

ВѢСТНИКЪ

МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ

№ 31.

СОДЕРЖАНИЕ.— I Интегрирование рациональныхъ дробей безъ помощи разложения, и Замѣчаніе къ теоріи равныхъ корней, Н. Бугаева. III Извлеченіе изъ письма Износкова. Извлеченія изъ периодическихъ изданій: 1. О правилѣ наименьшаго дѣйствія, Соколова. 2. Замѣчаніе объ условно-сходящихся рядахъ. 3. Краткія извѣстія. 4. Задачи.

I.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХЪ ДРОБЕЙ БЕЗЪ ПОМОЩИ РАЗЛОЖЕНІЯ.

При интегрированіи рациональныхъ дробей обыкновенно разлагаютъ ихъ на сумму другихъ простѣйшихъ, и потомъ берутъ интегралы сихъ послѣднихъ. Но во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда корни знаменателя дѣйствительные, легко избѣжать подобной необходимости разлагать рациональныя дроби. Тогда, рядомъ вспомогательныхъ преобразованій, интегралъ получается безъ помощи разложенія, часто проще и удобнѣе—особенно, если въ знаменателѣ входятъ корни равные.

Прежде изложенія способа интегрированія подобнымъ образомъ, мы докажемъ одну простую теорему, дѣлающую это преобразованіе успешнымъ.

Теорема. При интегрированіи всякой рациональной дроби всегда можно показателъ числителя сдѣлать двумя единицами ниже показателя знаменателя.

Пусть $\frac{f(x)}{F(x)}$ будетъ рациональная дробь, въ которой знаменатель цѣлый многочленъ степени n , а числитель степени $n-1$.

Тогда, очевидно, можно положить

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{kF'(x) + \psi(x)}{F(x)},$$

гдѣ k должно быть такимъ числомъ, чтобы $\psi(x)$ была цѣлою функциею степени $n-2$, или ниже. Видъ $\psi(x)$ и k найти не трудно изъ тождества

$$f(x) = kF'(x) + \psi(x).$$

Сдѣлавъ подобное преобразованіе, мы находимъ

$$\int \frac{f(x) dx}{F(x)} = k \lg(F(x)) + \int \frac{\psi(x)}{F(x)} dx,$$

т. е. интегралъ одной рациональной дроби приводимъ къ интегралу такой другой, у которой числитель—многочленъ, степени двумя единицами ниже степени знаменателя.

Вспомогательное преобразованіе.

Имѣя дробь $\frac{\psi(x)}{F(x)}$, у которой

$$F(x) = (x-a)(x-\beta)(x-\gamma) \dots$$

степени n , а числитель $\psi(x)$ степени не выше $n-2$, мы можемъ преобразовать ее въ другую дробь, у которой степень знаменателя будетъ менѣе n , полагая

$$x = \frac{a+by}{c+ey}, \quad dx = \frac{(bc-ae) dy}{(c+ey)^2};$$

тогда

$$\frac{\psi(x) dx}{(x-a)(x-\beta)(x-\gamma) \dots} = \frac{(c+ey)^{n-2} \psi\left(\frac{a+by}{c+ey}\right) (bc-ad) dy}{(a+by-ac-ae) (a+by-\beta c-\beta ey) (a+by-\gamma c-\gamma ey) \dots}$$

Произвольные коэффициенты a, b, c, e выберемъ подъ условіями $b=ae; a=\beta c$.

Полагая $c=1, e=1$, получимъ $\beta=a, a=\beta$; вспомогательное преобразованіе

$$x = \frac{\beta + ay}{1+y}, \quad dx = \frac{(a-\beta) dy}{(1+y)^2}.$$

Дифференціальное выраженіе приметъ видъ:

$$\frac{\psi x}{F x} dx = \frac{(1+y)^{n-2} \psi \left(\frac{\beta+ay}{1+y} \right) (a-\beta) dy}{(\beta-a)(a-\beta)y [\beta-\gamma+\beta(a-\gamma)y] \dots} = \frac{f_1(y)}{y \Phi_1 y} dy = \frac{f_1 y}{F_1 y} dy \dots$$

выраженія, у котораго числитель, $f_1 y = \frac{(1+y)^{n-2}}{\beta-a} \psi \left(\frac{\beta+ay}{1+y} \right)$, есть цѣлый многочленъ степени $n-2$, а знаменатель степени $n-1$.

На основаніи вышедоказанной теоремы опять понижаемъ степень числителя до $n-3$, то есть дѣлаемъ его степень двумя единицами ниже $n-1$ степени знаменателя.

$$\frac{f_1 y}{F_1 y} dy = \frac{k F_1 y + \psi_1 y}{F_1 y} dy = \frac{k F_1 y}{F_1 y} dy + \frac{\psi_1 y}{F_1 y} dy; \quad \int \frac{f_1 y}{F_1 y} dy = k \lg(F_1 y) + \int \frac{\psi_1 y}{F_1 y} dy.$$

Дробь $\frac{\psi_1 y dy}{F_1 y} = \frac{\psi_1 y dy}{y \Phi_1 y}$ преобразуется положеніемъ

$$y = \frac{1}{z}, \quad dy = -\frac{dz}{z^2}, \quad \frac{\psi_1 y}{y \Phi_1 y} = -\frac{\psi_1 \left(\frac{1}{z} \right)}{F_2 z} \cdot z^{n-3} dz = -\frac{f_2 z}{F_2 z} dz.$$

Знаменатель $F_2 z$ послѣдняго дифференціального выраженія уже $n-2$ степени.

Продолжая поступать подобнымъ образомъ, мы, при помощи теоремы и вспомогательныхъ преобразованій, все болѣе и болѣе понижаемъ степень знаменателя.

Можно бы сначала понизить степень знаменателя положеніемъ $x = a + \frac{1}{y}$, $dx = -\frac{dy}{y^2}$, но преобразование $x = \frac{a+\beta y}{1+y}$ выгоднѣе тѣмъ, что, понижая степень знаменателя, дѣлаетъ въ тоже время неизвѣстное y множителемъ въ знаменателѣ, слѣдовательно дѣлаетъ его способнымъ послѣ снова понизиться отъ положенія $y = \frac{1}{z}$.

Если корни равные, то вспомогательное преобразование понижаетъ знаменателя сразу на нѣсколько степеней, что весьма облегчаетъ интегрированіе.

$$x = \frac{\beta+ay}{1+y}, \quad dx = \frac{(a-\beta) dy}{(1+y)^2}; \quad \frac{\psi x dx}{(x-a)^p (x-\beta)^q \dots} = -\frac{(1+y)^n \cdot \psi \left(\frac{\beta+ay}{1+y} \right) (\beta-a)}{(\beta-a)^p (a-\beta)^q y^2 \dots} = \frac{Q f_2 y dy}{y^2 \Phi_2 y},$$

гдѣ Q число, а знаменатель $y^2 \Phi_2 y$ цѣлый многочленъ степени $n-p$.

Для примѣра проинтегрируемъ выраженіе $\frac{(x^3-2x+3) dx}{(x-3)(x-1)^2(x+2)}$.

Производная отъ знаменателя равна $4x^3-9x^2-6x+11$, поэтому

$$\frac{x^3-2x+3}{(x-3)(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x^3-9x^2-6x+1}{(x-3)(x-1)^2(x+2)} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9x^2-2x+1}{(x-3)(x-1)^2(x+2)}$$

и

$$\int \frac{(x^3-2x+3) dx}{(x-3)(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{4} \lg [(x-3)(x-1)^2(x+2)] + \frac{1}{4} \int \frac{(9x^2-2x+1) dx}{(x-3)(x-1)^2(x+2)} \dots \dots \dots (1)$$

Чтобы найти интегралъ дифференціального выраженія $\frac{(9x^2-2x+1) dx}{(x-3)(x-1)^2(x+2)}$, мы полагаемъ для вспомогательнаго преобразованія $a=1$, $\beta=3$, $x = \frac{1+3y}{1+y}$; $dx = \frac{2dy}{(1+y)^2}$,

тогда

$$\frac{(9x^2-2x+1) dx}{(x-3)(x-1)^2(x+2)} = \frac{9(1+3y)^2-2(1+3y)(1+y)+(1+y)^2}{-2 \cdot 2^2 y^3 (3+5y)} \cdot 2dy = -\frac{(76y^2+48y+8) dy}{2^2 y^3 (3+5y)} = -\frac{19dy}{(3+5y)} - \frac{12dy}{y(3+5y)} - \frac{2dy}{y^3(3+5y)}.$$

Найдемъ послѣдовательно интегралы этихъ трехъ дробей.

$$a) \quad -19 \int \frac{dy}{(3+5y)} = -\frac{19}{5} \lg(3+5y)$$

Вторая и третья дробь упростятся отъ положенія $y = \frac{1}{z}$, $dy = -\frac{dz}{z^2}$, потому что у нихъ въ знаменателѣ неизвѣстное входитъ множителемъ.

$$b) \quad -12 \int \frac{dy}{y(3+5y)} = 12 \int \frac{dz}{(3z+5)} = 4 \lg(3z+5)$$

$$c) \quad -2 \int \frac{dy}{y^2(3+5y)} = 2 \int \frac{zdz}{3z+5} = \int \frac{2}{3} dz - \int \frac{10}{3} \frac{dz}{3z+5} = \frac{2}{3} z - \frac{10}{9} \lg(3z+5).$$

Слѣдовательно

$$\int \frac{(9x^2 - 2x + 1) dx}{(x-3)(x-1)^2(x+2)} = -\frac{19}{5} \lg(3+5y) + 4 \lg(3z+5) + \frac{2}{3} z - \frac{10}{9} \lg(3z+5),$$

а по формулѣ (1)

$$\int \frac{(x^3 - 2x + 3) dx}{(x-3)(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{4} \lg[(x-3)(x-1)^2(x+2)] - \frac{19}{20} \lg(3+5y) + \frac{13}{18} \lg(3z+5) + \frac{z}{6} + C \dots (2)$$

Изъ уравненій $x = \frac{1+3y}{1+y}$, $y = \frac{1}{z}$, получаемъ

$$y = -\frac{x-1}{x-3}, \quad z = -\frac{x-3}{x-1}, \quad 3+5y = -\frac{2(x+2)}{x-3}, \quad 3z+5 = \frac{2(x+2)}{x-1}.$$

Вставивъ во (2), имѣемъ

$$\int \frac{(x^3 - 2x + 3) dx}{(x-3)(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{4} \lg[(x-3)(x-1)^2(x+2)] - \frac{1}{6} \frac{x-3}{x-1} - \frac{19}{20} \lg\left[-\frac{2(x+2)}{x-3}\right] + \frac{13}{18} \lg\left[\frac{2(x+2)}{x-1}\right] + C.$$

Замѣтивъ, что $-\frac{1}{6} \frac{x-3}{x-1} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3(x-1)}$; $\lg\left[-\frac{2(x+2)}{x-3}\right] = \lg(-2) + \lg\frac{x+2}{x-3}$;

$\lg\left[\frac{2(x+2)}{x-1}\right] = \lg 2 + \lg\frac{x+2}{x-1}$, и отнеся $-\frac{1}{6} - \frac{19}{20} \lg(-2) + \frac{13}{18} \lg 2$ къ постоянному C , получимъ

$$\begin{aligned} \int \frac{(x^3 - 2x + 3) dx}{(x-3)(x-1)^2(x+2)} &= \frac{1}{4} \lg[(x-3)(x-1)^2(x+2)] + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{19}{20} \lg\frac{x+2}{x-3} + \frac{13}{18} \lg\frac{x+2}{x-1} + C_1 = \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{19}{20}\right) \lg(x-3) + \left(\frac{1}{4} - \frac{19}{20} + \frac{13}{18}\right) \lg(x+2) + \left(\frac{1}{2} - \frac{13}{18}\right) \lg(x-1) + \frac{1}{3(x-1)} + C_1; \end{aligned}$$

откуда окончательно имѣемъ:

$$\int \frac{(x^3 - 2x + 3) dx}{(x-3)(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{3(x-1)} + \frac{6}{5} \lg(x-3) + \frac{1}{45} \lg(x+2) - \frac{2}{9} \lg(x-1) + C_1,$$

формулу совершенно согласную съ интеграломъ, полученнымъ помощію разложенія рациональной дроби.

Чтобы нагляднѣе убѣдиться въ простотѣ, съ которою совершается интегрированіе рациональной дроби при помощи вспомогательнаго преобразованія, въ случаѣ, если знаменатель содержитъ равные корни, возьмемъ

$$\text{интегралъ } \int \frac{(x^2 + 2x - 1) dx}{(x-2)^4}.$$

Полагая $x = 2 + \frac{1}{y}$, $dx = -\frac{dy}{y^2}$, $y = \frac{1}{x-2}$.

$$\int \frac{(x^2 + 2x - 1) dx}{(x-2)^4} = - \int (7y^2 + 6y + 1) dy = -\frac{7}{3} y^3 - 3y^2 - y + C = -\frac{7}{3(x-2)^3} - \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-2} + C.$$

Если бы въ знаменатель входили корни мнимые, то можно бы приложить вспомогательныя преобразованія къ послѣдовательному пониженію степени знаменателя этой дроби, но онѣ не приносятъ существеннаго облегченія и тогда лучше пользоваться обыкновенными приемами разложенія.

Замѣчу между прочимъ, что при опредѣленіи интеграла $\int f(x, \sqrt{x^2+mx+n}) dx$ въ томъ случаѣ, когда α и β будутъ действительными корнями уравненія $x^2+mx+n=0$, вспомогательное преобразование $x = \frac{\alpha+\beta y^2}{1+y}$ можетъ быть употреблено съ большою пользою для того, чтобы освободить сразу дифференціальное выраженіе отъ радикала.

Дѣйствительно, тогда

$$\sqrt{x^2+mx+n} = \frac{\sqrt{(\alpha+\beta y^2)^2+m(\alpha+\beta y^2)(1+y^2)+n(1+y^2)^2}}{1+y^2} = \frac{\sqrt{(\beta^2+m\beta+n)y^4+(2\beta+ma+m\beta+2n)y^2+\alpha^2+ma+n}}{1+y^2},$$

или

$$\sqrt{x^2+mx+n} = \frac{y}{1+y^2} \sqrt{2\beta+ma+m\beta+2n},$$

потому что $\beta^2+m\beta+n=0$, $\alpha^2+ma+n=0$ на основаніи того, что α и β суть корни уравненія $x^2+mx+n=0$.

Село Никольское 1862 года. Іюля 26-го.

Н. Бугаевъ.

КЪ ТЕОРІИ РАВНЫХЪ КОРНЕЙ.

Въ теоріи равныхъ корней Остраградскій предложилъ очень простой пріемъ для нахождения сразу производителей, соответствующихъ n кратнымъ корнямъ уравненія. Этого же можно достигнуть другимъ путемъ.

Чтобы найти n кратный производитель уравненія $fx=0$ прямо, нужно найти D_{n-1} — общаго наибольшаго дѣлителя между $f^{(n-1)}x$, производною порядка $n-1$ и $(f^n x)^2$, квадратомъ производной порядка n ; тогда q_n , общій наибольшій дѣлитель между $\frac{f^{(n-1)}x}{D_{n-1}}$ и $f^{(n-1)}x$ и будетъ этимъ n кратнымъ производителемъ.

Полагая $fx = q_1 q_2^2 q_3^3 q_4^4 \dots = 0$, гдѣ $q_1, q_2, q_3 \dots$ выражаютъ произведенія изъ производителей, соответствующихъ однократному, двукратному и т. д. корнямъ уравненія, имѣемъ

$$f'x = R_1 q_2 q_3^2 q_4^3 \dots; f''x = R_2 q_3 q_4^2 q_5^3 \dots; f'''x = R_3 q_4 q_5^2 \dots$$

$$f^{(n-1)}x = R_{n-1} q_n q_{n+1}^2 \dots; f^n x = R_n q_{n+1} q_{n+2} \dots,$$

гдѣ $R_1, R_2, R_3 \dots R_{n-1}, R_n \dots$ многочлены, не содержащіе ни одного изъ производителей:

$$q_1, q_2, q_3 \dots$$

Очевидно, что общимъ наибольшимъ дѣлителемъ между $f^{(n-1)}x$ и $(f^n x)^2$ будетъ $D_{n-1} = q_1^{2n-1} q_2^{2n-2} \dots$, а общимъ наибольшимъ дѣлителемъ между $\frac{f^{(n-1)}x}{D_{n-1}}$ и $f^{(n-1)}x$ будетъ q_n , требуемый n кратный производитель уравненія $fx=0$.

И такъ для нахождения q_4 производителей, соответствующихъ четверократнымъ корнямъ, опредѣляютъ D_3 , общій наибольшій дѣлитель между $f'''x$ и $(f^{IV}x)^2$; тогда q_4 , общій наибольшій дѣлитель функций $\frac{f'''x}{D_3}$ и $f'''x$, будетъ искомымъ многочленомъ.

Н. Бугаевъ.

III.

Извлеченіе изъ письма Г-на Износкова отъ 20 Іюля.

1) Въ № 29 «Вѣстника М. Н.» помѣщено: Замѣчаніе относительно функции (Г.) Эппенера. Подобныя же изслѣдованія относительно функции гамма встрѣчаются въ журналѣ Лувилля за 1842 годъ въ статьѣ: «Note sur les intégrales Euleriennes, par Serret» page 114. Можетъ быть для читателей В. М. Н. будетъ теперь не безынтересно найти здѣсь небольшое извлеченіе изъ вышеупомянутой статьи.

Извѣстно что:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

т. е. корню квадратному изъ длины полуокружности, которой діаметръ принять за единицу.

Подобное этому геометрическое значеніе можно также дать:

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right), \Gamma\left(\frac{1}{8}\right) \text{ и вообще: } \Gamma\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x dx = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}$$

Полагая $m = n$, получим:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1}(2x) d2x = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} x dx = 2^{m-2} \frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(m)}.$$

Но уравнение лемнискаты въ полярныхъ координатахъ будеть:

$$r^2 = \frac{(2a)^2}{2} \cos 2t;$$

длина же цѣлаго периметра лемнискаты есть:

$$2^{\frac{1}{2}} a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}} x dx = a \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Если примемъ параметръ лемнискаты за единицу и означимъ периметръ π_2 , то получимъ:

$$\frac{m-1}{2^{\frac{m-1}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2m}} \cos^{\frac{1}{m}-1} mt dt = 2^{\frac{m-1}{2m}} \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^{\frac{1}{m}-1} dx = \frac{1}{2m} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}$$

черезъ π_m , получимъ:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right) = \sqrt{\pi_m} \sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)} \dots \dots (2)$$

откуда имѣемъ:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\pi_2} \sqrt[4]{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{8}\right) = \sqrt{\pi_4} \sqrt[4]{\pi_2} \sqrt[4]{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{16}\right) = \sqrt{\pi_8} \sqrt[4]{\pi_4} \sqrt[4]{\pi_2} \sqrt[4]{\pi},$$

$$\dots \dots \dots$$

2) Въ № 23 Вѣст. М. Н. мы вывели формулы для суммы тангенсовъ угловъ многоугольника. Тѣ же формулы можно получить нѣсколько иначе. Такъ напр. если данъ пятиугольникъ $ABCDE$, то продолженіемъ сторонъ: AB , BC и DE можно обратить его въ треугольникъ FBN , въ которомъ вновь образованные углы

$$\angle F = A + E - 180^\circ, \quad \angle H = C + D - 180^\circ,$$

и

$$\tan B + \tan F + \tan H = \tan B \cdot \tan F \cdot \tan H,$$

или

$$\begin{aligned} \tan B + \tan(A+E) + \tan(C+D) &= \\ &= \tan B \cdot \tan(A+E) \cdot \tan(C+D). \end{aligned}$$

Вставляя же значенія тангенсовъ отъ суммы, получимъ формулу для суммы тангенсовъ угловъ пятиугольника.

$$\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \pi_2,$$

а слѣдовательно:

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\pi_2} \sqrt[4]{\pi} \dots \dots \dots (1)$$

Разсматривая же уравненія кривой:

$$r^m = \frac{(2a)^m}{2} \cos mt$$

или, проще:

$$r^m = 2^{m-1} \cos mt$$

и означая периметръ этой кривой:

Сравнивая же выраженіе (1) съ значеніемъ $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$, даннымъ Эниперомъ, т. е.

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \sqrt{K} \sqrt[4]{\pi},$$

получимъ:

$$\sqrt{\pi_2} = 2 \sqrt{K},$$

или:

$$\pi_2 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2 \sin^2 \varphi}};$$

гдѣ

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3) Задача.

Доказать справедливость ряда:

$$\frac{n}{m} + \frac{n+1}{m^2} + \frac{n+2}{m^3} + \dots = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{m}\right)^2} + \frac{n-1}{m-1} - \frac{1}{1 - \frac{1}{m}}.$$

Рѣшеніе:

$$\text{Полагая } \frac{n}{m} + \frac{n+1}{m^2} + \frac{n+2}{m^3} + \dots = S$$

$$\text{имѣемъ: } S = \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \dots$$

$$+ \frac{n-1}{m} + \frac{n}{m^2} + \frac{n+1}{m^3} + \dots$$

или:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{m}} + \frac{n-1}{m} + \frac{1}{m} S - 1.$$

Откуда:

$$S = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{m}\right)^2} + \frac{n-1}{m-1} - \frac{1}{1 - \frac{1}{m}}.$$

Извлечения из периодических изданий.

1. Замѣчаніе о правилѣ наименьшаго дѣйствія Проф. Н. Соколова (Сомр. Rend. T. LV № 1).

Авторъ представляетъ новую общую теорему, которая содержитъ въ себѣ правило наименьшаго дѣйствія какъ частный случай.

Означая чрезъ $m_1, m_2, \dots, m_n$ массы системы матеріальныхъ точекъ, находящихся въ движеніи, коихъ положеніе въ концѣ времени t определяется соответственно координатами $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$; скорости этихъ точекъ, разложенныя параллельно осямъ: $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots, u_n, v_n, w_n$; и полагая, что силы, приложенныя къ системѣ, выражаются частными производными одной функціи φ , взятymi въ отношеніи координатъ; поставивъ наконецъ условныя уравненія

$$f = 0, \quad f_1 = 0, \quad \dots, \quad f_k = 0, \quad \dots \quad (1)$$

выражающія взаимную связь между матеріальными точками; авторъ составляетъ выраженіе:

$$(\varphi - F) dt + \sum m_i (T dx_i + v_i dy_i + w_i dz_i), \dots \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{d\varphi}{dx_1} dt - m_1 du_1 \right) \delta x_1 + \left(\frac{d\varphi}{dy_1} dt - m_1 dv_1 \right) \delta y_1 + \left(\frac{d\varphi}{dz_1} dt - m_1 dw_1 \right) \delta z_1 \\ & + \left(\frac{d\varphi}{dx_2} dt - m_2 du_2 \right) \delta x_2 + \dots \\ & + \left(m_1 dx_1 - \frac{dT}{du_1} \right) \delta u_1 + \left(m_1 dy_1 - \frac{dT}{dv_1} \right) \delta v_1 + \left(m_1 dz_1 - \frac{dT}{dw_1} \right) \delta w_1, \\ & + \left(m_2 dx_2 - \frac{dT}{du_2} \right) \delta u_2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots \quad (3)$$

которая, будучи приравнена нулю, на основаніи уравненій:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx_1} \delta x_1 + \frac{df}{dy_1} \delta y_1 + \frac{df}{dz_1} \delta z_1 + \frac{df}{dx_2} \delta x_2 + \dots &= 0, \\ \frac{df_1}{dx_1} \delta x_1 + \frac{df_1}{dy_1} \delta y_1 + \dots &= 0, \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

которымъ должны удовлетворять варіаціи: $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \dots$, приводится къ слѣдующимъ уравненіямъ движенія системы въ обыкновенномъ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dT}{du_1} = m_1 u_1; \quad m_1 \frac{dy_1}{dt} = \frac{dT}{dv_1} = m_1 v_1, \quad m_1 \frac{dz_1}{dt} = \frac{dT}{dw_1} = m_1 w_1, \dots \\ m_1 \frac{du_1}{dt} &= \frac{d\varphi}{dx_1} + \lambda \frac{df}{dx_1} + \lambda_1 \frac{df_1}{dx_1} + \dots \\ m_1 \frac{dv_1}{dt} &= \frac{d\varphi}{dy_1} + \lambda \frac{df}{dy_1} + \lambda_1 \frac{df_1}{dy_1} + \dots \\ \dots & \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

гдѣ коэффициенты $\lambda, \lambda_1, \dots$ должны быть опредѣлены изъ уравненій (1).

Для полученія тѣхъ же уравненій въ другомъ видѣ, стоитъ только замѣтить, что, разсматривая группы перемѣнныхъ $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$ и $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots$ какъ независимыя между собою и полагая $\varphi - T = H$, можно, въ выраженіи (4), $\frac{d\varphi}{dx_1}, \frac{d\varphi}{dy_1}, \frac{d\varphi}{dz_1}, \dots$ замѣнить соответственно $\frac{dH}{dx_1}, \frac{dH}{dy_1}, \frac{dH}{dz_1}, \dots$;

а частныя производныя $\frac{dT}{du_1}, \frac{dT}{dv_1}, \dots$ посредствомъ $-\frac{dH}{du_1}, -\frac{dH}{dv_1}, \dots$

гдѣ $T = \frac{1}{2} \sum m_i (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2)$, а i можетъ при-

нимать послѣдовательно всѣ значенія: $1, 2, 3, \dots, n$.

Отыскивая условія, при которыхъ выраженіе (2) будетъ точнымъ дифференціаломъ функціи перемѣнныхъ:

$t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, u_1, v_1, w_1, \dots, u_n, v_n, w_n$,

и принимая во вниманіе условныя уравненія (1), можно весьма легко получить уравненія движенія системы и притомъ по произволу въ томъ или другомъ известномъ видѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, находя варіаціи выраженія (2), въ которомъ разсматриваемъ t какъ перемѣнное независимое, и заставляя измѣняться только количества

$x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, u_1, v_1, w_1, \dots, u_n, v_n, w_n$,

получается часть этого варіаціона, несоставляющая точнаго дифференціала:

Такимъ образомъ уравненія движенія примутъ видъ, данный имъ Гамильтономъ:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{dH}{du_1}, \quad m_1 \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dH}{dv_1}, \quad m_1 \frac{dz_1}{dt} = -\frac{dH}{dw_1}, \dots \\ m_1 \frac{du_1}{dt} &= \frac{dH}{dx_1} + \lambda \frac{df}{dx_1} + \lambda_1 \frac{df_1}{dx_1} + \dots \\ m_1 \frac{dv_1}{dt} &= \frac{dH}{dy_1} + \lambda \frac{df}{dy_1} + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Полагая теперь, что переменныя $x_1, y_1, z_1, x_2, \dots$ и u_1, v_1, w_1 не независимы другъ отъ друга, но связаны отношеніями:

$$\frac{dx_1}{dt} = u_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = v_1, \quad \frac{dz_1}{dt} = w_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = u_2, \dots;$$

то въ этомъ случаѣ $\sum m_i (u_i dx_i + v_i dy_i + w_i dz_i)$ обращается въ $\sum m_i (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) dt = 2Tdt$ и выраженіе (2) въ $(\varphi + T) dt$. Подвергая послѣднее тѣмъ же операціямъ какъ и (2), получаютъ уравненія движенія въ формѣ, данной имъ Лапласомъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \left[\frac{d(\varphi + T)}{dx_1} \right]}{dt} &= \frac{d(\varphi + T)}{dx_1} + \lambda \frac{df}{dx_1} + \lambda_1 \frac{df_1}{dx_1} + \dots \\ \frac{d \left[\frac{d(\varphi + T)}{dy_1} \right]}{dt} &= \frac{d(\varphi + T)}{dy_1} + \lambda \frac{df}{dy_1} + \lambda_1 \frac{df_1}{dy_1} + \dots \\ \frac{d \left[\frac{d(\varphi + T)}{dz_1} \right]}{dt} &= \frac{d(\varphi + T)}{dz_1} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

гдѣ $x_1, y_1, z_1, \dots$ означаютъ производныя: $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}, \dots$

Всѣ предыдущіе выводы предполагаютъ, что функціи $\varphi, f, f_1, \dots, f_n$ могутъ, кромѣ координатъ $x_1, y_1, z_1, \dots$ содержать также и время t ; если мы примемъ теперь, что послѣднее не входитъ въ нихъ; то въ этомъ случаѣ будетъ имѣть мѣсто начало живыхъ силъ и между переменными: $x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, u_1, v_1, w_1, \dots$ будетъ существовать уравненіе:

$$\frac{1}{2} \sum m_i (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) = \varphi + h, \dots \quad (7)$$

(гдѣ h постоянное), посредствомъ котораго выраженіе (2) обратится въ

$$-h dt + \sum m_i (u_i dx_i + v_i dy_i + w_i dz_i) \dots \quad (8)$$

Варианціонъ этого выраженія, если t постоянно, очевидно независимъ отъ перваго члена; откуда заключаемъ, что въ случаѣ, въ которомъ прилагается начало живыхъ силъ, уравненія движенія получаютъ, приводя къ интегрированію выраженіе

$$\sum m_i (u_i dx_i + v_i dy_i + w_i dz_i).$$

Только въ этомъ частномъ случаѣ имѣетъ мѣсто пра-

вило наименьшаго дѣйствія, которое представляется здѣсь въ формѣ отличной отъ обыкновенной; но преимущество которой авторъ обобщаетъ показать въ другой статьѣ.

2. Замѣчаніе объ условно-сходящихся рядахъ. (Archiv der Math. XXXVII Th. II. 2).

Извѣстно, что въ бесконечныхъ рядахъ не позволительно измѣнять произвольно порядокъ членовъ, не нарушая сходимости этихъ рядовъ. Такъ напр. если въ ряду

$$1.2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

переставимъ члены такъ, чтобы каждыя два положительные члена слѣдовали одинъ за другимъ, то получимъ совершенно иную сумму:

$$\frac{3}{2} 1.2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

Этотъ примѣръ данъ Дирикле. Другой, еще болѣе очевидный примѣръ представляетъ сходящійся рядъ:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

Если переставить члены его также какъ въ предыдущемъ и соединить въ группы по три, то получится

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}}; \text{ и т. д.}$$

Но общее выраженіе такого трехчлена:

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{4n+1}} + \frac{1}{\sqrt{4n+3}} - \frac{1}{\sqrt{2n+2}} > \frac{1}{\sqrt{4n+4}} + \frac{1}{\sqrt{4n+4}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4n+4}}$$

или $U_n > \frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{4n+4}}$, а слѣдовательно сумма преобразованнаго ряда $> (1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) \left\{ \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots \right\}$, т. е. этотъ рядъ есть расходящійся.

3. Краткія извѣстія.

— Въ засѣданіи Берлинской Академіи 10 Апр. Г. Веберъ обратилъ вниманіе на тождество приводимыхъ чиселъ для продолжительности должайшаго дня у Халдеевъ, Китайцевъ и Индейцевъ, а именно 14 ч. 24 мин. Невозможно предположить, чтобы во всѣхъ трехъ странахъ опредѣленія сдѣланы были подѣ одну и тою же широтою; тѣмъ болѣе, что общая параллель проходить только на северной границѣ Индіи. Наиболее вѣроятнымъ признаеть авторъ считать Вавилонъ мѣстомъ первоначальнаго опредѣленія вышеприведеннаго числа. Но онъ прибавляетъ, если бы въ послѣдствіи, на основаніи какихъ либо новыхъ изслѣдованій, и оказалось, что Китайцы были въ этомъ отношеніи учителями Халдейцевъ, то все таки Индія могла получить астрономическія свѣдѣнія только черезъ Халдею. Такимъ образомъ слава древней Индейской культуры понемногу утрачиваетъ свой авторитетъ.

— Г-нъ Мозели въ своемъ мемуарѣ, напечатанномъ въ Январской книжкѣ Phil. Mag., доказываетъ аналитически, что металлическая пластинка, положенная на плоскость немного наклоненную, такъ чтобы она не могла скользить, все-таки должна постепенно понижаться въ слѣдствіе послѣдовательныхъ разширеній и сжатій, производимыхъ переменною температурою. Опытъ подтвердилъ это заключеніе: На деревянной поверхности (изъ словаго дерева), наклоненной къ горизонту подѣ угломъ 18° и обращенной на югъ, была положена свинцовая пластинка, весомъ въ 28 фунтовъ. Наблюденія, производимыя при помощи нониуса, показали, что перемѣщеніе было почти незамѣтнымъ во время пасмурныхъ дней, и напротивъ того въ присутствіи солнца оно достигало иногда четверти дюйма въ теченіи дня. Авторъ ищетъ въ этомъ явленіи объясненія для наблюдаемаго въ горахъ нисхожденія ледниковъ и находитъ, что скорость этого нисхожденія вполне согласна съ результатомъ вычисленія. Онъ говоритъ, что если бы кусокъ льда, надѣ которымъ Шумахеръ производилъ изслѣдованія относительно разширенія и нашелъ его вдвое сильнѣйшимъ, чѣмъ для свинца, положить на плоскость, наклоненную къ горизонту на столько же, какъ и въ вышеприведенномъ опытѣ, и одѣть его сви-

зу свинцовымъ листомъ, дабы сдѣлать треніе одинаковымъ, то скорость нисхожденія его была бы вдвое большею, чѣмъ въ опытѣ съ свинцовой пластинкой. Безъ всякаго сомнѣнія, указываемая Авторомъ причина производитъ вліяніе на движеніе ледниковъ, но она не можетъ быть единственною, какъ старается доказать Авторъ, ибо извѣстно, что это движеніе совершается преимущественно во время лѣта, когда температура льда подвержена наименьшимъ измѣненіямъ, оставаясь постоянно близкою къ нулю градусовъ.

Пр. Твинингъ въ Нью-Гавенѣ (въ Соединенныхъ Штатахъ) изъ многихъ наблюденій надѣ Августовскимъ періодомъ падающихъ звѣздъ и изъ сравненія выводовъ надѣ нисходнымъ пунктомъ метеоровъ приходитъ къ заключенію: во 1-хъ, что эти метеоры космическаго происхожденія; во 2-хъ, что они постоянные члены солнечной системы и вращаются около центрального тѣла въ эллиптическихъ путяхъ; въ 3-хъ, что направленіе и абсолютная скорость отдѣльныхъ метеоровъ, приблизительно одна и таже; въ 4-хъ, что цѣлая группа образуетъ около солнца кольцо-образную а не диско-образную фигуру, и въ 5-хъ, что наклоненіе путей этого потока, которое должно превышать 60°, заставляетъ предполагать, что онъ образуетъ отдѣльную группу отъ Нолбрекаго потока. На основаніи средней наблюдаемой скорости и направленія, Онъ выводитъ величину половины большой оси кольца 0,84; эксцентриситетъ 0,28; наклоненіе 96° и время обращенія 281 день. Толстоту кольца Онъ приблизительно опредѣляетъ отъ 5 до 10 милліоновъ миль, ибо земля употребляетъ нѣсколько дней для прохожденія его, Приблизительная оцѣнка общаго числа метеоровъ, составляющихъ кольцо, сдѣланная въ предположеніи, что среднее перпендикулярное удаленіе орбитъ видимыхъ метеоровъ не превосходитъ 71 миль и что переречное сѣченіе кольца составляетъ кругъ, котораго радіусъ равенъ 2½ милліонамъ миль, на основаніи наблюдаемаго числа появленій и скорости движенія, выходитъ, что для 281 дневнаго періода, въ случаѣ равномернаго распредѣленія, общее число ихъ должно превосходить 300,000,000,000,000.

4. Задача N. 6, предлагаемая на разрѣшеніе.

Въ «Nouvelles Annales de Mathématiques par Terquem» за 1859-ый годъ была помѣщена, между прочимъ, слѣдующая задача:

«Если обращать прямой уголъ, находящійся на кривой коническаго сѣченія, около его вершины, то линія, соединяющая точки прерѣщенія сторонъ угла съ кривою, всегда проходитъ черезъ одну постоянную точку, черезъ которую также проходитъ и нормаль къ кривой.»

Очевидно, что, при движеніи вершины прямого угла по кривой коническаго сѣченія, положеніе постоянной точки будетъ измѣняться. Требуется найти уравненіе кривой, которую описываетъ эта точка.