.

Легко можно бы было показать, что и Декартово правило знаковъ, какъ прямое слѣдствіе теоремы Фурье или Роля, тоже вытекаетъ изъ принципа экцессовъ.

Вообще этимъ путемъ получаютъ замѣчательнѣйшія теоремы выдѣленія корней, исключая конечно Лагранжесвой, которой основная истина: „функция Fx всегда мѣняетъ знакъ, переходя черезъ дѣйствительный корень“, положена у насъ въ основаніе самаго начала экцессовъ. Выводить её изъ этого начала, значитъ давать круговое доказательство.

П. Ромеръ.

Démonstration d'un théorème du calcul différentiel.

On sait que, sans avoir le développement d'une fonction quelconque en serie par la base du calcul différentiel, la recherche des dérivées des fonctions exponentielles ou logarithmiques se ramène à la considération de la limite de l'expression $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ dans laquelle α est une quantité infiniment petite. Nous dénotons la limite de cette expression par la lettre e , pour abréger le discours.

Il est juste d'admettre l'insuffisance de la démonstration qui se fonde sur la formule du binôme de Newton et qui se sert pour prouver que la quantité e est égale à la serie $1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots$, quand $\frac{1}{\alpha}$ est un nombre entier positif croissant indéfiniment; cette démonstration suppose en effet que pour $\frac{1}{\alpha} = \infty$ le produit

$(1 - \alpha)(1 - 2\alpha) \dots [1 - (n-1)\alpha]$ se réduit à l'unité, ce qui est vrai quand n est un nombre déterminé indépendant de $\frac{1}{\alpha}$, mais ne l'est plus quand on a par exemple $n = \frac{1}{\alpha}$ ou $n = \frac{1}{\alpha} - 1$ etc. Or, pour savoir la quantité e , il n'est nécessaire qu'à décider si la quantité e est une valeur définie? La résolution de cette question compose la théorie que je veux démontrer.

A l'aide de cette théorie, nous pouvons actuellement savoir la quantité e . Si nous prouvons la théorie proposée, il est évident que, ne développant pas en serie la fonction e^x , nous déduirons la dérivée de cette fonction et nous recevrons que la dérivée de e^x est égale à $e^x \log e$. Soit e la base d'un système logarithmique quelconque, c'est alors que la dérivée de e^x sera égale à e^x et la théorie de Maclaurin nous fera connaître que la quantité e est égale à la serie $1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots$

Ainsi nous allons prouver la théorie proposée.

Soit la fonction exponentielle $y = a^x$ dans laquelle x est une variable et a est une valeur constante. On sait que la fonction y est continue et que, si x varie dans le même sens dans tout l'intervalle compris entre $x = +\infty$ et $x = -\infty$, y varie constamment dans un même sens, c'est-à-dire toujours en augmentant ou toujours en diminuant.

D'après cela, il est facile de démontrer notre théorie.

Soient b et c deux valeurs de x déterminées des quelles $b > c$, a^b et a^c seront les valeurs correspondantes de y aussi déterminées; par conséquent le nombre fractionnaire algébrique $\frac{b-c}{a^b - a^c}$ sera une valeur définie que nous dénotons par la lettre A pour abréger le discours. Partageons l'intervalle $b - c$ en n parties égales, que nous désignerons par h , on aura

$$b - c = nh \quad a^b - a^c = a^c (a^{nh} - 1)$$

et par conséquent

$$A = \frac{nh}{a^c (a^{nh} - 1)};$$

mais

$$a^{nh} - 1 = (a^{nh} - a^{(n-1)h}) + (a^{(n-1)h} - a^{(n-2)h}) + \dots + (a^{2h} - a^h) + (a^h - 1)$$

$$\text{ou } a^{nh} - 1 = (a^h - 1) (a^{(n-1)h} + a^{(n-2)h} + \dots + a^h + 1).$$

Nous posons

$$s = a^{(n-1)h} + a^{(n-2)h} + \dots + a^h + 1.$$

Le nombre de tous les membres de la somme s est égale à n , et $a^{(n-1)h}$ est le plus grand de ces membres; de sorte que $n \cdot a^{(n-1)h} > s$, et à fortiori $n \cdot a^{nh} > s$ ou $n \cdot a^{nh} > s$. D'après cela, en observant que les quantités $a^h - 1$ et a^c sont des valeurs positives et que $a^c \cdot a^{nh} = a^b$, nous aurons

$$(1) \dots (a^h - 1) n \cdot a^b > a^c (a^{nh} - 1).$$

Si l'inégalité (1) a lieu, la valeur désignée par A sera plus que le nombre fractionnaire $\frac{nh}{(a^h - 1) n e^b}$.

En divisant les deux membres de ce nombre fractionnaire en le même n , nous recevrons

$$A > \frac{h}{a^b (a^h - 1)}$$

d'où résulte (2)... $a^h A > \frac{h}{a^h - 1}$.
Si l'on fait croître n indéfiniment, h tendra vers zéro.
Cela posé, nous admettons

$$(3)... a^h = 1 + a,$$

a étant une quantité infiniment petite, aussi que h .
L'égalité (3) donne

$$a^h - 1 = a \text{ et } h \cdot \log a = \log(1 + a) \text{ ou } h = \frac{\log(1 + a)}{\log a}.$$

En substituant ces valeurs des $a^h - 1$ et h dans l'inégalité (2) et en observant que $\log a$ est une valeur positive, nous aurons l'inégalité suivante

(4)... $B > \log(1 + a)^{\frac{1}{a}}$,
dans laquelle $B = A a^h \cdot \log a$, et par conséquent B est une valeur définie. Ainsi l'inégalité (4) montre que la logarithme de la limite de l'expression $(1 + a)^{\frac{1}{a}}$ dans laquelle a est une quantité infiniment petite, ou la logarithme de la quantité e est moins qu'une valeur définie B ; d'où nous devons conclure que la quantité e est une valeur définie.

G. Sabinine

Precepteur du troisième Gymnase réel à Moscou.

20 Avril 1861.

II.

Библиографический указатель.

18. Fischer, Grundzüge des auf menschliche Sterblichkeit gegründeten Versicherungswesens. 1 Abth. Bestimmung der Sterblichkeitsverhältnisse. — Oppenheim, 1860.

Это сочинение представляет не только практический, но и научный интерес, ибо оно содержит критический разбор употребляемых доселе метод для составления таблиц смертности и вывода из оных рѣроятнѣйшихъ результатовъ. Во 2-мъ отдѣлѣ авторъ общаетъ изложить теоретическую и практическую сторону учреждений застрахованія.

19. Apollonius von Perga, Sieben Bücher über Kegelschnitte, nebst dem durch Halley wieder hergestellten achten Buche. Deutsch bearbeitet von H. Balsam. Berlin 1861.

Первое, латинское изданіе этого знаменитаго сочиненія древняго математика, жившаго за 200 лѣтъ до Р. X., появилось въ 1537 году, но содержало только четыре книги. До половины 17-го столѣтія другія книги не были извѣстны. Полнѣйшій арабскій манускриптъ содержащій 7 книгъ, привезенный съ Востока Голіусомъ и проданный Великому Герцогу Тосканскому, былъ изданъ въ латинскомъ переводѣ въ 1661 г. Осьмая книга была восстановлена въ 1-й разъ Галлеемъ и полное, приведенное въ систему изданіе явилось въ 1710 году. Новое нѣмецкое изданіе имѣетъ по изложенію значительныя преимущества передъ предъидущимъ, которое притомъ сдѣлалось уже весьма рѣдкимъ.

20. Graham, A. Lunar Tidal Wave in Lake Michigan.

Изъ многочисленныхъ наблюденій, произведенныхъ надъ высотой воды въ озерѣ Мичиганъ обнаружено авторомъ явленіе прилива и отлива, производимаго луною. Средняя разность высоты стоянія воды достигаетъ 0,15 фута и наибольшая высота наступаетъ спустя 30 мин. послѣ прохожденія луны чрезъ меридіанъ.

21. Wolf. Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz. 3 Cyclus. Zürich 1861.

Этотъ отдѣлъ весьма интереснаго изданія содержитъ 20 біографій (выполняющихъ періодъ отъ 1493 до 1850 года), между коими мы упомянемъ только Даниила Бернулли (съ портретомъ) и Іоанна Гейнриха Ламберта.

22. Delboeuf J. Prolégomènes philosophiques de la géométrie et solution des postulats. Liège 1860.

Сочинитель имѣлъ въ виду двойную цѣль, онъ хотѣлъ доказать съ одной стороны философическое сродство математики съ другими науками, а съ другой, найти совершенно очевидное и строгое основаніе для геометріи. Если эта цѣль и не могла быть вполне достигнута, то неменѣе того это сочиненіе представляетъ весьма много интереснаго, и преимущественно въ критическомъ отношеніи, какъ напр. математическое изслѣдованіе различныхъ доказательствъ теоремы, опредѣляющей суммы угловъ въ треугольникѣ.

III.

Опыты надъ прохожденіемъ гальваническаго тока чрезъ порошкообразные проводники (сообщено К. Чеховичемъ).

Бейцъ (1) показалъ, что нагрѣтые желѣзные опилки, губчатая платина и нѣсколько родовъ угля, въ порошокъ проводятъ гальваническій токъ лучше, нежели при обыкновенной температурѣ. Онъ объясняетъ это явленіе такимъ образомъ: въ порошкообразномъ видѣ тѣло состоитъ изъ частицъ, неплотно пристающихъ

другъ къ другу, поэтому гальваническій токъ встрѣчаетъ въ раздѣляющихъ оныя промежуткахъ, большое сопротивленіе; при нагрѣваніи же частицы расширяются, приходятъ въ тѣснѣйшее прикосновеніе и проводимость становится значительнѣе. — Желая познакомиться съ явленіемъ и удостовѣриться въ справедливости такого взгляда, я произвелъ рядъ опытовъ, которые воюл-

(1) Pogg. Ann. B. CXI. s. 169.

нѣ подтвердили высказанное выше мнѣніе, а кромѣ того дали возможность сдѣлать нѣкоторые замѣчания, оправдываемыя болѣе значительнымъ числомъ испытанныхъ мною веществъ, нежели въ опытахъ Беца.

Я употреблялъ цѣпь, составленную изъ одного элемента Томсона (2), мультипликатора Швейгера, фарфоровой чашки, куда насыпались порошкообразныя тѣла, и которая нагревалась помощію лампы Берцелліуса, и особеннаго коммутатора, посредствомъ котораго можно было по произволу исключить элементъ цѣпи и составить ее только изъ гальванометра и нагреваемого порошкообразнаго тѣла. Коммутаторъ былъ нуженъ для того, чтобы удостоверить, имѣтъ ли посторонняго тока, получающаго свое начало въ самомъ порошкообразномъ, нагрѣтомъ тѣлѣ, и дѣйствующаго въ одинаковомъ или противоположномъ направленіи съ главнымъ токомъ; такъ какъ во многихъ случаяхъ отклоненіе довольно слабо, то оно могло бы быть приписано и постороннимъ причинамъ. Electroдами въ порошкообразномъ тѣлѣ служили платиновые проволоки.

Изъ опытовъ оказалось: а) всѣ металлы, приведенныя въ порошкообразное состояніе, становятся худшими проводниками, нежели въ плотномъ видѣ; и чѣмъ порошокъ мельче, тѣмъ проводимость хуже. б) Проводимость порошкообразнаго проводника вообще увеличивается съ возвышеніемъ температуры, согласно съ теоріею Беца. Въ тѣхъ же случаяхъ, когда повидимому проводимость металлическаго порошка съ увеличеніемъ температуры уменьшается, всякій разъ оказывается, что металлъ переходитъ въ окись, которая принадлежитъ къ непроводникамъ. Напримѣръ, крупныя опилки красной мѣди при обыкновенной температурѣ легко проводятъ токъ, такъ что стрѣлка гальванометра даетъ большое отклоненіе, и достаточно слабого нагреванія, чтобы замѣтить еще увеличеніе оного; напротивъ того мелкія опилки сначала проводятъ токъ столь слабо, что отклоненіе едва замѣтно. При увеличеніи температуры сначала отклоненіе не возрастаетъ, но уменьшается, — потому что мѣдь превращается въ очень нѣжный черныи порошокъ (Cu O). Напротивъ того, цинковыя опилки, тоже въ крупномъ видѣ, дающія безъ нагреванія большое отклоненіе стрѣлки гальванометра, когда онѣ мелко проводятъ дурно, а отъ увеличенія температуры становятся лучшими проводниками; послѣ опыта порошокъ оказывается такимъ, какимъ онъ былъ до опыта. Порошокъ металла, окисляющагося отъ прикосновенія съ воздухомъ при обыкновенной температурѣ, но при высшей температурѣ освобождающагося отъ окиси, требуетъ сначала довольно значительнаго нагреванія, чтобы потомъ провести токъ и дать отклоненіе стрѣлки. Къ этому роду принадлежатъ желѣзныя опилки; однако мнѣ не удалось получить въ нихъ потомъ хорошихъ проводниковъ навсегда, какъ это

(2) см. Вѣстникъ Мат. наукъ N. 1.

утверждаетъ Бецъ: когда лампа была отнята, стрѣлка быстро приблизилась къ 0°. — d) Металлы, принадлежащіе къ лучшимъ проводникамъ, въ порошкообразномъ состояніи проводятъ тоже лучше; поэтому серебряныя опилки, хотя достаточно мелкія, дали безъ нагреванія отклоненіе, доходящее до 90°. — Каменный уголь, получаемый изъ реторты послѣ перегонки на заводахъ газоваго освѣщенія, въ порошкообразномъ состояніи подлѣжитъ тому же самому закону; только проводимость его увеличивается медленно съ возвышеніемъ температуры, и послѣ отнятія лампы стрѣлка гальванометра быстро приближается къ 0. Даже древесный уголь при высокой температурѣ проводить токъ; отклоненіе стрѣлки впрочемъ въ моемъ опытѣ было невелико, 5°, а уголь былъ накаленъ до красна.

Изъ высшихъ степеней окисленія металловъ были испробованы мною только немногія и тѣ оказались чрезвычайно упорными и дурными проводниками; такъ напримѣръ перекись марганца, сурикъ при очень сильномъ нагреваніи сначала освобождали кислородъ а потомъ дали небольшое отклоненіе на гальванометрѣ. Нечистая перекись марганца, приобретенная мною въ одномъ изъ матеріальныхъ магазиновъ; при нагреваніи сначала издавала густыя бѣлыя пары, заключающіе въ себѣ въ особенности стрѣныстыя, мышьяковистыя и вѣроятно еще другія, причемъ отклоненіе стрѣлки шло медленно; потомъ ускорилося и дошло до 45°, и послѣ отнятія лампы стрѣлка спокойно возвратилась въ первоначальное положеніе; при этомъ оказалось, что вся порошкообразная масса слилась въ одну, твердую.

Киноваръ во время нагреванія сначала отдѣляла стрѣны пары, но потомъ сдѣлалась довольно хорошимъ проводникомъ, стрѣлка показала большое отклоненіе; при этомъ оказалась и значительная поляризація электродовъ, но вскорѣ отклоненіе перестало увеличиваться. Причина тому очевидна: извѣстно что отъ нагреванія киноваръ разлагается на составныя части — сѣру и ртуть; хорошая проводимость поэтому произошла отъ присутствія малѣйшихъ шариковъ ртути, которые однакожъ при возвышенной температурѣ сами испарились, отчего и отклоненіе стрѣлки перестало увеличиваться.

Наконецъ я долженъ упомянуть здѣсь одно непонятное для меня обстоятельство, а именно, при нагреваніи мелкихъ мѣдныхъ опилокъ я получилъ самое большое отклоненіе тогда, когда мѣдь превратилась въ окись мѣди (Cu O); послѣ охлажденія я повторилъ опытъ уже съ порошкомъ окиси и онъ оказался дурнымъ проводникомъ даже при высокой температурѣ, при чемъ отклоненіе было только въ нѣсколько градусовъ; вѣроятно въ первомъ случаѣ не всѣ опилки превратились въ окись, оставшіеся въ металлическомъ состояніи проводили токъ; между тѣмъ, какъ вторичное нагреваніе превратило и остальныя частицы въ окись.

Извлеченія изъ періодическихъ изданій.

1. Дополнительная теорема Сильвестра относительно Бернуллиевыхъ чиселъ (см. М. 8). Comptes rendus T. III № 7.

Если p число простое, (за исключеніемъ 2 и 3) n и n' такія чѣтыя числа, что ихъ двойныя $2n$ и $2n'$

не содержатъ множителями ни p ни $p-1$ и суть равноостаточны по модулю $(p-1)p^i$, (гдѣ i какое либо чѣе положительное число или нуль); то Бернуллиевы числа B_n и $B_{n'}$ будутъ связаны между собою сравненіемъ

$$(-1)^n \frac{B_n}{n} \equiv (-1)^{n'} \frac{B_{n'}}{n'} \pmod{p^{i+1}}.$$

Напр. Если $n = 7$, $n' = 17$, то такъ какъ $2n$ и $2n'$ сравнимы и по модулю $11-1$ и по модулю $(5-1)5$, будетъ:

$$\frac{B_7}{7} = \frac{B_{17}}{17} = \frac{2577687858367}{102} \equiv 0 \pmod{11 \times 25}$$

что легко повѣрить.

При этомъ Г. Сильвестръ дѣлаетъ замѣчаніе относительно данной имъ прежде формулы для вычета $\frac{r^{p-1}-1}{p}$

по модулю p , въ случаѣ $r = 2$. Эта формула можетъ быть замѣнена слѣдующею:

$$\frac{2^{p-1}-1}{p} = -\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-3} + \dots \pmod{p}.$$

которая похожа на формулу относящуюся къ случаю r простого нечетнаго, и которая не требуетъ различія формъ $4k+1$ и $4k-1$ для простого модуля p .

А. Ж.

2. Краткія извѣстія.

— Въ I-мъ № «Вѣстника», въ извлеченіи изъ письма Пр. Зейделя содержалось извѣстіе о новой трубѣ съ объективомъ Гауса, устроенной Штейнґелемъ. Въ заведеніи королевскаго Гёттингенскаго Общества Наукъ 9-го Марта (Nachrichten von der G. A. Universität und der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen N. 7.) была представлена такая труба Профессоромъ Веберомъ вмѣстѣ съ изложеніемъ результатовъ изслѣдованія оной Г-мъ астрономъ Клинкерфусъ и замѣчаніями сдѣланными Пр. Листингъ. Труба Штейнґеля, имѣющая въ отверстіи 80^{mm} и фокусной длины 1200^{mm} , была сравниваема съ трубою Мерца, имѣющею 110^{mm} въ отверстіи и 1920^{mm} фокусной длины, при различныхъ увеличеніяхъ и оказалась нисколько неуступающею послѣдней въ отношеніи точности изображенія и болѣе совершенною въ отношеніи ахроматизма. При этомъ, главный ея достоинства заключаются еще съ одной стороны въ сравнительно меньшей длинѣ, что въ особенности было желательно при инструментахъ значительной оптической силы, а съ другой стороны, въ новой методѣ оправы объектива, позволяющей независимыя, небольшія передвиженія составныхъ частей онаго, что даетъ возможность каждому наблюдателю по опыту достигнуть найвыгоднѣйшаго дѣйствія объектива. Г. Штейнґель самъ указываетъ еще возможное улучшеніе въ конструкціи такихъ объективовъ и высказываетъ вполне основательную теперь надежду, получить этимъ путемъ лучшіе рефракторы большихъ размѣровъ, нежели какіе были возможны съ объективомъ Фраунгофера. Дѣйствительный прогрессъ, сдѣланный

Штейнґелемъ въ этой части оптики, кажется, тѣмъ мѣнше можетъ подлежать сомнѣнію, что Гёттингенскіе ученые уже предлагаютъ заказать большой рефракторъ новаго устройства для тамошней Обсерваторіи.

— Бунзенъ при своихъ фотохимическихъ изслѣдованіяхъ употреблялъ свѣтъ, происходящій отъ горѣнія проволоки изъ металла магнія. Этотъ свѣтъ имѣлъ сильное напряженіе, несмотря на небольшой объемъ пламени, которое равнялось по величинѣ ружейной пулѣ, и происходило отъ сгаранія проволоки толщиною въ $0,297 \text{ mil}$; свѣтъ этаго пламени постоянный и равенъ свѣту отъ 75 стеариновыхъ свѣчъ (5 на фунтъ). Жаль что такая проволока пока слишкомъ дорога — (20 талеровъ за лотъ); въ противномъ случаѣ имѣла бы огромную практическую важность (Archiv der Pharmacie).

— Флоримондъ предлагаетъ чугуныя магниты и даетъ слѣдующее правило для полученія ихъ: выбрать чугунъ не слишкомъ крупнозернистый и не слишкомъ мелкозернистый, и сдѣлать кусокъ, котораго длина была бы въ $1\frac{1}{2}$ раза болѣе толщины; нагрѣть до высокой температуры, потомъ на среднѣмъ разстояніи между обоими полюсами, посыпать цѣпистымъ потассіемъ, наконецъ бросить въ обширный сосудъ съ водою, которую поддерживать въ движеніи. Намагничиваніе производить посредствомъ электромагнита (Arch. d. Pharmacie März 1861).

— Еще новая планета, 68-я, открытая на обсерваторіи Брера въ Миланѣ Г-мъ Скиапарелли, Апрѣля 29.

— Паденіе аэролита 14-го Февраля въ $6\frac{1}{2}$ часовъ вечера во Франціи въ Tosane-Saint Arge. Размѣры упавшаго камня 4, 2 и 1 сантиметръ; вѣсъ всего 7 граммовъ. — По замѣчанію Араго (Astr. popul.) въ Февралѣ мѣсяцъ всего рѣже было наблюдаемо паденіе аэролитовъ, а именно достоверно извѣстныхъ случаевъ всего 10, тогда какъ на Іюль мѣсяцъ ихъ приходится 23.

Замѣченныхъ опечатки.

№ 8. Въ Задачѣ 2-ой, въ скобкахъ передъ e^{-ay} пропущенъ знакъ —.

№. 10. стр. 81. 5 и 6-я строки снизу послѣ 2-го знака = должно быть — $2 \sin [\dots]$ и $+ 2 \cos [\dots]$

Стр. 84 въ лѣвомъ столбцѣ въ 12-й строкѣ снизу

напечатано должно быть

$$\varphi + 2k\pi = 2k\pi m = 0, \quad \varphi + 2k\pi - 2k\pi m = 0$$

въ правомъ столбцѣ въ 8 строкѣ

$$e^{x-2k\pi} [\dots] \quad e^{x-2k\pi} [\dots]$$

въ 10 й строкѣ въ значеніи x знаменатель долженъ быть $1 + 4k^2\pi^2$; и въ 15 строкѣ въ показателѣ ue

напеч. $(1 + 4K\pi^2)$ долж. быть $(1 + 4Kk\pi^2)$

Прим. отъ Редакціи. Накопленіе статей по отдѣлу I столь значительно, что, при тѣсномъ объемѣ изданія, невозможно сохранить и въ другихъ отдѣлахъ желаемую полноту.

Печатать позволяется, Вильно 2 Іюня 1861 года. Цензоръ Статскій Совѣтникъ и Кавалеръ А. Мухинъ.

ВІЛЬНО Типографія А. Марциновскаго.

Редакторъ-Издатель М. Гусевъ.